普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

微积分（下册）

（第二版）

秦宣云 刘旺梅 周英告 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
大学数学教程/韩旭里 主编

微积分

（下 册）

（第二版）

秦宣云 刘旺梅 周英告 编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是科学出版社 2004 版大学数学教程系列教材的第二版.

本书是大学数学教程系列教材的微积分(下册)部分，内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、含参变量的积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程与差分方程、应用数学模型. 本书体系新颖、结构严谨、内容翔实、叙述清晰、重点突出、难点分散、例题典型、习题丰富. 重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的数学课教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/秦宣云，刘旺梅，周英告编. —2 版. —北京：科学出版社，2008

普通高等教育"十一五"国家级规划教材 · 大学数学教程/韩旭里主编

ISBN 978-7-03-022331-9

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①秦…②刘…③周… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 088977 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 唐保军/责任校对：刘小梅

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 7 月第 二 版 印张：27

2008 年 7 月第七次印刷 字数：515 000

印数：28 001—36 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

第二版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学．为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践．我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展，不断总结教学实践的经验，努力编写一套高质量的数学基础课教材．本套教材是在对原大学数学教程系列教材使用多年的基础上，进一步修订，出版的第二版．

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想．在内容体系上，淡化单纯面向专业的观念，理顺课程内容之间的关系，加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述，注重学生对知识的理解与深化．在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供在相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力．

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学，侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用．这样，对大学数学的基本内容，便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排，有利于使这些基本内容保持同等重要的地位．本次教材修订，在保持原有指导思想的前提下，力求做到既适合于统一开设一门课程使用，也适合于分别开设多门课程使用．因而，更好地实现了本系列教材的目标定位，即作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材，内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学．此外，为了加强数学思维的训练，本次修订进一步精选了例题，补充了大量的习题．每本书修订的其他情况如下：

《微积分（上册）》是对原来的《一元函数微积分与无穷级数》的修改，增加了单变量函数的广义积分内容．作为大学数学教程的第一本，对内容力求简明直观地描述，着重训练、应用和运算．第 1 章至第 4 章由刘碧玉编写，第 5 章至第 7 章由李军英编写，第 8 章由韩旭里编写．

《微积分（下册）》是对原来的《多元函数微积分与常微分方程》的修改，去掉了单变量函数的广义积分内容，增加了空间解析几何内容，加强了曲线积分与

曲面积分内容的介绍．增强了理性思维培养的要求．第 1 章、第 4 章和第 5 章由刘旺梅编写，第 2 章和第 3 章由秦宣云编写，第 6 章由周英告编写，第 7 章由韩旭里编写．

《线性代数》是对原来的《线性代数与空间解析几何》的修订，将空间解析几何内容安排到了《微积分（下册）》，精心编写了行列式的线性映射定义以加强培养学生的抽象思维能力，通过分析线性方程组的结构，引进了 n 维向量，显得更为自然．第 1 章至第 3 章由刘伟俊编写，第 4 章至第 6 章由杨文胜编写，第 7 章由韩旭里编写．

《概率论与数理统计》的内容，对随机变量及其分布、参数估计与假设检验进行了较多地修正，增加了正交试验设计内容，适应了安排较多的课时进行教学．第 1 章至第 3 章由裘亚峥编写，第 4 章和第 5 章由刘诚编写，第 6 章至第 9 章由陈亚力编写，第 10 章由韩旭里编写．

这套教材既是一个统一的整体，可以统一开课使用，各部分之间又有相对独立性，可以独立讲授．讲完全部内容大约需要 290 学时．如果减少一些内容，安排 240 学时左右讲授是可以的．《微积分（上册）》可以考虑安排 80～90 学时，《微积分（下册）》可以考虑安排 90～106 学时，《线性代数》可以考虑安排 32～40 学时，《概率论与数理统计》可以考虑安排 40～54 学时，教师可以根据教学计划灵活安排．

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的，需要不断完善、不断适应时代发展的需要．本套教材前后版本的使用、修订和出版，得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持，得到科学出版社的热情支持，在此表示衷心感谢．同时，本教材编写中若有不妥之处，恳请专家、同行和读者不吝指正．

编　者

2008 年 5 月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最重要和最基础的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的特点是，根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程. 按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化教学教材，并经过多年的教学实践，效果是令人满意的. 现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学. 本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写. 对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用. 对全部教学内容，建议按三个学期整体安排.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合. 对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位. 在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助. 在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限,若有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004 年 3 月

目　录

第 1 章　空间解析几何

在物理学以及日常生活中，我们经常遇到许多的量，如时间、功、面积、温度等，这些量在规定的单位下，都可以由一个数完全确定，这种只有大小的量叫做数量．另外还有一些量，如位移、力、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量叫向量．向量不只是物理量的抽象，它也是几何空间的基本几何量，通过它可以反映几何空间中点与点之间的位置关系．在对向量引进运算以后，它就成为研究空间中直线、平面等问题的有力工具．

本章首先介绍几何空间中向量的概念和运算，然后通过建立向量的坐标，使向量的运算代数化．进而利用向量代数的有关理论研究几何空间的平面和直线．最后介绍了空间曲面和空间曲线的部分内容．

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念

定义 1.1　既有大小又有方向的量称为向量．

在几何上，向量可以用一个有向线段来表示．假设直线段的端点之一为起点，另一端点为终点，这就确定了向量的方向，而直线段的长度反映了向量的大小．以 A 为起点，B 为终点的向量用符号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示．向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$．今后为了方便，也用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示向量(图 1-1)．

定义 1.2　如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 大小相等，方向相同，则称其为相等的向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$．

由定义可知，两个相等的向量经过平行移动可以重合在一起，即现在讲的向量是自由向量，它只依赖于向量的大小和方向，而与向量的起点的位置无关．

例如，在平行四边形 $ABCD$ 中(图 1-2)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}.$$

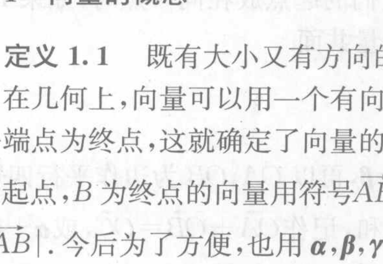

图 1-1

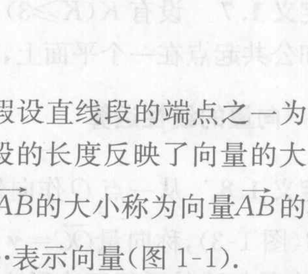

图 1-2

定义 1.3　如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的大小相等方向相反，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的反向量，记作 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$.

显然，若 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的反向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{\beta}$ 的反向量，在图 1-2 中，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$. 按定义，显然 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

定义 1.4　模为 0 的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$.

零向量实质上是起点与终点重合的向量，它的方向是不确定的，也可以说它的方向是任意的，可根据需要来选取它的方向.

定义 1.5　模为 1 的向量叫做单位向量.

由于每个方向都有一个单位向量，若空间中所有单位向量都以点 O 为起点，则这些向量的终点就构成一个以 O 点为球心半径为 1 的球面.

定义 1.6　两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 平行，记作 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

由于零向量的方向可以看成是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此，两向量平行，又称两向量共线.

定义 1.7　设有 $K(K\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 K 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 K 个向量共面.

1.1.2 向量的线性运算

定义 1.8　从一点 O 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$，再以 OA，OB 为边作平行四边形 $OACB$（图 1-3），称向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，记作 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，或 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$（称为向量加法的平行四边形法则）.

这个定义的等价说法是三角形法则：

定义 1.9　从一点 O 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$，再由 A 点作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\beta}$，称向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\gamma}$ 是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，记作 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，或 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$，见图 1-4.

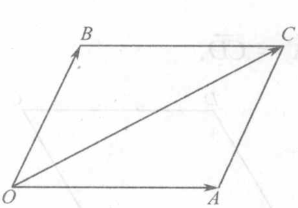

图 1-3

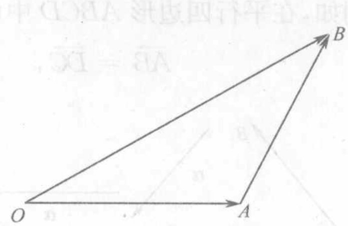

图 1-4

由定义不难验证向量加法有下述性质:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$(交换律);

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$(结合律,参看图 1-5);

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

由于向量的加法满足结合律,三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 之和就可简记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$,而不必用括号来表示运算的顺序,$n$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的和可以用三角形法则以折线一次画出,即作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{\alpha}_1$,再由 A_1 点作向量 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{\alpha}_2$,…,最后从 $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的终点 A_{n-1} 作向量 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{\alpha}_n$,那么 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

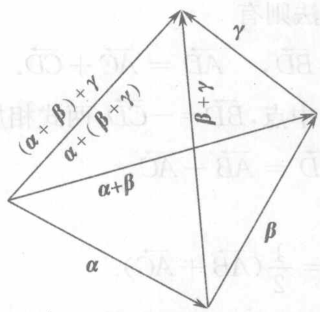

图 1-5

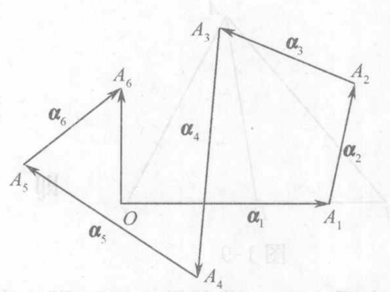

图 1-6

例如,在图 1-6 中,

$$\overrightarrow{OA_6}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_6.$$

定义 1.10 规定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $-\boldsymbol{\beta}$ 的和,即 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$,按三角形法则,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是由 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点的向量,见图 1-7.

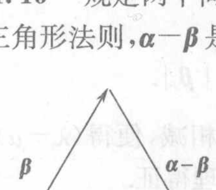

图 1-7

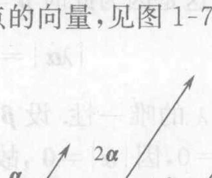

图 1-8

向量的减法可看作向量加法的逆运算,即如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$,则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.11 实数 k 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相乘是一个向量,记为 $k\boldsymbol{\alpha}$. 它的模 $|k\boldsymbol{\alpha}|$ 等于数 k 的绝对值与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模的乘积,即 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$. $k\boldsymbol{\alpha}$ 的方向规定为:$k>0$ 时,$k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向;$k<0$ 时,$k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向;$k=0$ 时,对任意 $\boldsymbol{\alpha}$,有 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 为零向量,见图 1-8.

特别地,如 $k=-1$ 有 $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;如 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,对任意实数 k 都有 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 为零

向量.

数乘向量的性质是：

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$，　k,l 是实数；

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

用向量作为工具，可以证明平面几何中的命题. 下面通过例子说明平面几何的命题和向量的命题是如何相互转化的.

例 1.1　$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边中点，见图 1-9，证明：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

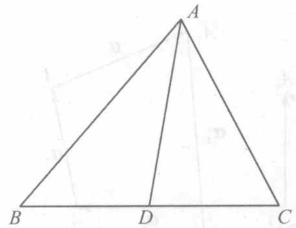

图 1-9

证　由三角形法则有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}.$$

又因 D 是 BC 中点，$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$，两式相加，得

$$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

定理 1.1　设向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{\beta}$ 平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\alpha}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}$，当 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向时 λ 取负值，即有 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，这是因为此时 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{\alpha}|=|\lambda||\boldsymbol{\alpha}|=\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，又设 $\boldsymbol{\beta}=\mu\boldsymbol{\alpha}$，两式相减，便得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{\alpha}|=0$，因 $|\boldsymbol{\alpha}|\neq\boldsymbol{0}$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 定理得证.

例 1.2　用向量证明：如果点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，AD 是 BC 边上中线，见图 1-10，则 $AM=\frac{2}{3}AD$.

证　因 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}$ 共线，故可设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}$，又因 D 是 BC 边中点，由例 1.1 有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

因此 $\overrightarrow{AM}=\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又因 BE 是 AC 边上中

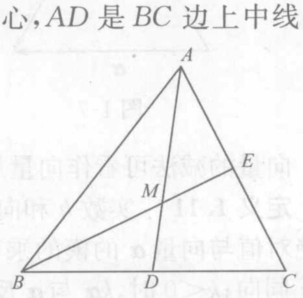

图 1-10

线，并设$\overrightarrow{ME}=y\overrightarrow{BE}$，有

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因此

$$\overrightarrow{ME}=y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

在$\triangle AME$中，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}=\mathbf{0}$，即

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\mathbf{0},$$

即

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

因$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不共线，由定理 1.1 有

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=0,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2}=0.\end{cases}$$

解此方程组得$x=\frac{2}{3}$，即$AM=\frac{2}{3}AD$.

习　题　1.1

1. 设$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$，试用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$表示$2\boldsymbol{\xi}-3\boldsymbol{\eta}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

3. 把$\triangle ABC$的BC边五等分，设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点A连接. 试以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$表示向量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

1.2　空间直角坐标系　向量的坐标表示

1.2.1　空间直角坐标系　向量的坐标表示

为了确定空间一点的位置，就必须建立空间直角坐标系. 它是平面直角坐标系的推广.

定义 1.12　在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以$O$为原点的两两垂直的数轴，依次记为$x$轴(横轴)，$y$轴(纵轴)，$z$轴(竖轴)，统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$坐标系或$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系(图 1-11). 通常把$x$轴和$y$轴配置在水平面上，而$z$轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则：以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角

度转向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，见图 1-12.

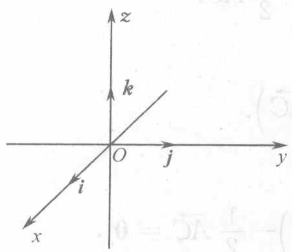

图 1-11

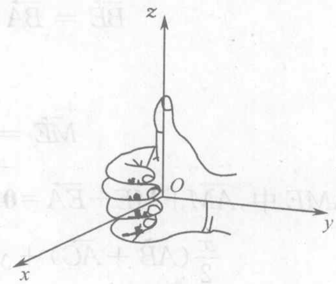

图 1-12

关于坐标系还有几个概念：

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，类似还有 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示，见图 1-13.

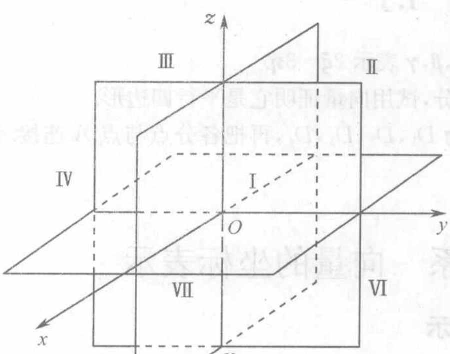

图 1-13

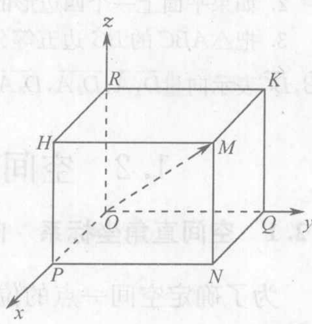

图 1-14

任给向量 $\boldsymbol{\gamma}$，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\gamma}$. 以 OM 为对角线，三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，见图 1-14，有

$$\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{\gamma} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的坐标分解式.

定义 1.13 若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的坐标分解式为 $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则称 $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 沿三个坐标轴方向的分向量，三元有序数组 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{\gamma}=(x,y,z)$；若 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OM}$，$(x,y,z)$ 也称为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$.

显然在给定的空间直角坐标系下，空间的向量（或点）与三元有序数组之间有一一对应关系.

1.2.2 利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$，即 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} &= (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}) \\ &= (x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k}+z_2\boldsymbol{k}) \\ &= (x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} &= (x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}, \\ \lambda\boldsymbol{\alpha} &= (\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} &= (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2), \\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} &= (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2), \\ \lambda\boldsymbol{\alpha} &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).\end{aligned}$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只需对向量的各个坐标进行相应的数量运算就行了.

例 1.3 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4)$，求 $\boldsymbol{\beta}=4\boldsymbol{\alpha}_3+(3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2)$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}_1 &= 3(1,2,-1)=(3,6,-3), \\ 2\boldsymbol{\alpha}_2 &= 2(2,5,3)=(4,10,6), \\ 3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2 &= (-1,-4,-9), \\ 4\boldsymbol{\alpha}_3 &= 4(1,3,4)=(4,12,16).\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}=4\boldsymbol{\alpha}_3+(3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2)=(4,12,16)+(-1,-4,-9)=(3,8,7).$$

例 1.4　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

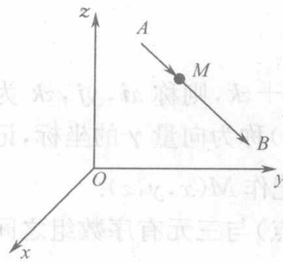

图 1-15

解　如图 1-15 所示，由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}).$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A 点 B 的坐标）代入，即得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

1.2.3　向量的模与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{\gamma}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\gamma}$，如图 1-14 所示，有

$$\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{\gamma}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

而

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

故

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,\quad |\overrightarrow{OQ}|=|y|,\quad |\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{\gamma}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$