高职高专高等数学系列教材(少学时)

gaozhi jiaoyu

新编工科数学基础

(工科类)

主编 冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高职高专高等数学系列教材(少学时)

新编工科数学基础

(工科类)

主　编　冯翠莲

编著者　冯翠莲　赵连盛

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编工科数学基础.工科类/冯翠莲主编.—北京：北京大学出版社，2007.2
(高职高专高等数学系列教材:少学时)
ISBN 978-7-301-11254-0

Ⅰ.新…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131881 号

书　　名：新编工科数学基础(工科类)
著作责任者：冯翠莲　主编
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-11254-0/O·0706
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16 开本　15 印张　320 千字
2007 年 2 月第 1 版　　2007 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：25.00 元

内 容 简 介

本书是高职高专院校工科类各专业少学时的大学数学基础课教材，内容包括：函数与极限，微分、积分及其应用，微分方程，无穷级数，向量代数，行列式，矩阵与线性方程组等. 本书本着重基本知识、重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点而编写. 本书每节有“本节学习目标”，每节后配有与教材内容密切相关的 A 组习题和 B 组习题，每章后配有总习题. 书后附有全书习题的答案与解法提示.

本书在内容的叙述上由浅入深、通俗易懂，概念清晰，例题丰富又贴近实际，注意归纳数学的辩证思维、解题方法与解题程序，便于自学.

本书也可作为参加工科类专升本考试学生的教材或教学参考用书.

前 言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分,近几年呈现出前所未有的发展势头.为适应高职高专教育改革的要求,坚持以就业为导向,以能力为本位,面向市场、面向社会,为经济结构调整和科技进步服务的办学宗旨,我们本着重基本知识、重素质、重能力、重应用、开拓思维求创新的总体思路,根据高职高专教育数学教学的特点,编写了高职高专高等数学系列教材(少学时)——《新编工科数学基础》和《新编经济数学基础》.前者供高职高专院校工科类各专业学生使用,后者供经济类、文科类各专业学生使用.

本教材优化整合了工科数学基础课程的基本内容,注意与后续课程相衔接,与生产、工程、信息、管理等第一线的实际需求相适应,力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一.

本教材的主要特点:

1. 突出高职高专少学时的特色.根据高职高专工科类各专业对数学的基本要求,根据数学的认知规律,将高等数学、线性代数的基本内容有机地结合在一起,组织和编排全书内容.在不失数学内容学科特点的情况下,采取模块化的思路,便于教师根据教学时数和专业需求选择教学内容.

2. 贯彻"理解概念、强化应用"的教学原则.以现实、生动的例题引入基本概念,以简明的语言并尽量配合几何图形、数表阐述基本知识、基本理论,注重基本方法和基本技能的训练,并给出求解问题的解题程序.同时注重数学概念、数学方法的实用价值,注意培养学生用定量与定性相结合的方法,综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力和创新能力.

3. 内容精简实用,条理清楚,叙述通俗易懂、深入浅出,便于自学.

4. 每节有"本节学习目标",每节配有A组和B组习题,每章配有总习题.书后附有全书习题答案与解法提示.

参加本书编写工作的还有薛桂兰、李媛媛、徐军京、刘志芳、胡庆华.

本系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社相关领导的大力支持和帮助.在本书的编写过程中,同行专家参加了讨论并提出宝贵意见,在此一并表示感谢.

限于编者水平,不足之处恳请读者批评指正.

编 者

2006年10月

目 录

第一章

函数与极限

本章先复习函数概念，然后讨论极限概念及其运算，最后介绍连续性概念.

§1.1 函　数

【本节学习目标】 理解函数概念；会将初等函数分解成由基本初等函数四则运算与复合的形式.

一、函数的概念

1. 函数的定义

在我们的周围，变化无处不在.我们所看到的事物都在变化.这些变化着的事物中的许多现象可以用数学有效地来描述.其中，有一些现象中存在着两个变化的量，简称变量.这两个变化着的量不是彼此孤立的，而是相互联系、相互制约的：当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有唯一确定的值与之对应.变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的**非空数集**.若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的**对应法则** f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记做

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集.由此，若数值 $x_0\in D$，则称该函数在 x_0 **有定义**，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**，记做 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.若 $x_0\overline{\in}D$，则称该函数在点 x_0 **没有定义**.

上述定义，简言之，**函数是从自变量的输入值产生出输出值的一种法则或过程.**

例 1 在初始速度为零的自由落体运动中，下落距离 s 与时间 t 是两个变量，它们之间的函数关系是

$$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0, T],$$

其中 g 是重力加速度，T 是物体落地时刻（初始时刻为 0）. 则当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任取一值时，按上式确定的规律，s 就有一个确定的值与之对应.

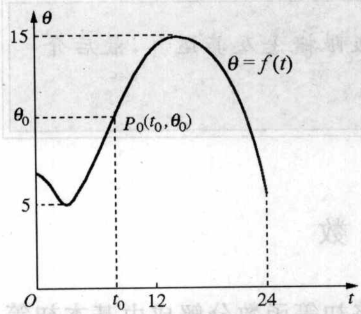

图 1-1

例 2 在气象观测站，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-1 所示的曲线. 曲线上某一点 $P_0(t_0, \theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0. 观察这条曲线，可以知道在这一天内，时间 t 从 0 点到 24 点气温 θ 的变化情形. 即当 t 在闭区间 $[0, 24]$（单位：小时）上任取一值时，按所给曲线，θ（单位：℃）就有一个确定的值与之对应. 这里是用一条曲线确定 θ 是 t 的函数 $\theta = f(t)$.

2. 反函数

在一个函数关系中的两个变量 x 与 y，它们的地位是相对的. 可以把变量 y 看做是变量 x 的函数，也可把变量 x 看做是 y 的函数. 这样，由函数的定义就引出**反函数的定义**. 一般可如下叙述：

已知函数

$$y = f(x), \quad x \in D, \ y \in Z.$$

若对每一个 $y \in Z$，D 中只有一个 x 值，使得

$$f(x) = y$$

成立，这就以 Z 为定义域确定了一个函数，这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记做

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Z.$$

按习惯记法，把 x 做自变量，y 做因变量，函数 $y = f(x)$ 的反函数记做

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in Z.$$

若函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$，则 $y = f(x)$ 也是函数 $y = f^{-1}(x)$ 的反函数，或者说它们互为反函数，且

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

从几何图形看，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 3 若物体以匀速 $v(>0)$ 做直线运动，则运动的路程 s 与时间 t 的函数关系为

$$s = f(t) = vt, \quad t \geqslant 0.$$

上述函数的反函数是

$$t = f^{-1}(s) = \frac{s}{v}, \quad s \geqslant 0.$$

3. 复合函数

对函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$，x 是自变量，y 是 x 的函数. 为了确定 y 值，对给定的 x 值，应先计算 $\sin x$. 若令 $u=\sin x$，再由已求得的 u 值计算 e^u，便得到 y 值：$y=\mathrm{e}^u$.

这里，可把 $y=\mathrm{e}^u$ 理解成 y 是 u 的函数，把 $u=\sin x$ 理解成 u 是 x 的函数，那么函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 就是把函数 $u=\sin x$ 代入函数 $y=\mathrm{e}^u$ 中而得到的. 按这种理解，函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 就是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\sin x$ 这两个函数复合在一起构成的，称为**复合函数**. 即：

已知两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$. 若将函数 $y=f(u)$ 中的 u 用函数 $u=\varphi(x)$ 代入，得到函数 $y=f(\varphi(x))$，则称 $y=f(\varphi(x))$ 是**由函数** $y=f(u)$ **和** $u=\varphi(x)$ **复合而成的复合函数**. 其中 x 是**自变量**，u 是**中间变量**，$\varphi(x)$ 是**内层函数**，$f(u)$ 是**外层函数**.

例 4 某金属球的体积 V 是其半径 r 的函数

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{1}$$

由于热胀冷缩，球的半径 r 又随着温度 t 变化. 已知 r 与 t 的函数关系是

$$r = r_0(1+\alpha t), \tag{2}$$

其中常数 α 称为线膨胀系数，r_0 是 0 ℃ 时金属球的半径.

将(2)式代入(1)式中，便可复合成一个复合函数

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1+\alpha t)^3.$$

该式是金属球的体积 V 通过中间变量(半径)r 而成为自变量(温度)t 的函数.

4. 分段函数

若两个变量之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达，即对一个函数，在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达，则称其为**分段函数**.

下列函数均为分段函数.

例 5 绝对值函数(图 1-2)

$$y=|x|=\begin{cases} -x, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

例 6 符号函数(图 1-3)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

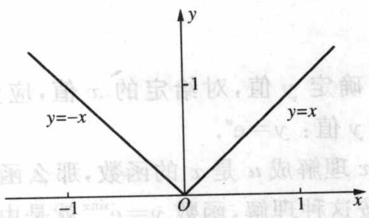

图　1-2

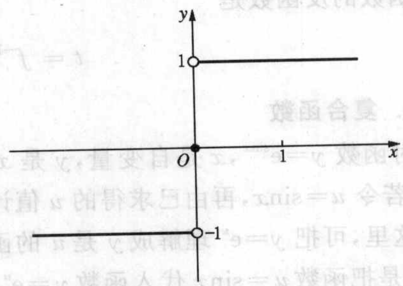

图　1-3

例 7　旅客乘飞机可免费携带不超过 20 kg 的物品；超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每千克交费 a 元；超过 50 kg 部分每千克交费 b 元，最多只能携带 80 kg. 试确定运费与乘客携带物品重量的函数关系.

解　设物品的重量为 x kg，应交运费为 y 元. 依题意：

当物品重量不超过 20 kg 时，应有 $y=0$；

当物品重量超过 20 kg 而不超过 50 kg 时，有 $y=a(x-20)$；

当物品重量超过 50 kg 而不超过 80 kg 时，有 $y=a(50-20)+b(x-50)$.

于是所求的函数关系是如下分段函数

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50,\\ a(50-20)+b(x-50), & 50<x\leqslant 80.\end{cases}$$

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列五类函数称为**基本初等函数**：

（1）幂函数 $y=x^{\mu}$，定义域随 μ 而异.

（2）指数函数（图 1-4）

$$y=a^x \quad (a>0,a\neq 1),\ x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(0,+\infty).$$

（3）对数函数（图 1-5）

$$y=\log_a x \quad (a>0,a\neq 1),\ x\in(0,+\infty),\ y\in(-\infty,+\infty).$$

（4）三角函数：

正弦函数（图 1-6）

$$y=\sin x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in[-1,1].$$

余弦函数（图 1-7）

$$y=\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in[-1,1].$$

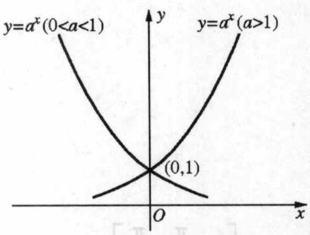

图 1-4 指数函数

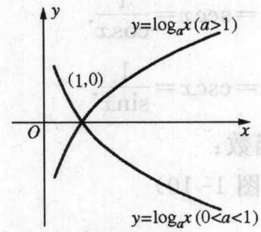

图 1-5 对数函数

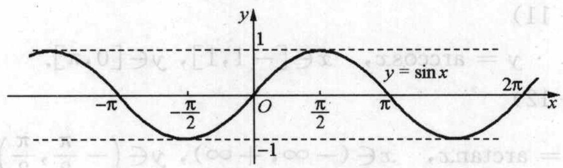

图 1-6 正弦函数

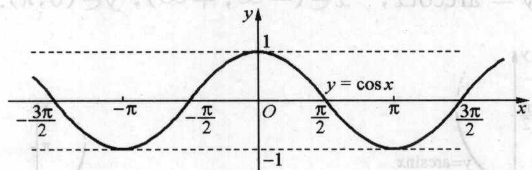

图 1-7 余弦函数

正切函数(图 1-8)

$$y=\tan x,\quad x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z},\ y\in(-\infty,+\infty).$$

余切函数(图 1-9)

$$y=\cot x,\quad x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z},\ y\in(-\infty,+\infty).$$

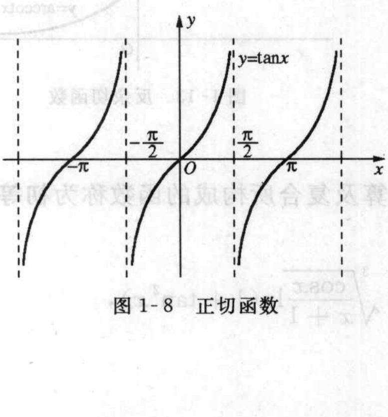

图 1-8 正切函数

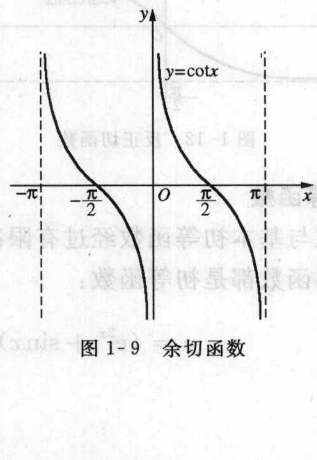

图 1-9 余切函数

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(5) 反三角函数:

反正弦函数(图 1-10)

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

反余弦函数(图 1-11)

$$y=\arccos x,\quad x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi].$$

反正切函数(图 1-12)

$$y=\arctan x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

反余切函数(图 1-13)

$$y=\operatorname{arccot} x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(0,\pi).$$

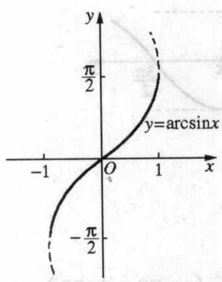

图 1-10 反正弦函数

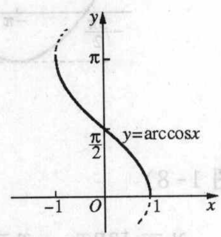

图 1-11 反余弦函数

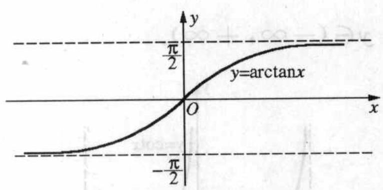

图 1-12 反正切函数

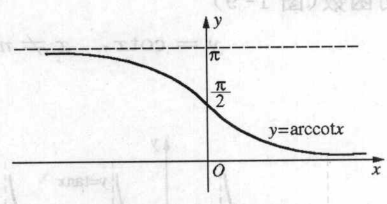

图 1-13 反余切函数

2. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算及复合所构成的函数称为**初等函数**.

如下列函数都是初等函数:

$$y=(\mathrm{e}^{2x}+\sin x)^2,\quad y=\sqrt[3]{\frac{\cos x}{x+1}}\ln(1+\tan^2 x),$$

$$y = A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t \quad (A,\sigma,\omega \text{是常数},\sigma<0,t>0,\text{图 1-14}).$$

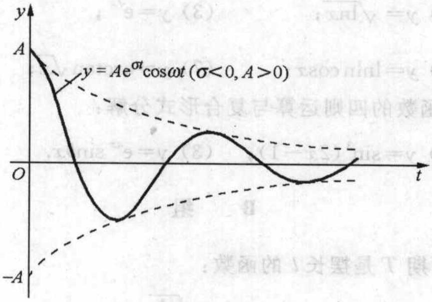

图 1-14

以后章节中,为了研究函数的需要,经常要将一个初等函数按基本初等函数的四则运算与复合形式分解.

例 8 将下列函数按基本初等函数的四则运算与复合形式分解:

(1) $y=\left(\mathrm{e}^{x}\cos\dfrac{1}{x}\right)^{3}$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$.

解 (1) 令 $u=\mathrm{e}^{x}\cos\dfrac{1}{x}$,则 $y=u^{3}$;令 $v=\dfrac{1}{x}$,则 $u=\mathrm{e}^{x}\cos v$. 于是 $y=\left(\mathrm{e}^{x}\cos\dfrac{1}{x}\right)^{3}$ 由下列各式构成:

$$y=u^{3},\quad u=\mathrm{e}^{x}\cos v,\quad v=\frac{1}{x}.$$

(2) 令 $u=x+\sqrt{1+x^{2}}$,则 $y=\ln u$;令 $v=1+x^{2}$,则 $u=x+\sqrt{v}$. 于是 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$ 由下列各式构成:

$$y=\ln u,\quad u=x+\sqrt{v},\quad v=1+x^{2}.$$

习 题 1.1

A 组

1. 已知 $f(x)=\dfrac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$,求 $f(0),f(1),f(-1),f(-x),f(x-1)$.

2. 将函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 用分段函数形式表示,并确定其定义域.

3. 设 $g(t)=\begin{cases}|\sin t|, & |t|<\pi/3,\\ 0, & |t|\geqslant\pi/3,\end{cases}$ 求 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right),g\left(\dfrac{\pi}{4}\right),g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),g\left(\dfrac{\pi}{3}\right),g(\pi)$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=5x-1$; (2) $y=1+\ln(x+2)$; (3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

5. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x},g(x)=\ln x$,求 $f(f(x)),f(g(x)),g(f(x)),g(g(x))$.

6. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成？

(1) $y=\sin\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\sqrt{\ln x}$； (3) $y=e^{\sqrt{x}}$； (4) $y=\cos x^2$；

(5) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$； (6) $y=\ln\ln\cos x$； (7) $y=\arctan\sqrt{x}$； (8) $y=\ln\arcsin e^x$.

7. 将下列函数按基本初等函数的四则运算与复合形式分解：

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$； (2) $y=\sin^3(2x-1)$； (3) $y=e^{ax}\sin bx$.

B 组

1. 老式台钟，单摆摆动的周期 T 是摆长 l 的函数：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 g 是重力加速度，而摆长 l 又随着温度 t 变化. l 与 t 的函数关系是 $l=l_0(1+\alpha t)$，其中常数 α 是线膨胀系数，l_0 是 0℃时摆长. 试写出单摆摆动的周期 T 与温度 t 的函数关系.

2. 火车在启动后 10 min 内作匀加速运动，其加速度为 120 m/min^2；以后 2 h 内作匀速运动；最后再作匀减速运动，10 min 后停下. 求在这 2 h 20 min 之内的任一时刻 t，火车走过的路程 s.

§1.2 极 限

【本节学习目标】 理解数列极限、函数极限以及无穷小与无穷大的概念.

一、数列的极限

先看一个有关数列极限的实际例子.

我国战国时期哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."这就是说，一根长为一尺的棒头，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

把每天截后剩下的棒的长度(单位：尺)写出来：第 1 天剩下 $\frac{1}{2}$；第 2 天剩下 $\frac{1}{2^2}$；第 3 天剩下 $\frac{1}{2^3}$，…，第 n 天剩下 $\frac{1}{2^n}$，…. 这样就得到一列数

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

这一列数就称为数列. 一般，数列如下定义：

按正整数 1,2,3,…顺序排列的无穷多个数，称为**数列**. 数列通常记做

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots,$$

或简记做 $\{y_n\}$. 数列的每个数称为数列的**项**，依次称为第 1 项，第 2 项，…，第 n 项，…. 通常第 n 项 y_n 称为数列的**通项**或**一般项**.