2009版

龚冬保教授数学考研

数学考研典型题

数学三和数学四

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀

魏立线

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

（2009 版）

数学考研典型题

（数学三和数学四）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来，2009版是最新修订版，也是本书第10版. 由于本书的例题和练习题精典，所以在本书问世后的9年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎. 例如2000年，书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一，8题49分；数学二，7题44分；数学三，6题41分；数学四，5题44分)；2001年覆盖考题66道(次)332分(数学一68分，数学二90分，数学三83分，数学四91分)；2002年覆盖考题338分(数学一87分，数学二91分，数学三81分，数学四79分)；2003年覆盖考题561分(数学一142分，数学二139分，数学三142分，数学四138分)；2004年覆盖数学一试卷136分；2005年(数学一分册)覆盖数学一135分；2006年覆盖数学一146分.

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后2006～2008年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题(包含了往届的考题)，讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了详细解答；第四部分是考题分析：龚冬保教授每年都有一篇专文，深入剖析当年的试题，指出命题的动向.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

作者在网上为本书读者免费答疑，具体方法请登录西安交通大学出版社考研图书网：kaoyan. xjtupress. com

图书在版编目(CIP)数据

(2009版)数学考研典型题(数学三和数学四)/龚冬保主编. —10版. —西安：西安交通大学出版社，2008. 5

ISBN 978-7-5605-1969-2

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 龚…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题

Ⅳ. O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025298号

书　　名　(2009版)数学考研典型题(数学三和数学四)

主　　编　龚冬保

责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社

(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)

网　　址　http://www. xjtupress. com

电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)

(029)82668315　82669096(总编办)

传　　真　(029)82668280

印　　刷　陕西向阳印务有限公司

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 21.5　**字数** 665千字

版次印次　2008年5月第10版　2008年5月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5605-1969-2/O·258

定　　价　34. 40元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

订购热线：(029)82665248　(029)82665249

投稿热线：(029)82664954

读者信箱：jdlgy31@126. com

2009 版前言

——从 2008 年的几道试题谈起

2008 年考研刚结束，便听到几位考生反映，今年的数学考研试卷中有几题与我们所编辅导书中的题很类似，其中还有一模一样的题。待我们见到试卷后，发现数学二卷的(21)题、数学四卷(17)题所考的条件极值的题与本书中的例题完全相同(见下面例 4)。从解题方法来看，本书所强调的一些方法，更是很有效的，这里结合今年的考研试卷谈谈复习方法。

例 1. (数学一、二(15)题) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

例 2. (数学三、四(15)题) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

将这两道题放在一起，是告诉读者从解题方法来看，它们几乎是一样的题。

解 用等价无穷小，在例 1 中 $\sin x\sim x$，在例 2 中 $\ln\dfrac{\sin x}{x}\sim\dfrac{\sin x-x}{x}$；解这两题的第 1 步是用等价无穷小分别化二式为 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$ … ①和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ … ②；然后在②式中令 $x=\sin t$ 后，再用一次等价无穷小代换：$t\sim\sin t$得：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\sin t)-\sin t}{\sin^3 t}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-\sin(\sin t)}{t^3}$. 这个结果与①式只差一个负号，所以说这两个题几乎一样. 因此我们只要解例 1，即求上面的①式即可.

这里给出三种解法，说明本书强调的泰勒公式法在求极限中是非常有效的.

解法 1 用泰勒公式：$\sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)$.

于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x-o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

解法 2 由三角函数公式得：$\sin x-\sin(\sin x)=2\sin\dfrac{x-\sin x}{2}\cos\dfrac{x+\sin x}{2}\sim(x-\sin x)$. 再由泰勒公式：$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

解法 3 用洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x[1-\cos(\sin x)]}{3x^2}$，再用等价无穷小 $1-\cos(\sin x)\sim\dfrac{1}{2}\sin^2 x$得：原式$=\dfrac{1}{6}$.

两道表面看来不一样的题，被化成了一样，一道题至少有三种的不同解法，这就是本书所要介绍的.

例 3. (数学一(17)题) 求曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$ 上距 xOy 平面最远点与最近点.

例 4. (数学二(21)题；数学四(17)题) 在椭圆 $D:\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=4\end{cases}$上找出到原点距离平方取得最大、最小值的点，并求出最大值与最小值.

例 3、例 4 从方法上说它们的解法是一样的，例 4 与本书的一道例题(《数学考研典型题》(2008 版)数学一分册：例 7.44；数学二分册：例 6.36；数学三/四分册：例 6.37)完全相同，具体详细解法请看本书. 我们只解例 3，且用与书上不同的方法来做.

解 由题意，应求$|z|$的最值，故目标函数设为 z^2.

首先作拉格朗日的辅助函数

$L(x,y,z;\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

令 $L'_x=2\lambda x+\mu=0 \qquad \cdots\cdots ①$

$L'_y=2\lambda y+\mu=0 \qquad \cdots\cdots ②$

$L'_z=2(1-2\lambda)z+3\mu=0 \quad \cdots\cdots ③$

①－②得 $2\lambda(x-y)=0$，显然 $\lambda\neq0$（若 $\lambda=0$ 则 $\mu=0$，两个条件都不存在了），故 $x=y$. 即可代入条件 $x^2+y^2-2z^2=0$，故有 $x=y=\pm z$. 代入 $x+y+3z=5$ 得 $x=y=z$ 时对应点为 $M_1(1,1,1)$；$x=y=-z$ 时有 $M_2(-5,-5,5)$. 因此 M_1,M_2 分别是所求最小值和最大值点，最小和最大距离分别为 1、5.

读者还可试用本书中解例 4 的方法去解例 3.

这就是我们强调的重在学习解题的方法，防止硬套题型！

例 5.（数学一(21)题；数学二(22)题；数学三、四(20)题）n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a\end{bmatrix}$$

(1) 求证 $|A|=(n+1)a^n$.

(2) 方程组 $Ax=b$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，$b=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$ 有唯一解时，求 x.（原题只求 x_1）

(3) 当方程组有无穷多解时，求其通解.

这道今年四套试卷共用的题，若用我们在本书中介绍的方法，将十分简便.

解 (1) 记 $|A|=D_n$，按第一行展开可得递推公式：

$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$

而 $D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，$D_3=\begin{vmatrix}2a & 1 & 0\\ a^2 & 2a & 1\\ 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}=4a^3$.

由数学归纳法易证得 $D_n=(n+1)a^n$.

(2) $a\neq0$ 有唯一解，且 $x_1=\dfrac{|A_1|}{|A|}=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{|A_2|}{|A|}=-a^2\,\dfrac{D_{n-2}}{D_n}=-\dfrac{n-1}{n+1}$，以上是用克莱姆法则的求解公式得到的，当 $k\geqslant3$ 时，方程式均是齐次的：

$2ax_{k-1}+a^2x_{k-2}+x_k=0$. 得 $x_k=-a(2x_{k-1}+ax_{k-2})$.

又得到递推公式，如求 $x_3=-a(2x_2+ax_1)=-a\left(\dfrac{-2n+2}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{n-2}{n+1}a$，由归纳法得

$x_k=(-1)^{k-1}\dfrac{n-k+1}{n+1}a^{k-2}$，故这个唯一解是 $x=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{a},-(n-1),(n-2)a,\cdots,(-1)^{n-1}a^{n-2}\right)^{\mathrm T}$.

(3) 当 $a=0$ 时，方法组即是 $x_2=1$，$x_3=x_4=\cdots=x_n=0$，因此，通解是 $(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}+k(1,0,0,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$，（$k$ 是任意数）.

对于客观题，考生一定要清楚，考研题的选择题是比较难的，主要考概念，请看下列几题.

例 6.（数学二(1)题）$f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

例 7.（数学一(4)题；数学二(5)题）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A) $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

例 8.（数学一(5)题；数学二(7)题；数学三、四(5)题）设 A 是 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆. (B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

解　例 6：显然 $f'(0)=0$，再由罗尔定理，$f(x)$在$(0,1)$，$(1,2)$各有 $f'(x)=0$，故 $f'(x)$有三个零点. 选(D).

例 7：由$\{x_n\}$单调知$\{f(x_n)\}$单调有界，故收敛. 选(B).

例 8：由 $\boldsymbol{E}\pm\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\pm\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}^2\mp\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$. 故 $\boldsymbol{E}\pm\boldsymbol{A}$ 可逆. 选(C).

对于考研题中的填空题则是考基本运算能力. 由于不看计算过程，所以方法愈简练愈好.

例 9. (数学二(10)题；数学四(12)题) 微分方程$(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是________.

解　原方程化为$\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=e^{-x}dx$，即 $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=e^{-x}dx$

$\therefore\ y=Cx-xe^{-x}$.

不用套公式只要微分运算熟练，甚至可以心算出来.

例 10. (数学一(13)题) $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

解　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2$ 为特征向量，1 是非零特征值。

以上，我们选择了 10 道今年考研试卷中的考题，按照我们在书中介绍的方法去考试，考研题并不难！这也许正是本书受到历届考生的好评的原因吧.

自从 2005 年开始在网上为读者免费答疑以来，我们解答了读者不少的问题，读者也帮我们发现了书中的一些疏漏. 在这里我们要感谢广大读者的关注. 同时我们也要感谢西安交通大学出版社的有力支持，使得本书坚持每年修订并与读者见面.

编　者

2008 春，于西安交大

第1版前言

(2007年修订)

每当我们上了数学考研辅导课后,总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书.在考生朋友不断地鼓励和期盼下,我们终于写成了此书,希望它能成为众多考生的一个好朋友,陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录,读者可以了解到本书的特点:第一部分(第1章)是考卷分析.我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析.通过这些表格,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了.只要看看六张表格中的数字,就能知道每套考卷主要考些什么.比如在数学能力方面,计算题基本上要占80分左右;在认知水平上,要求“理解”水平的题在一半左右;在难易程度上,中档题占一半左右,等等.这样,您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了.进一步,如果您藉助我们设计的表格,按照自己的水平,去独立分析一两套试卷,那么就知道应当如何去准备这场考试了.因此,第1章是作复习前准备必不可少的.第二部分(第2章)是应试对策,讲的是复习迎考及身临考场的策略.在有一定数学水平的基础上,能不能考出理想成绩,就要看您的发挥了,如何能发挥好,应试策略是关键.而“策略”又是最容易被人们忽视的.“考试又不是打仗,讲什么策略”?岂不闻考场如战场,策略往往是成败的关键.我们写这一章也是个尝试,希望能引起考生对策略问题的重视.其实,对策是人们干什么事都应考虑的,所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗?有了好的复习迎考对策,在此基础上,订一个切实可行的计划,就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩.第三部分(第3~12章)是典型题的选讲与练习,这是本书的主要部分.我们选了1 500多道题,其中500道例题,采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示.要想考个好成绩,关键是提高解题能力.我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的.我们不主张单纯“猜题”,认为只要内容覆盖面全,主要方法都练到了,就能考好,比“猜题”更稳妥,而且有利于提高数学素养;第四部分(第13章)是模拟题,数学一和数学三各两套.在复习时,请先不要看模拟题,复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”.用三小时做一套题,看看自己究竟如何,最后找找差距.值得说明的是,本书中模拟题也有特色,它是以“从难、从严、从实战”出发设计的.每套试卷比正式考卷更难些,综合题、应用题多些,读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成,并能获得90分以上的平均成绩,那么,上了考场,正常发挥也一定能考90分以上.但您如果提前看过了题目,再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法,但总觉得编写仓促,书中可能会有不少的问题和漏洞,恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持,使这本书能以面世,感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

2007.4 于西安交大

(因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版,故本书第四部分取消.——出版者注)

目　录

绪论

应试对策

利用考研的机会，把高等数学、线性代数和概率统计认真复习与总结，为上研究生和今后的工作打下更坚实的数学基础，是十分有益的. 因此，我们提出应试对策的要点是**熟悉考试大纲，提高数学素质，在掌握基本理论和基本方法的基础上，注意灵活性的训练**.

0.1 全面复习 把书读薄

从历年试卷的内容分布上可以看出，**凡是考试大纲中提及的内容，都可能考到**，甚至某些不太重要的内容，都有可能在某一年的大题中出现. 如 1991 年的数学一中，曲率在一道 8 分题中出现；又如空间解析几何，在 1998 年数学一中，不但第三题是一道纯粹的解析几何题，而且还有两道题是与线性代数结合考了解析几何的内容. 可见，"猜题"的复习方法是靠不住的，而应当参照考试大纲，全面复习，不留遗漏，这是应试的基本对策.

当然，全面复习不等于死记硬背所有的知识，相反，是要抓住问题的实质和各内容、各方法间的本质联系，把要记的东西缩小到最小程度(什么是最小要因人而异，每个人要努力使自已去理解所学知识，多抓住些问题间的联系，少记一些死知识). 而且，不记则已，记住了就要牢靠. 事实证明，有些记忆是终生不忘的，对于将从事工程技术和科学研究的人来说，一些最重要、最基本的数学知识，应当做到终生不忘. 其它的知识又可以在记住基本知识基础上，运用它们的联系而得到. 这是我们说全面复习的意思. 比如在高等数学中，抓住微分与积分间的联系，利用微分做积分，只要把微分运算的基本公式，基本性质"倒背如流"，那么，积分运算和一般微分方程的求解，均可以不套公式，顺利地求解.

例 0.1 如我们熟悉$(\sqrt{1-x^2})'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，那么

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{1-x^2}+C(\text{作此积分题时，用微分 d}\sqrt{1-x^2}\text{ 极方便})$$

而 $$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=1.$$

例 0.2 (1) (2005，三、四) 方程 $xy'+y=0$ 满足 $y(1)=2$ 的解为__________.

(2) (2005，一、二) 方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为__________.

解 (1) 即$(xy)'=0$，故 $xy=c$，由 $y(1)=2$ 得，解为 $\underline{y=\dfrac{2}{x}}$.

(2) 即 $(x^2y)'=x^2\ln x, x^2y=\displaystyle\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$，由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得 $c=0$，故解为 $\underline{y=\dfrac{x}{9}(3\ln x-1)}$. 不必套公式，仅靠微积分运算熟悉便顺利得到了解答.

例 0.3 在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在(1,1)处的切线与 x 轴平行(1991 年数学一的一道考题).

分析 我们只要知道曲率是曲线弯曲的程度，因而是切线的倾角对弧长的变化率，而切线倾角是 $\arctan y'$，故

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}(\arctan y')}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

这样，抓住了曲率概念的本质及其与变化率概念的联系，就能牢牢记住这个公式.

又，曲线向上凹，究竟二阶导数是非负还是非正呢？我们又可用 $y=x^2$ 为模型，$y''=2>0$，故知我们所讨论的曲线 $y=y(x)$ 有 $y''\geqslant 0$，如图 2.1，过 P 点法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

令 $y=0$，即得 Q 的坐标 $(yy'+x,0)$，依题设得出方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

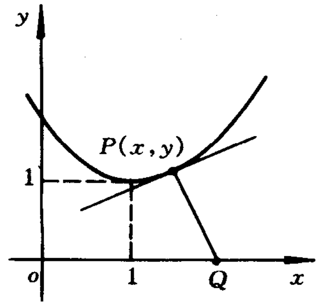

图 0.1

解　依上面分析得所求曲线 $y=y(x)$ 的方程为 $yy''=1+y'^2$ 这又是方程不显含 x 的可降阶的二阶微分方程. 于是

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}$$

方程化为 $\frac{y'\mathrm{d}y'}{1+y'^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$ 及初始条件 $y'|_{y=1}=0$

解得　$1+y'^2=y^2$. 加上初始条件　$y|_{x=1}=1$

有　$y'=\pm\sqrt{y^2-1}$

(由曲线上凹，知 $y(1)=1$ 是 $y=y(x)$ 的最小值，而当 $x<1$ 时，$y'<0$，当 $x>1$ 时，$y'>0$ 故 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$ 有意义，知道解的这些几何意义，更增强了我们解下去的信心).

解这个一阶微分方程得：

$$\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})=x-1$$

化简得　$y=\mathrm{ch}(x-1)$.

熟悉双曲函数及其反函数时，便知 $\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$ 正是反双曲余弦函数的两支.

从以上分析和解题过程，可以看出，本题主要用到曲率公式、曲线 $y=y(x)$ 的凹向与二阶导数符号间的关系以及 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程的降阶法. 所有这些，都不用死记硬背，反到记得牢靠. 把这些内容都复习到了，并抓住了一些本质联系，即使我们想不到会出这样的考题，个别公式"忘记"了，但解起来依然是流畅的.

例 0.4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

解　由达朗伯判别法(即检比法). 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\frac{n}{n+1}\frac{3^n+(-2)^n}{|x|^n}=\frac{|x|}{3},\text{知}$$

收敛区间为 $(-3,3)$.

以 $x=3$ 代入得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$，其通项与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小，发散.

以 $x=-3$ 代入得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$

如果看到这是交错级数，便直接用莱卜尼兹判别法而说它收敛是没有根据的. 因为 $\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 并不单调减. 但我们直观看，它是收敛的. 因此，使我们想到惯用的方法：

$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}=1-\frac{(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$. 从而，当 $x=-3$ 时的级数，可化为两个收敛级数之和：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$.

故当 $x=-3$ 时级数收敛，或说此幂级数的收敛域是 $[-3,3)$.

这是 2000 年数学一的一道题，说明考研题比平时教学要求更高、更灵活些，是完全正常的. 因此，**全面复习，必须以研究生入学考试大纲为依据**. 这个题求收敛区间如用柯西判别法(即检根法)更简便，讨论 $x=3$ 这个端点，所

用方法和教学大纲要求是一致的；而讨论 $x=-3$ 的收敛性时，所用的方法则是平时数学不太注意训练的特殊的综合运用所学知识和技巧.

以上我们所展示的分析问题和解决问题的方法，希望读者在读完每个例题后，能立刻合上书，仿此方法，把我们讲的例题当成习题，自已动手再做一遍，然后，在复习中，尽努力去抓住各知识点的实质和联系. 经过一段时间，你就会觉得数学内容并不多，**真的把书读薄了，便达到了复习的目的.**

全面复习，抓住各内容的实质及它们间的本质联系把书读薄，是复课应试的基本对策.

0.2 突出重点 精益求精

在考试大纲的要求中，**对内容有理解、了解两个层次的要求；对方法有掌握、会(能)两个层次的要求.** 一般说来，**要求理解的内容，要求掌握的方法，是考试的重点.** 在历年考试中，这方面考题出现的概率较大；在同一份试卷中，这方面试题所占分数也较多些. "猜题" 的人们，往往主要在这些方面下功夫. 有时也确能猜出几分，但是，遇到像1998和2000年、2001年的试题，综合题多些，不少题既有主要内容又有次要内容. 这时，"猜题"便行不通了. 我们讲的突出重点，不仅要在主要内容和方法上多下功夫，更重要的是**要去寻找重点内容与次要内容间的联系，以主带次，用重点内容提挈整个内容. 主要内容理解透了，主要方法掌握了，其它的内容和方法便迎刃而解.** 即抓住主要内容不是放弃次要内容而孤立主要内容，而是从分析各内容的联系，从比较中自然地突出主要内容. 比如微分中值定理，有罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理及泰勒中值公式. 由于罗尔定理是拉格朗日定理的特殊情况，而柯西定理和泰勒公式又是拉格朗日定理的推广. 比较这些关系，便自然得到拉格朗日定理是核心，把这个定理搞深搞透，并从联系中掌握好其它几个定理. 而在考试大纲中，罗尔定理与拉格朗日定理都是要求理解的内容，都是考试重点，从理论上说拉氏定理更重要，从考研中解题技巧方面，罗尔定理用的更多，值得注意. 对于一些方法与技巧，也是这样，比如无穷小分析的方法，在解决微积分问题中就是一种基本的、重要的方法，让我们以 1998 年一道考题来看这一方法的重要性.

例 0.5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

分析 首先，经无穷小分析知，这是"无穷个无穷小的和"，因此，解决它的基本方法是用定积分定义. 进一步，这个和式的第 k 项为 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$ 与 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$ 为等价无穷小量($n\to\infty$). 因此，如用 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$ 去代换 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$，它们之差是 $\dfrac{1}{n}$ 的高阶无穷小量，因此，n 项的"差"之和还是无穷小量，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 我们可以肯定，所求极限为 $\dfrac{2}{\pi}$，余下的只要严格表述出来就行了.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\Big)\sin\frac{k\pi}{n}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

及 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{k}}{n(n+\frac{1}{k})}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}=0.$$

从而 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{k}}=\dfrac{2}{\pi}$

这里主要运用了无穷小分析的方法，其中想到定积分定义，也是经过无穷小分析而得到的.类似这种考点与方法的题经常出现，如2002数学二就有这样的题.

主要点是与次要点相比较而得到的，在复习迎考中，每个人都能动脑筋，去比较各内容、各方法之间的地位，从而找出主要内容和方法，每个人得出的结果可能会有差别，找到的要点可以不一样，但只要这样做，定会比孤立的，一个个地生记硬套为好.在做题时更要注意怎样运用主要方法去带动次要方法，去分析和解出这些题目.

例 0.6　设 $f(x)\in C_{[a,b]}$ 在 (a,b) 内 $f'(x)>0$. 证明存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 $y=f(\xi)$ 所围成图形面积 S_1 是 $y=f(x)$，$x=b$ 及 $y=f(\xi)$ 所围图形面积 S_2 的三倍.

分析　如图 0.2 所示

$$S_1=\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t;\quad S_2=\int_{\xi}^{b}[f(t)-f(\xi)]\mathrm{d}t$$

因此，要证

$$\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_{\xi}^{b}[f(t)-f(\xi)]\mathrm{d}t=0$$

自然地想到作辅助函数(将上式中 ξ 均换为 x)

$$\varphi(x)=\int_a^{x}[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^{b}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t\ (x\in[a,b]).$$

用介值定理证明 ξ 的存在，而用导数证明 ξ 的唯一性.

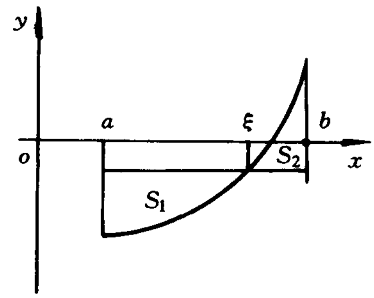

图 0.2

解　作 $\varphi(x)=\int_a^{x}[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^{b}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$.

则　$\varphi(a)=-3\int_a^{b}[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0$;　$\varphi(b)=\int_a^{b}[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t>0$.

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由介值定理，知存在 ξ，使 $\varphi(\xi)=0$. 又 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可导，且

$$\varphi'(x)=(4x-a-3b)f'(x)$$

令 $\varphi'(x)=0$ 知，$x=\dfrac{a+3b}{4}$ 是 $\varphi(x)$ 的极小点，即 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\dfrac{a+3b}{4}]$ 上单调减；而在 $[\dfrac{a+3b}{4},b]$ 上单调增，故 $\xi\in(\dfrac{a+3b}{4},b)$ 且是唯一的.

可见，介值定理总是与用导数研究函数的性质的方法一起，对于解决像本题一类的问题是很重要的方法，这个题是1988年数学一的试题，类似的题不断出现，而1998年数学一的第九题，与本题所用的主要方法一样，不过是更难些而已.

在用中值定理解答一些问题时，作辅助函数的方法是重要的.除了从几何上研究如何作辅助函数之外，用分析与代数结合的方法也是很有效的.

例 0.7　(1999,二) 设 f 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明 $\exists\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=3$.

解 1　**分析**　如果令 $P(x)=Ax^3+Bx^2+f(0)$，则 $P(0)=f(0)$，$P'(0)=0$. 只要使 $P(-1)=0=-A+B+f(0)$ 及 $P(1)=1=A+B+f(0)$. 那么多项式函数 $P(x)$ 与 $f(x)$ 在 $-1,0,1$ 三点的值同，且 $P'(0)=f'(0)=0$. 这时，定出 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{2}-f(0)$. 而作 $\varphi(x)=f(x)-P(x)$. 则可对 $\varphi(x)$ 及其导函数施用罗尔定理来证明此题.

作 $\varphi(x)=f(x)-[\dfrac{1}{2}x^3+(\dfrac{1}{2}-f(0))x^2+f(0)]$. 则 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(1)=0$，在 $[-1,0]$，$[0,1]$ 上对 $\varphi(x)$ 用罗尔定理知，$\exists\xi_1\in(-1,0)$，$\xi_2\in(0,1)$ 使 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$. 再加上 $\varphi'(0)=0$，在 $[\xi_1,0]$ 和 $[0,\xi_2]$ 上分别对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理知，$\exists\eta_1\in(\xi_1,0)$，$\eta_2\in(0,\xi_2)$ 使

$$\varphi''(\eta_1)=\varphi''(\eta_2)=0.$$

最后，在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对 $\varphi''(x)$ 用罗尔定理知，$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)<(-1,1)$ 使 $\varphi'''(\xi)=0$，而 $\varphi'''(x)=f'''(x)-3$. 故

$f'''(\xi)=3$ 成立.

解 2　(本题的常规解法).

分析　用 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 在 $x=0$ 点的泰勒公式得

$$f(-1)=0=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\ \xi_1\in(-1,0)$$

$$f(1)=1=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2).\ \xi_2\in(0,1)$$

故　$\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=3$

由连续函数介值定理,知 $\exists\,\xi\in[\xi_1,\xi_3]$. 使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=3$$

比较两种解法,解 1 巧妙,但不易想到,需要有深厚的分析与代数基础,且解 1 的条件可减弱为:$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上连续,在$(-1,1)$ 上三阶可导即可,解 2 中最后一步也可以不用 $f'''(x)$ 连续,这时要用"达布中值定理".

学会解 1 的方法,可以轻松地解许多有关中值定理的难题.

例 0.8　(2002,二) 设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

证 1　(直接用中值定理)

先证左边不等式,由拉氏中值定理的 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}(\xi\in(a,b))$

而
$$\frac{2a\xi}{a^2+b^2}<\frac{2ab}{a^2+b^2}<1$$

即
$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\text{ 成立.}$$

再证右边不等式. 即欲证

$$\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{\ln b-\ln a}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}<1$$

记 $\frac{b}{a}=A>1$, 在$[1,A]$ 上,令 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. 用柯西中值定理

$$\frac{f(A)-f(1)}{g(A)-g(1)}=\frac{\frac{1}{\xi}}{(\frac{1}{\sqrt{\xi}}+\frac{1}{\xi\sqrt{\xi}})}=\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{\xi^2+(\sqrt{\xi})^2}<1(1<\xi<A).$$

即所要证明不等式成立.

证 2　(常规的用函数单调性证明).

即在两边不等式中令 a(或 b) 是常量. b(或 a) 是变量即如证右边不等式.

记　$f(b)=\ln b-\ln a-\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$　显然 $f(a)=0$.

$$f'(b)=\frac{1}{b}-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}})=-\frac{1}{2b\sqrt{ab}}(b-2\sqrt{ab}+a)=-\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2b\sqrt{ab}}<0$$

故 $f(b)$ 单调减,从而 $f(b)<0$. 即得所需证明的不等式.

同样可证左边的不等式,留给读者自行证明.

证 3　(改进的常规法).

即令 $\frac{b}{a}=x$. 那么右边不等式变成要证

$$\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<0\ (x>1).$$

令 $\quad \varphi(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 则 $\varphi(1)=0$.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0.$$

故 $\varphi(x)$ 单调减,从而 $\varphi(x)<0\ (x>1)$ 即是所要证明的不等式. 请读者用同样方法证明左边不等式.

用比较法,去抓住重点,突出重点,以主带次,是复习迎考的关键对策.

0.3 基本训练 反复进行

近年来每一份考研试卷中,基本题都占总分的 70% 左右,因此复习中要注意,把基本功练熟练透,但我们不主张"题海"战术,而提倡精练,即反复做一些典型的题,做到一题多解、一题多变. 要训练抽象思维能力,对一些基本定理的证明,基本公式的推导,以及一些基本练习题,要作到不用书写,就像棋手下"盲棋"一样,只需用脑子默想,即能得出正确答案. 如果能在 40 分钟内完成 14 道客观题,其中有些是不用动笔,一眼就能看出答案的题,这样才叫训练有素."熟能生巧",基本功扎实的人,遇到难题办法也多,不易被难倒. 相反,做练习时,眼高手低,总找难题做,结果,上了考场,遇到与自己曾经作过的类似的题目都有可能不会;不少考生把会做的题算错了,归结为粗心大意,确实,人会有粗心的,但基本功扎实的人,出了错立即会发现,很少会"粗心"地出错.

例 0.9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 1 用有理化分子的初等方法.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2]}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2][\sqrt{1-x^2}+1]}=-\frac{1}{4}$$

解 2 用洛必达法则.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}$$

基本功熟悉的人知道 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 不是无穷小量,在第二次用洛必达法则时,分母中两因式 $\sqrt{1+x}\ \sqrt{1-x}\to 1$,不必参与求导数.

解 3 用泰勒公式加无穷小分析. 在要求极限的式子中,分母是 x 的二阶无穷小,故只要将 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 展成 x 的泰勒多项式至 x^2 项:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+o(x^2)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)(-x)^2+o(x^2)$$

因此, $\quad \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)$. 从而得到解 1、2 同样的结果.

这是 1998 年数学一的第一道填空题(1999 年第一道填空题与此题类似),举这个例子的意思是说明"精练"的含义,这是一道容易的题,但我们有三种解法. 当然还有其它解法,如求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ 时,分子减 1 和加 1,分两项用等价无穷小替换可得此极限为 -1,如果把这些方法都加上去,对于本题还可以得出一些解法,读者可以试试,这样一题多解,作一道题,比作三道题强. 进一步,由比较,可见用泰勒公式加上无穷小分析,这道题是可以这样简单地获得答案的.(只要默想,不用笔算)以下描述想的过程:

"$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\cdots$

$\underline{+\,(1-x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\cdots}$

$\cdots-\dfrac{1}{4}x^2+\cdots\qquad$ <u>答案为 $-\dfrac{1}{4}$.</u>"

就是说，平常练一道题，反复做，用不同方法做．并由比较而知，这一类型的题怎样做最方便，怎样做可以不用书写，默想出答案．到了这一步，做一道题胜似十道题了！不仅如此，这道题还可以变，我们可以举三种变化的例子，请读者自己用多种方法作：

变化 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}-2}{x^2}=\alpha(\alpha-1)$．（$\alpha$ 是任意实数）

变化 2　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\alpha x)^{\beta}+(1-\beta x)^{\alpha}-2}{x^2}=\dfrac{\alpha\beta}{2}[\alpha^2(\beta-1)+\beta^2(\alpha-1)]$．（$\alpha,\beta$ 是任意实数）．

变化 3　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\dfrac{7}{12}$．

这里，变化 3 已从二项式函数变为指数和三角函数了，除了初等方法不好用之外，其它解法也差不多，用泰勒公式同样可以默想出答案．变化 3 就是从泰勒展开式而得到的．读者还可以试用其它初等函数的展式，自行编制一些极限题．然后试用无穷小分析、洛必达法则等多种方法去做它．这样练习，有关函数极限的题，便可练到炉火纯青的程度，这方面便不会有难倒你的题目了（读者试试，2000 年数学二的第一题用泰勒公式能否直接写答案）．

以上，我们仅举了一道例题，从一道简单的题，可以变化出各种“难题”．而且这样的训练是每个用心一点的读者都可以自己作到的，极限的题可以这样，微积分的题也可以这样．

例 0.10　确定 λ 和函数 $u(x,y)$，使在 $x>0$ 的右半平面内，$\boldsymbol{A}=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 是 $u(x,y)$ 的梯度．

解 1　由条件可知，在 $x>0$ 时，恒有：

$$\frac{\partial[2xy(x^4+y^2)^{\lambda}]}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}]$$

解得 $\lambda=-1$．　再由　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}$，　故　$u=-x^2\displaystyle\int\frac{dy}{x^4+y^2}=-\arctan\frac{y}{x^2}+f(x)$

再由　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^4}}\cdot\dfrac{2y}{x^3}+f'(x)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}+f'(x)$．

知　$f'(x)=0$．　从而得　$u=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C$．

求出 $\lambda=-1$ 后，求原函数 $u(x,y)$．也可用线积分法．但这个题，如果基本功熟练，可用凑全微分法．

解 2　依题意，即

$$\begin{aligned}du(x,y)&=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}dx-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}dy\\&=(x^4+y^2)^{\lambda}[ydx^2-x^2dy]=x^{4\lambda+4}(1+\frac{y^2}{x^4})^{\lambda}[\frac{ydx^2-x^2dy}{x^4}]\\&=x^{4(1+\lambda)}(1+\frac{y^2}{x^4})^{\lambda}d(\frac{-y}{x^2})\quad(\text{由此得 }\lambda=-1)\\&=\frac{-d\dfrac{y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x^2})^2}=-d\left(\arctan\frac{y}{x^2}\right)\end{aligned}$$

故　$\lambda=-1$，　$u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+c$　．

本题的变化也是多样的，比如最简单的一种是将右半平面换成上半平面 $y>0$，答案可以看出（为什么）是：

$$u(x,y)=\arctan\frac{x^2}{y}+c.$$

由于这道题用“凑微分”方法做最方便，那么，可以用做全微分的办法来引出类似的题，如由

$$d\left(\arctan\frac{x+y}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+2xy+2y^2}$$

即可以反过来命题：在直线 $x+y=0$ 下方（即 $x+y<0$）有

$$du(x,y)=y(x^2+2xu+2y^2)^{\lambda}dx-x(x^2+2xy+2y^2)^{\lambda}dy.$$

求 λ 和 $u(x,y)$，等等．读者试用类似解法 1 和解法 2 两种方法解出这个题后，自己再出几道这样类似的题．还可以把

它和线积分联系起来.比如确定出 λ 后并求线积分

$$\int_L y(x^2+2xy+2y^2)^\lambda \mathrm{d}x - x(x^2+2xy+2y^2)^\lambda \mathrm{d}y$$

其中 L 是沿双曲线:$y^2-x^2=1$ 的上半支由点(0,1)至$(-1,\sqrt{2})$的弧段.

例 0.11 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$满秩,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ (　　).

(A) 交于一点　　(B) 重合　　(C) 平行不重合　　(D) 异面

解 1 记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$ 为三个行向量$(i=1,2,3)$.则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=0$,得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_1)\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=0$.由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $k_1=k_2=0$).表示二直线不平行.而由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$.$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是已知二直线上的各一点的联成的向量,与二直线的方向向量共面.说明二直线共面,故此二直线相交选(A).

解 2 像解 1 中的关系可用矩阵和行列式作,如由

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

而

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0$$

知二直线共面但不平行,故相交选(A).

解 3 (用纯粹空间解析几何方法).视 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为空间三个点的向径$(i=1,2,3)$.则由矩阵满秩知三点不在同一直线上.故此三点决定一平面,而二直线分别过 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的终点,而与另两点联线平行.故此二直线必相交.

解 4 (引入参数,用方程组理论解),令

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}=t;\quad \frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}=-\tau.$$

于是问题化为关于 t,τ 为未知数的方程组

$$\begin{cases}(a_1-a_2)t+(a_2-a_3)\tau+a_3-a_1=0\\(b_1-b_2)t+(b_2-b_3)\tau+b_3-b_1=0\\(c_1-c_2)t+(c_2-c_3)\tau+c_3-c_1=0\end{cases}$$

是否有解,解是否唯一的问题,而这个方程组有唯一解的充要条件是:$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,与解 1、解 2 的结论一样.

像这样一题多解,在解题中多联系基本知识,多总结归纳一些解题方法,就会使一道简单的题的内涵显得极为丰富,一道题胜过许多的题.如解 1 用到:若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\boldsymbol{\alpha}_k$ 亦线性无关;解 2 用到行列式的性质,也可以说矩阵经有限次初等变换不改变矩阵的秩,及行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量线性相关;

这是 1998 年数学一的一道选择题,经过我们解 4 的变形,问题化得与 1997 年数学一的一道选择题几乎一样.

例 0.12 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1\quad a_2\quad a_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1\quad b_2\quad b_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1\quad c_2\quad c_3]^{\mathrm{T}}$ 则三直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$$

交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

先请读者看看本题中的方程组与上一例解 4 中我们所得的方程组,它们是一样的,而从方程组角度上说,本题