教育部高职高专规划教材辅导用书

高等数学（下）
学习辅导

MATHS

主编 胡金德
陈 魁

中国财政经济出版社

教育部高职高专规划教材辅导用书

高等数学（下）学习辅导

胡金德　陈魁　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下）学习辅导/胡金德，陈魁编著. —北京：中国财政经济出版社，2008.1

教育部高职高专规划教材辅导用书

ISBN 978-7-5005-9973-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①胡…②陈… Ⅲ. 高等数字-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 078700 号

中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www. cfeph. cn

E-mail：jiaoyu@ cfeph. cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行电话：88190616　88190655（传真）

三河市新世纪印务有限公司印刷　各地新华书店经销

787×960 毫米　16 开　20.25 印张　333 000 字

2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月河北第 1 次印刷

定价：24. 00 元

ISBN 978-7-5005-9973-9/0·0062

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书是主教材“高等数学（下）”的教学辅助用书，内容安排与主教材对应．第一篇线性代数和第二篇概率论与数理统计分别由胡金德教授、陈魁教授编写．根据高职高专的实际需要，内容安排以习题为主，与教材紧密配合．各章的内容都有以下几个部分：内容提要、学习要求和重点难点、典型例题分析、同步练习题、自我测验题以及这两类习题的解答．认真学习这本辅助用书，对掌握主教材的内容、提高能力会有很大的帮助．

编　者

2007 年 2 月于清华园

目录

第一篇 线性代数

第二篇 概率论与数理统计

第一篇　线性代数

第1章

行 列 式

一、内容提要

1. 行列式的定义

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

…………,

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中A_{1j}是元素a_{1j}的代数余子式，

$$A_{ij}=(-1)^{1+j}M_{1j},$$

M_{1j}是元素a_{1j}的余子式，是D_n中划去a_{1j}所在的第1行和第j列元素后得到的$n-1$阶行列式.

2. 行列式的性质

(1) 行列式中行、列互换，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 行列式的值等于任一行(列)元素与其对应的代数余子式的乘积的和.

(3) 行列式中任一行(列)元素与另一行(列)元素对应代数余子式乘积之和为零.

(4) 行列式中某行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

(5) 行列式中若某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$，可提出到行列式符号的外面.

(6) 行列式某行(列)的元素均是两个元素之和，则该行列式可以分成两个行列式的和.

(7) 交换行列式的任意两行(列)，行列式的值改变符号.

(8) 行列式中某两行(列)元素对应成比例(或相等)，则该行列式的值为零.

(9) 用常数乘行列式中某一行(列)的各元素，然后加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

3. 克莱姆法则

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，则(1.1)有惟一解，且其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 得到的行列式.

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时，得对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

方程组(1.2)只有零解的充分必要条件是系数行列式 $D \neq 0$.

方程组(1.2)有非零解的充分必要条件是 $D = 0$.

二、学习要求和重点难点

行列式的逆序定义是行列式的难点之一，但教材采用递归定义，避开了逆序定义，对定义只要有一定的了解即可.

利用定义、性质(包括展开定理)计算行列式或判别行列式是否为零是本章的重点，特别是三、四阶行列式的计算应要求准确、熟练，对 n 阶行列式应当适度. 计算中还要针对具体的行列式特点，其元素分布的规律，采用相应的性质、方法，这要多看、多练，不断总结，提高行列式的分析和运算能力.

克莱姆法则在理论上是重要的，当其系数行列式不等于零，则非齐次线性方程组(1.1)惟一解，且对应的齐次线性方程组(1.2)只有零解. 当系数行列式等于零时，则齐次线性方程组有非零解.

三、典型例题分析

例 1.1 设 D 是 n 阶行列式，且 $D = 0$，则 D 中______.

(A) 必有一行(或列)元素全为零.

(B) 必有两列(或行)元素成比例.

(C) 以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有惟一解.

(D) 以 D 为系数行列式的齐次方程组必有非零解.

解 应选(D).

其中(A)、(B)是 $D=0$ 的充分条件，不是必要条件.(C)$D\neq 0$ 是非齐次线性方程组惟一解的充要条件. $D=0$，非齐次线性方程组可能无解，可能无穷多解，故(C)不成立. 而(D)$D=0 \Longleftrightarrow$ 以 D 为系数行列式的齐次线性方程组有非零解.

评注 应搞清教材中条件与结论之间的关系，是充分条件？还是必要条件？还是充分必要条件？

例 1.2 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & x+a_{13} & x+a_{14} \\ x+a_{21} & x+a_{22} & x+a_{23} & x+a_{24} \\ x+a_{31} & x+a_{32} & x+a_{33} & x+a_{34} \\ x+a_{41} & x+a_{42} & x+a_{43} & x+a_{44} \end{vmatrix}$，则多项式 $f(x)$ 可能的最高方次是______.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解 应选(A).

将行列式的第 1 行乘 -1 加到第 2、3、4 行，则将消去第 2、3、4 行中的 x，最后按第 1 行展开，得 $f(x)$ 的表示式，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & x+a_{13} & x+a_{14} \\ x+a_{21} & x+a_{22} & x+a_{23} & x+a_{24} \\ x+a_{31} & x+a_{32} & x+a_{33} & x+a_{34} \\ x+a_{41} & x+a_{42} & x+a_{43} & x+a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & x+a_{13} & x+a_{14} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} & a_{24}-a_{14} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} & a_{34}-a_{14} \\ a_{41}-a_{11} & a_{42}-a_{12} & a_{43}-a_{13} & a_{44}-a_{14} \end{vmatrix}$$

$$=(x+a_{11})A_{11}+(x+a_{12})A_{12}+(x+a_{13})A_{13}+(x+a_{14})A_{14},$$

故 $f(x)$ 是 x 的一次多项式，整理后若 x 的系数为零，则 $f(x)$ 是一个常数，称为零次多项式；若 x 系数不为零，则 $f(x)$ 是一次多项式，故 $f(x)$ 可能的最高方次是 1 次，应选(A).

评注 不要只从表面看以为 $f(x)$ 是 4 次多项式而选(D). 通过观察、思

考，也可通过适当的运算，再下结论.

例 1.3 方程

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}=0,$$

则方程的根是______.

解 应填 $x=a,\ b,\ c,\ -(a+b+c)$.

显然方程是一个一元四次方程，应有4个根，由观察，当 $x=a$ 时，代入方程，因第1行和第2行相等，行列式为零，故 $x=a$ 是方程的一个根，同样 $x=b$ 代入，第2行、第3行相等，$x=c$ 代入，第3行、第4行相等，所以 $x=b$，$x=c$ 也是方程的根.

又观察 D 中每行元素之和均为 $(x+a+b+c)$，若将第2列，第3列，第4列均加到第1列，则第1列有公因子 $(x+a+b+c)$，即方程左端有公因子 $(x+a+b+c)$，从而知方程的另一个根是 $x=-(a+b+c)$，故方程的四个根是 $a,\ b,\ c,\ -(a+b+c)$.

评注 方程的根是使行列式为零的 x 值，显然方程的根与 $a,\ b,\ c$ 有关，逐个代入行列式（不必将行列式展开求出一般方程再求根），看是否是根即可，观察行列式中每行元素之和相等也是这个方程的特点.

例 1.4 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a\neq 0$,

则 $\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}+3a_{23} & a_{23} \\ -2a_{11} & -2a_{12}-63a_{13} & -2a_{13} \\ a_{31} & a_{32}+3a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}=$______.

分析 观察、研究行列式 $\widetilde{D}$ 和 D 的关系，将 $\widetilde{D}$ 转化成已知值的行列式 D.

解 应填 $2a$.

因

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}+3a_{23} & a_{23} \\ -2a_{11} & a_{12}-6a_{13} & -2a_{13} \\ a_{31} & a_{32}+3a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-3c_3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} (-2)(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2a.$$

例 1.5 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a$,

(1) 计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

(2) 计算 D 的全部代数余子式的和.

解 (1) 因 $D=2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}+2A_{14}=a$, 故

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\frac{a}{2}.$$

(2) 法一 全部代数余子式的和为

$$\begin{aligned} & A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}+A_{31}+A_{32} \\ & \quad +A_{33}+A_{34}+A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} \\ & =\frac{1}{2}(2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}+2A_{14})+\frac{1}{2}(2A_{21}+2A_{22}+2A_{23}+2A_{24}) \\ & \quad +\frac{1}{2}(2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}+2A_{34})+\frac{1}{2}(2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}) \\ & =\frac{a}{2}+0+0+0=\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

法二 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\frac{1}{2}(2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}+2A_{14})=\frac{a}{2}$,

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix}2&2&2&2\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\1&1&1&1\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}2&2&2&2\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

故 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}+A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}+A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\frac{a}{2}$.

例 1.6 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}.$$

解法一 利用行列式性质，将第 4 列加到第 3 列，再将第 3 列加到第 2 列，第 2 列加第 1 列，消元素 -1 为零.

$$D_4=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_4}\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1&a\\0&0&-a&1-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1&a&0\\0&0&1&a\\0&-a&-a&1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\-a&-a&-a&1-a\end{vmatrix}.$$

再将第 1 列的 $-a$ 倍加到第 2 列，第 2 列的 $-a$ 倍加到第 3 列，第 3 列的 $-a$ 倍加到第 4 列，即

$$D_4=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\-a&-a&-a&1-a\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-ac_1}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\-a&a^2-a&-a&1-a\end{vmatrix}$$