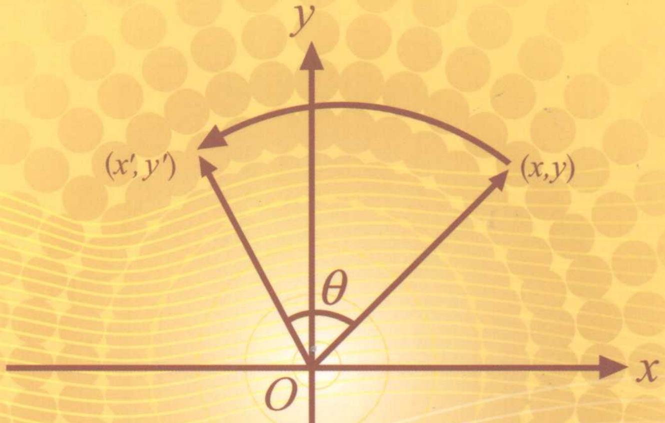
TURING 高等院校数学·统计学教材系列



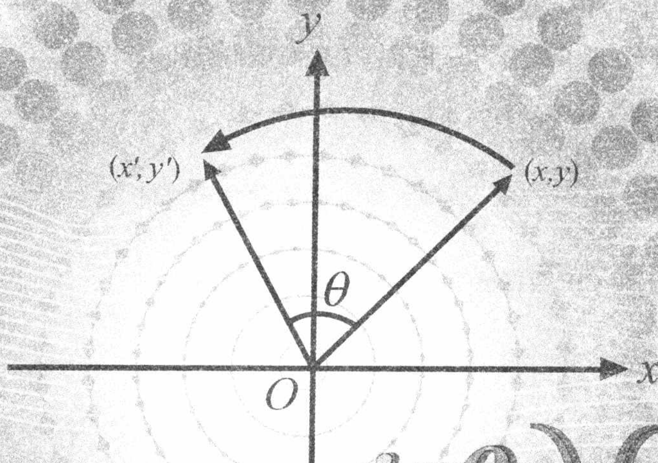
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

线性代数

何立国 刘艳秋 石鸿雁 何春艳 编著

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 高等院校数学·统计学教材系列



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

线性代数

何立国 刘艳秋 石鸿雁 何春艳 编著

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 何立国等编著. —北京：人民邮电出版社，2008.8
（高等院校数学·统计学教材系列）
ISBN 978-7-115-18197-8

Ⅰ、线… Ⅱ. 何… Ⅲ. 线性代数 高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 075952 号

内容提要

本书讲述了线性代数的经典内容，涉及行列式、矩阵、向量、线性方程组、线性变换、二次型。作者按照"问题解决"的模式，以解决线性方程组的 3 个基本问题为中心编排各章内容，有利于学生扩充原有知识框架。第 9 章介绍了线性代数的应用，体现了面向实践、面向应用的时代要求。本书还附有习题和答案，有利于学生自主学习。

本书起点较低，浅显易懂，可作为高等院校本专科非数学专业学生学习线性代数的教材。

高等院校数学·统计学教材系列
线性代数

◆ 编　著　何立国　刘艳秋　石鸿雁　何春艳
　责任编辑　张继发

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京楠萍印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：12.25
　字数：259 千字　2008 年 8 月第 1 版
　印数：1－3 000 册　2008 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-18197-8/O1

定价：22.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

作 者 简 介

何立国　哈尔滨工业大学数学系基础数学专业博士. 沈阳工业大学数学系主任、副教授, 应用数学专业硕士导师. 近几年在国内外数学期刊发表论文 20 余篇, 有 3 篇被 SCI 收录. 先后为本科生或研究生主讲过线性代数、高等代数等课程.

刘艳秋　东北大学控制理论与控制工程专业博士. 沈阳工业大学研究生学院院长、教授, 国务院教学指导委员会基础数学分会委员, 辽宁省研究生学会副会长, 沈阳工业大学学科带头人, 系统工程方向、应用数学专业硕士研究生导师. 编有《软计算方法》、《高等数学》、《线性代数》、《计算方法》等著作.

石鸿雁　先后学习数学和人工智能与电气运动控制专业, 获理学学士和工学博士学位. 沈阳工业大学控制理论与控制工程方向、应用数学专业硕士研究生导师. 主要研究方向为机器人运动规划与智能优化方法等. 先后在国内外重要期刊和学术会议上共发表学术论文 22 篇, 被 SCI、EI、ISTP 三大检索收录的论文 14 篇. 已主持和参加多项科研项目 9 项. 曾参与编写多部大学数学教材和辅导书.

前言

本书按照“问题解决”的模式，以解决线性方程组的 3 个基本问题为中心编排各章.(线性方程组涉及 3 个基本问题：线性方程组解的存在性问题，有解的情况下解的数量问题，解的表达式问题.) 我们利用行列式的方法、矩阵的方法及向量空间的方法分别对这 3 个问题进行了详尽的分析和完全的解决. 线性变换部分主要研究方阵的表示. 二次型部分主要研究对称矩阵的应用. 本书如此布局，主要基于对线性代数课程内涵与学生两个方面的考虑. 一方面，线性代数课程一般包括 6 大部分内容，即行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、线性变换、二次型. 另一方面，作者教授代数课程 (包括线性代数) 多年，对学生如何学习本课程的状况比较了解. 线性方程组是大一学生都熟悉的对象，所以无论对线性方程组提出什么样的问题，他们都会感觉很自然，不会因为背景知识的不足而影响学习的进程，相反，还会使他们在原有知识的基础上进一步得到提高，这对提高学生素质很有帮助.

第 1 章以三元一次方程组为例回顾了通常解线性方程组的过程，再用线性代数中行列式的方法、矩阵的方法处理这些过程，使初学者对利用线性代数的方法解决线性方程组问题有一个直观感性的认识. 第 2 章至第 3 章介绍了行列式理论并利用它讨论了线性方程组的公式解. 第 4 章介绍了矩阵理论并利用它讨论了线性方程组. 第 5 章介绍了向量空间理论并利用它讨论了线性方程组. 第 6 章综合运用行列式、矩阵和向量空间这 3 种方法简洁而清楚地讨论了线性方程组，还介绍了无解方程组的最小误差解、利用软件解线性方程组. 第 7 章实际上对矩阵理论做了进一步讨论，即线性变换或矩阵的对角化问题. 第 8 章二次型阐述了对称矩阵的应用. 第 9 章线性代数的应用主要介绍了矩阵、线性方程组、向量空间的一些简单应用，进一步的深入应用可以查阅书后的有关参考文献.

本书是以教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的线性代数课程基本要求和高等院校教材编写会议确定的编写大纲为基础，结合近几年的线性代数考研大纲以及我们的教学体会编写而成. 因此教材体系上体现出以线性方程组为中心的特点，同时内容上也力求规范，便于读者在学习过程中参考其他线性代数教材. 教材的每一章配有一定量的习题，其中的一部分选自往年考研真题. A 组主要针对课程的基本要求，B 组主要是难度更大一些的题目. 除去一些简单的题目外，两组练习题基本上都给出了答案，对于难度较大的题目全部给出详解，甚至一题两解.

在教材的使用方面，根椐我们的教学体会，48 学时的课堂教学可完成除第 9 章外的绝大部分内容. 若学时更少，任课教师可根据学生所学专业对 1.1 节至 1.2

节、3.2 节、6.3 节至 6.4 节、7.3 节、8.1 节进行适当处理, 32 学时的课堂教学也可以使用本教材.

在本书的编写过程中我们参考了大量兄弟院校的教材, 在此向这些教材的作者们表示衷心感谢! 同时向人民邮电出版社以及北京图灵文化发展有限公司的相关领导和编辑表示由衷感谢, 是他们的积极支持使本书得以顺利出版. 最后感谢沈阳工业大学教务处、理学院的诸多领导及数学系的同仁对本教材的关心与支持.

由于我们水平有限, 书中的错误和不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正, 以便于进一步的改进和完善.

作 者

2008 年 4 月于沈阳工业大学

目 录

第 1 章 三元一次方程组 …… 1
1.1 例子 …… 1
1.2 例子的简略分析 …… 4
1.3 连加号 Σ 与连乘号 Π …… 10
习题 …… 12
第 2 章 行列式 …… 13
2.1 行列式的定义 …… 13
2.2 行列式的性质 …… 16
2.3 行列式的计算 …… 26
习题 …… 31
第 3 章 利用行列式讨论线性方程组 …… 34
3.1 解唯一的情形 …… 34
3.2 解不唯一的情形 …… 37
3.3 线性方程组的加减消元法 …… 39
习题 …… 41
第 4 章 利用矩阵讨论线性方程组 …… 43
4.1 矩阵运算 …… 43
4.2 矩阵的逆 …… 46
4.3 初等矩阵 …… 47
4.4 矩阵的分块 …… 52
4.5 利用矩阵分析线性方程组解的情况 …… 56
习题 …… 61
第 5 章 利用向量讨论线性方程组 …… 65
5.1 向量空间 …… 65
5.2 利用向量分析线性方程组解的情况 …… 71
5.3 欧氏空间 …… 72
5.4 向量空间的同构 …… 78
习题 …… 81
第 6 章 线性方程组的进一步讨论 …… 85
6.1 综合 3 种方法讨论线性方程组 …… 85
6.2 线性方程组的通解 …… 88
6.3 最小误差解 …… 93
6.4 利用软件解线性方程组 …… 95
习题 …… 97
第 7 章 方形矩阵与线性变换 …… 100
7.1 线性变换 …… 100
7.2 线性变换和矩阵的对角化 …… 103
7.3 若尔当标准形 …… 109
7.4 正交变换与对称变换 …… 110
习题 …… 114
第 8 章 对称矩阵的应用：二次型 …… 118
8.1 化平面曲线为标准形 …… 118
8.2 二次型的标准形 …… 120
8.3 正定二次型 …… 125
8.4 一般数域上的二次型 …… 127
习题 …… 132
第 9 章 应用举例 …… 136
9.1 矩阵对角化的应用 …… 136
9.2 线性方程组的应用 …… 139
9.3 投入产出模型 …… 143
9.4 图的邻接矩阵 …… 148
9.5 自动纠错的实现 …… 152
习题 …… 154
参考答案及提示 …… 156
参考文献 …… 188

第 1 章　三元一次方程组

本章以三元一次方程组为例, 回顾和总结了中学时解线性方程组的过程, 并利用我们将要学习的行列式、矩阵、向量空间知识对解的过程进行分析, 使读者对各种数学工具如何运用到解方程组中有一个感性认识. 在学完本书后回过头来再看本章内容, 相信读者仍会很受启发. 最后介绍了进一步学习中经常要用到的连加号与连乘号的性质.

1.1　例　　子

本节给出 4 个三元一次方程组的例子, 回顾解线性方程组的一般过程. 一次方程组通常也称作*线性方程组*.

例题 1.1.1

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, & (1)\\ x_1+\ \ x_2+2x_3=4, & (2)\\ \qquad\ \ x_2-\ \ x_3=5. & (3)\end{cases}$$

解　将方程 (1) 乘以 -1 加到方程 (2) 上, 原方程组变成

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, & (4)\\ \quad\ -\ x_2-\ x_3=1, & (5)\\ \qquad\ \ x_2-\ \ x_3=5. & (6)\end{cases}$$

将方程 (5) 加到方程 (6) 上, 原方程组变成

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3,\\ \quad\ -\ x_2-\ x_3=1,\\ \qquad\quad\ -2x_3=6.\end{cases}$$

故得

$$\begin{cases} x_1=8,\\ x_2=2,\\ x_3=-3.\end{cases}$$

□

可见, 解线性方程组的过程, 实质就是将原方程组经过消元法化成最简单的线性方程组的过程, 线性方程组的解实际上就是一个最简的线性方程组. 而化简过程中出现的每个方程组都与原方程组具有相同的解, 即它们是*同解方程组*.

例题 1.1.2

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, & (1)\\ 2x_1+2x_2+2x_3=0, & (2)\\ 3x_1+3x_2+3x_3=0. & (3)\end{cases}$$

解　方程 (1) 乘以 -2 加到方程 (2) 上, 原方程组变成

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, & (4)\\ 3x_1+3x_2+3x_3=0. & (5)\end{cases}$$

将方程 (4) 乘以 -3 加到方程 (5) 上, 原方程组变成

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

故得

$$x_3=-x_1-x_2.$$

注意到, 任意给定 x_1,x_2 的一组值, 就能确定这个方程组的一个解, 因此这个方程组有无穷多解. 通常称 x_1,x_2 是*自由未知量*. 当然此方程组的解也可以表成 $x_1=-x_2-x_3$, 这时自由未知量是 x_2,x_3. □

上面方程组中的常数项全是零, 像这样常数项全为零的线性方程组通常称作*齐次线性方程组*(方程组中的每一项次数都是一样的).

例题 1.1.3

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, & (1)\\ x_1+x_2+2x_3=0, & (2)\\ 5x_1+7x_2+12x_3=0. & (3)\end{cases}$$

解　将方程 (1) 乘以 -2 加到方程 (3) 上, 得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, & (4)\\ x_1+x_2+2x_3=0, & (5)\\ 3x_1+3x_2+6x_3=0. & (6)\end{cases}$$

再将方程 (5) 乘以 -3 加到方程 (6) 上, 得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, & (7)\\ x_1+x_2+2x_3=0. & (8)\end{cases}$$

将方程 (7) 乘以 -1 加到方程 (8) 上, 得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ \quad\;\; -x_2-x_3=0. \end{cases}$$

故得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-x_3, \\ x_2=-x_3. \end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量. 实际上, 也可以把 x_1 或 x_2 看作自由未知量, 得出相应的解, 虽然它们各自形式不同, 但表达的内容是一样的. □

例题 1.1.4

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=3, & (1) \\ x_1+x_2+2x_3=4, & (2) \\ x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=4. & (3) \end{cases}$$

解 将方程 (1) 与 (2) 交换位置, 将方程 (3) 乘以 3 得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, & (4) \\ 4x_1+2x_2+3x_3=3, & (5) \\ 3x_1+x_2+x_3=12. & (6) \end{cases}$$

将方程 (4) 乘以 -4 加到方程 (5) 上, 方程 (4) 乘以 -3 加到方程 (6) 上得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, & (7) \\ -2x_2-5x_3=-13, & (8) \\ -2x_2-5x_3=0. & (9) \end{cases}$$

将方程 (9) 乘以 -1 加到方程 (8) 上得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, \\ 0=-13, \\ -2x_2-5x_3=0. \end{cases}$$

故该方程组无解. □

实际上, 对于下面的 n 元线性方程组, 也可以采用同样的方法进行讨论.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1-1-1}$$

由于上面方程组中 x_1 的系数不可能都为零, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 将第 1 个方程乘以适当的倍数加到下面各个方程中可以分别消去它的 x_1 项, 得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=c_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n=c_m. \end{cases}$$

如果上述方程组中从第 2 个方程到最后一个方程中 x_2 的系数不全为零, 不妨设 $c_{22}\neq 0$, 那么利用类似于上一步的方法, 将第 2 个方程乘以适当的倍数加到它下面的各个方程中可以分别消去 x_2 项, 得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad\qquad c_{22}x_2+c_{23}x_3+\cdots+c_{2n}x_n=c_2,\\ \qquad\qquad\qquad\quad d_{33}x_3+\cdots+d_{3n}x_n=d_3,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\quad d_{m3}x_3+\cdots+d_{mn}x_n=d_m. \end{cases}$$

而如果从第 2 个方程到最后一个方程中 x_2 的系数全为零, 则接着消去 x_3. 这样逐步消元,$\cdots$, 最后方程组变为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +e_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+e_{1n}x_n=g_1,\\ \quad x_2 \qquad\quad +e_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+e_{2n}x_n=g_2,\\ \qquad\ddots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad x_r+e_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+e_{rn}x_n=g_r,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=g_{r+1}. \end{cases}$$

通过观察上述方程组可得: *若 $g_{r+1}\neq 0$, 则方程组无解; 若 $g_{r+1}=0$, 则方程组有解. 当 $r<n$ 时, 对 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)$ 给任一赋值 $(h_{r+1},h_{r+2},\cdots,h_n)$ 时, 总可得 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 的唯一值 $(h_1,h_2,\cdots,h_r)$, 从而得方程组的一个解 $(h_1,h_2,\cdots,h_n)$; 当 $r=n$ 时, 易见方程组有唯一解.*

上述化简到最后的方程组中有 $r+1$ 个方程, 不能再通过化简使方程组中方程的数目减少了, 称 $r+1$ 是方程组 (1-1-1) 的独立方程的个数.

1.2 例子的简略分析

本节旨在利用线性代数中的几个重要概念 (行列式、矩阵、矩阵的乘法、矩阵的秩、线性空间), 对 1.1 节前 4 个例题给出具体说明, 让抽象的概念与具体的例子对应起来, 使读者意识到线性代数的许多概念虽然感觉起来很抽象, 但都有实际背

景. 当然现在读者不一定能完全理解这些概念的内涵, 但这些分析对读者进一步的学习会很有帮助.

行列式的概念是数学家们在寻求线性方程组的公式解的过程中给出的. 所谓线性方程组的公式解, 一般指利用线性方程组中各方程的系数及常数项把线性方程组的解表示出来, 就像一元二次方程的求根公式那样. 对于例题 1.1.1, 利用行列式给出解的表达式如下:

设

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&-1\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}3&2&3\\4&1&2\\5&1&-1\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}1&3&3\\1&4&2\\0&5&-1\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&4\\0&1&5\end{vmatrix}.$$

一般地, D 称为该方程组的*系数行列式* (determinant), 它是由这个方程组所有一次项系数构成, 且其 9 个数位置关系与在方程组中的位置是一致的. 至于如何计算它的值, 第 2 章将详细说明. D_1 是将 D 的第 1 列全部用相应方程的常数项替换, D_2 是将 D 的第 2 列全部用相应方程的常数项替换, 同理可得 D_3. 那么这个方程组的公式解可表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}, x_3=\dfrac{D_3}{D}$. 如果知道行列式的计算规则, 可知 $D=2, D_1=16, D_2=4, D_3=-6$, 故 $x_1=8, x_2=2, x_3=-3$, 与上节直接计算的结果相同. 对于有唯一解的一般 n 元一次方程组, 这个公式称作克拉默 (Cramer) 法则, 第 3 章中将给予详细说明.

在解 1.1 节的方程组时, 可以发现解方程组的过程中未知量其实只是起到占位的作用, 就好像十进制数中的 10, 100, 1 000 等在整数加法中的作用, 因此数学家们想到了利用一种表 (线性代数里称之为**矩阵**, matrix) 的运算来表示这一过程, 对于例题 1.1.1, 这一过程表示如下:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3\\1&1&2&4\\0&1&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-1&-1&1\\0&1&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-1&-1&1\\0&0&-2&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&5\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_3\times(-1)+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&-1&0&-2\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}.$$

其中 $r_1\times(-1)+r_2$ 表示将左边矩阵第 1行(row) 乘以 -1 加到第 2 行; r_2+r_3

表示将左边矩阵的第 2 行加到第 3 行; $r_3\times\frac{1}{2}$ 表示将左边矩阵的第 3 行乘以$\frac{1}{2}$; $r_3\times(-1)+r_2, r_3+r_1$ 表示将左边矩阵的第 3 行乘以 -1 加到第 2 行后, 再将左边矩阵的第 3 行加到第 1 行; 其余同理. 因为我们对矩阵只进行了行的变换, 未知量的位置没有改变, 故可得上面最后一个矩阵对应的方程组实际上是

$$\begin{cases}1x_1+0x_2+0x_3=8,\\0x_1+1x_2+0x_3=2,\\0x_1+0x_2+1x_3=-3.\end{cases}$$

显然该方程组的解 $x_1=8, x_2=2, x_3=-3$ 与直接计算的结果是一样的. 实际上, 线性代数里求解一个一般的 n 元线性方程组的思想与上述思想是一致的, 只是需要将是否有解、解是否唯一、解的公式这几种情况进行综合考量, 因此情况复杂了很多.

线性代数里, 通常称矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3\\1&1&2&4\\0&1&-1&5\end{pmatrix}$$

为对应方程组 (例 1.1.1) 的**增广矩阵**; 它是一个 3 行 4 列矩阵, 写成 3×4 矩阵; 称

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

为对应方程组 (例 1.1.1) 的**系数矩阵**, 它是一个 3×3 矩阵. 分别称

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

为对应方程组 (例 1.1.1) 的**未知量矩阵**和**常数项矩阵**, 它们都是 3×1 矩阵或称 3 维列向量. 进一步, 数学家们把这个方程组写成了矩阵形式

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},$$

并且认为左边两个矩阵是相乘关系, 相乘的结果应是

$$\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\x_1+\ \ x_2+2x_3\\x_2-\ \ x_3\end{pmatrix},$$

因此有

$$\begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1+\ \ x_2+2x_3 \\ x_2-\ \ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

规定: 如果两个矩阵有相同的行数和列数, 并且对应位置上的元相等, 则这两个矩阵相等. 因此, 上述矩阵等式就是例题 1.1.1, 即

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3=4, \\ \qquad\ \ x_2-\ \ x_3=5. \end{cases}$$

由方程组的矩阵形式可以看出, 如果两个矩阵可以相乘, 则左边的矩阵的列数与右边矩阵的行数必须相等. 上面相乘的情况是 3×3 矩阵与 3×1 矩阵相乘. 在遵守这一规则的情况下, 一个 $m\times n$ 矩阵可以与一个 $n\times s$ 矩阵相乘, 结果是一个 $m\times s$ 矩阵. 例如一个 3×4 矩阵与一个 4×2 矩阵相乘, 结果是一个 3×2 矩阵, 具体计算方式如下:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{pmatrix}$$

由此可见, 两个矩阵相乘所得积矩阵的每一项都是由左边矩阵的某一行与右边矩阵某一列对应项相乘后取和得到的. 这种计算方式本质上与上面矩阵形式方程组的计算方式是一样的.

初次遇到矩阵的乘法, 很多人不适应, 总感觉乘法是数与数之间的运算, 怎么能移到矩阵上呢? 实际上矩阵的乘法是我们所熟知的数的乘法的推广. 如果相乘的两个矩阵都是一阶的, 则矩阵的乘法本质上就是数的乘法. 如果两个非一阶矩阵相乘, 则读者会发现计算比数的乘法要复杂得多. 数学家们把数的运算推广到矩阵上, 这实际上是人类对数的运算的认识的一个巨大进步, 是一次质的飞跃. 但这一过程是漫长的, 我们知道数的四则运算已有上千年的历史, 而矩阵的运算的出现只是近代的事情, 可见很多人初识矩阵的乘法感到别扭和不适应是很自然的, 只要主观上积极地承认和接受它, 很快就会运用自如. 在以后的学习中读者会知道, 矩阵除了有乘法运算以外, 还有加减除运算及数乘运算 (这些运算与方程组有着极其密切的

关系), 但乘法运算是这些运算的本质与核心. 除法运算以乘法的逆运算的形式出现.

矩阵的秩(rank) 是由该矩阵唯一确定的一个非负整数, 它反映的是线性方程组中独立方程的个数 (参见 6.1 节). 例如, 我们知道例题 1.1.1 的方程组中独立方程的个数是 3, 通过计算知它的增广矩阵的秩也是 3. 例题 1.1.2 的方程组中第 2 个方程可以通过第 1 个方程乘以 2 得到, 第 3 个方程通过第 1 个方程乘以 3 得到, 故第 2 个方程、第 3 个方程均不是独立的, 故这个方程组独立方程的个数是 1, 通过计算知它的增广矩阵的秩也是 1. 例题 1.1.3 中第 3 个方程可以由第 1 个方程乘以 2 加上第 2 个方程乘以 3 得到 (此时, 通常称作第 3 个方程可以由第 1 个方程和第 3 个方程线性表示), 故这个方程组中独立方程的个数是 2, 通过计算知它的增广矩阵的秩也是 2. 例题 1.1.4 的独立方程的个数是 3, 通过计算知它的增广矩阵的秩是 3. 一个方程组中独立方程的个数是确定的, 但其中的某一个方程是否独立则是相对的, 可以变化的. 例如例题 1.1.2, 按照刚才的叙述, 方程 (1) 是独立的, 另外两个方程可由它线性表示, 即方程 (1) 乘以 2 得到方程 (2), 方程 (1) 乘以 3 得到方程 (3). 但我们完全可以把方程 (2) 看作是独立的, 即方程 (2) 乘以 $\frac{1}{2}$ 得到方程 (1), 方程 (2) 乘以 $\frac{3}{2}$ 得到方程 (3). 同样道理, 还可以把方程 (3) 看作是独立的, 方程 (1) 和方程 (2) 是方程 (3) 分别乘以 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 得到的. 然而不论怎么看, 这个方程组独立方程的个数始终是 1, 不会改变. 对于一个 n 元一次方程组, 通过计算它的增广矩阵的秩便可知道这个方程组独立方程的个数, 通过分析计算过程可以找出相应个数的独立方程. 至于如何计算一个矩阵的秩, 第 4 章将会详细介绍.

线性空间(也称作向量空间, vector space) 是一个对于数乘及加减运算都封闭的集合, 它实际上反映了齐次线性方程组的解集的结构, 进而通过它可以给出齐次线性方程组的解的公式. 例如, 例题 1.1.2 是一个三元齐次方程组, 设 V 是这个方程组的所有解构成的集合, (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) 是其任意两个解, 读者验证一下会发现 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ 和 (ka_1, ka_2, ka_3) 也是这个方程组的解, 这里 k 是一个任意取定的常数. 在线性代数里通常规定

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \triangleq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k(a_1, a_2, a_3) \triangleq (ka_1, ka_2, ka_3)$$

这两种运算通常称为 V 的线性运算: 前一个通常称作向量的加法运算, 后一个通常称作数与向量的数乘运算. 而 V 通常称为例题 1.1.2 的解空间. 规定任意两个向量 (a_1, a_2, a_3) 与 (b_1, b_2, b_3) 相等是指对应的分量相等, 即 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$. 通过代入验证可以发现 V 中的两个向量 $(0, 1, -1)$ 和 $(1, 0, -1)$ 是该方程组的两个具体的解 (通常称作特殊解或特解). 如果有两个数 a, b 使得

$$a(0, 1, -1) + b(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

则由简单的计算可知 a,b 两数只能同时取零. 此时通常称作解向量 $(0,1,-1)$ 和 $(1,0,-1)$ 是*线性无关的*(linearly independent). 我们再取这个方程组的两个特解, 例如 $(1,1,-2)$ 和 $(2,2,-4)$, 若

$$a(1,1,-2)+b(2,2,-4)=(0,0,0)$$

则有不全为零的 a,b 取值使等式成立 (譬如 $a=2,b=-1$), 此时通常称解向量 $(1,1,-2)$ 和 $(2,2,-4)$ 是*线性相关的*(linearly dependent), 而且这时可以发现 $(2,2,-4)=2(1,1,-2)$, 即后一个解向量可以由前一个解向量线性表示.

可以证明这个线性方程组的任意一个解均可由上面线性无关的那两个解线性表示, 即若 (c_1,c_2,c_3) 是例题 1.1.2 的一个解, 我们总可以找到一组 a,b 的取值满足 $(c_1,c_2,c_3)=a(0,1,-1)+b(1,0,-1)$, 并且这样的 a,b 只存在唯一一组. 由其解的表达式知

$$(c_1,c_2,c_3)=(c_1,c_2,-c_1-c_2)=c_2(0,1,-1)+c_1(1,0,-1),$$

另外, 若有

$$c_1(0,1,-1)+c_2(1,0,-1)=e_1(0,1,-1)+e_2(1,0,-1),$$

利用向量相等的定义知 $c_1=e_1,c_2=e_2$, 故得证. 通常称 $(0,1,-1)$ 和 $(1,0,-1)$ 是这个线性方程组解空间 V 的一个基(basis), 也称作这个线性方程组的一个*基础解系*. 而基中所含向量的个数 2 称作这个*解空间的维数*. 同理, 例题 1.1.3 的一个基础解系是 $(1,1,-1)$, 故其解空间是 1 维的. 读者可能要问对于常数项不为零但解又不唯一的线性方程组该如何处理呢? 第 2 章、第 3 章和第 5 章将分别采用行列式、矩阵和向量空间的方法解决这个问题. 通常把常数项不全为零的线性方程组称作*非齐次方程组*.

本书前 6 章旨在回答由 n 个未知量、m 个方程组成的线性方程组 (1-1-1) 的 3 个基本问题: (1) 这个方程组存在解的条件是什么; (2) 如果存在解, 解的数量是多少; (3) 如果存在解, 解的表达式是什么. 在这里 m,n 是两个大于或等于 1 的任意自然数.

通常称常数项全为零的线性方程组为*齐次方程组*. 如果把方程组 (1-1-1) 的常数项全取零, 即得下面的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{1-2-1}$$

通常称方程组 (1-1-2) 为方程组 (1-1-1) 的导出方程组, 它在研究一般的线性方程组的过程中起了关键作用.

在现实生活中, 根据实际问题列出的线性方程组没有解是完全可能的, 但实际问题往往并不要求求出精确解, 往往是求出误差尽可能小的解足矣, 在这种情况下就需要研究线性方程组在没有 (精确) 解的情况下的最小误差解. 6.3 节将介绍一个完整的解决方法.

另外, 上述线性方程组当 $n=m=1$ 的情况是最简单的, 此时方程组变为 $a_{11}x_1=b_1$. 若 $a_{11}\neq 0$, 则有唯一解 $x_1=a_{11}^{-1}b_1$; 当 $a_{11}=0\neq b_1$ 时, 无解; 当 $a_{11}=0=b_1$ 时, 有无穷解.

1.3 连加号 Σ 与连乘号 Π

为了把一些结果及证明过程表述得简洁清楚, 我们要经常使用连加号 $\sum$(也称作和号), 偶尔使用连乘号 Π, 因此这里介绍它们的一些基本性质.

经常把 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

例如

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3,$$

也可写成

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{t=1}^{n} t^3.$$

可见, 指标变量可以取 i, 也可以取 t, 即和与指标变量取法没关系. 和号 Σ 有下列基本性质.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\pm\sum_{i=1}^{n}b_i,\quad \sum_{i=1}^{n}ta_i=t\sum_{i=1}^{n}a_i,\ t\text{是与}i\text{无关的数}.$$

通常规定

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\triangleq\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}),$$

易见双重求和可以交换和号位置, 即

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.$$