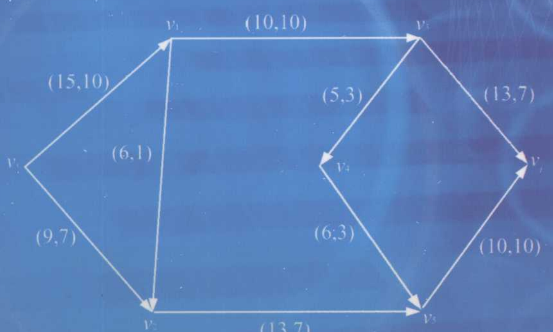
面向21世纪全国高职高专数学规划教材

组合数学

ZUHE SHUXUE

主　编　刘　勇　刘祥生

副主编　胡文英　王　理　施越英



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

组 合 数 学

主　编　刘　勇　刘祥生
副主编　胡文英　王　理　施越英
参　编　喻　璟　秦　昊　李　智
　　　　叶鸣飞　万青松　邹　箭

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书系统地介绍了组合数学知识。主要内容有排列与组合、生成排列和组合、二项式系数、容斥原理与鸽巢原理、递推关系和母函数、特殊计数序列、图与网络、Pólya 计数法、线性规划和组合最优化等。此外，每章后均提供了一定数量的习题，并附了习题的参考答案。

本书省略了部分理论上的证明，突出对结论的应用，特别侧重于将组合数学方法过渡到计算机算法，故比较适合于高职高专院校计算机专业学生选用，同时，也可作为高职高专学校选作数学建模教材。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/刘勇，刘祥生主编. —北京：北京大学出版社，2006.1

(面向21世纪全国高职高专数学规划教材)

ISBN 7-301-10412-X

Ⅰ.组… Ⅱ.①刘…②刘… Ⅲ. 组合数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 155100 号

书　　名：组合数学

著作责任者：刘　勇　刘祥生　主编

责 任 编 辑：李彦红

标 准 书 号：ISBN 7-301-10412-X/O・0678

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://cbs.pku.edu.cn　http://www.pup6.com

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667

电 子 信 箱：pup_6@163.com

排　版　者：北京东方人华北大彩印中心　电话：62754190

印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787 毫米×1092 毫米　16 开本　9.5 印张　216 千字

2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷

定　　价：16.00 元

前　言

近几年来，职业技术教育事业得以蓬勃的发展，高等职业教育已占据我国高等教育的半壁江山。随着我国经济的高速发展，尽快提高职业技术教育的水平显得越来越重要。在培养高职学生的岗位技能的同时，提高其在实践中应用知识的创新能力，这是高职教育的要求，也是高职教育与中职教育的一个区别。运用计算机技术解决实际问题，既是科学发展的要求，也是社会发展的要求。近年来，高校学生的数学建模竞赛活动，对高等职业教育的数学教育提出了新的要求。数学建模是用计算机解决实际问题的基础，现实生活中大量的离散数学问题和运用计算机技术解决实际问题的要求，是刺激组合数学快速发展的重要因素。同时，组合数学也为计算机科学奠定了理论基础。

以前，人们比较多地注意到了组合数学作为计算机科学的理论基础，其实，组合数学本身也是数学建模的重要工具，它不仅应该作为以培养研究型人才的研究生教育和本科教育的教学内容，而且也可作为以培养高等技术型人才的高职教育的教学内容。无论是从高职学生的数学基础知识来看，还是从高职教育的培养目标来看，高职计算机专业开设组合数学课程都是可取的。前些年，不少高职高专计算机专业开设了离散数学，主要讲授谓词逻辑等内容，由于课程内容属理论性内容，对于培养从事计算机理论工作的本科有关专业是必要的，但对于以培养技术应用型人才的高职教育则不是十分合适的。近年来，多数高职学校一改以前盲目效仿本科专业的做法，基本取消了离散数学课。为了提高高职学生，特别是高职计算机专业学生的数学建模能力，我们认为改革教学内容，适当引入组合数学内容是必要的，也是可行的。为此，我们组织了一批长期从事高职高专数学和计算机教育的资深教师，就在高职专业开设组合数学进行了研究和探讨，并编写了这本针对高职学生的组合数学试用教材。

本教材的编写原则是，不追求数学理论的完整性和系统性，突出重要结论、典型方法和算法的应用，为学生今后应用数学知识、创建数学模型、应用计算机技术解决实际问题打下基础。教材着重于组合学思想的直观描述，主要内容包括排列与组合、生成排列和组合、二项式系数、容斥原理、鸽巢原理、递推关系和母函数、特殊计数序列、图与网络、Pólya 计数法、线性规划和组合最优化。本书既可用作高职计算机类专业的教材，也可用作高职其他专业数学建模教材，建议教学课时 70～100。书中附有必要的例题和练习题，故也可供自学组合数学的人员参考。参加本书编写的有江西交通职业技术学院刘勇、刘祥生、胡文英、喻璟、秦昊、李智，江西信息应用职业技术学院施越英、华北水利学院水利职业学院王理、江西工业职业技术学院叶鸣飞、江西九江职业技术学院万青松、江西司法警官职业学院邹箭等老师，书中第 1、2、3、4、9 章由刘勇统稿，第 5、6、7、8、10 章由刘祥生统稿，全书由刘勇、刘祥生老师任主编，胡文英、王理、施越英老师任副主编。

由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，衷心希望广大读者批评指正。

编　者

2005 年 10 月

目 录

第 1 章　排列与组合

教学提示：组合数学主要研究离散型的数量关系，排列与组合则是解决离散型计算问题的简单而有效的工具之一，同时也是组合数学的基础。在高中阶段，已介绍了排列与组合的基本概念、基本原理和计算公式，在此，我们先对排列与组合的基本概念、基本原理和计算公式作些简单介绍，然后，将排列与组合的方法进一步推广到多重集。

教学要求：本章将介绍加法法则与乘法法则、排列与组合和多重集的排列与组合。通过学习，使大家进一步理解排列与组合的原理、更加熟练地掌握排列与组合的计算方法和技巧，并能用排列与组合的方法解决多重集问题。

1.1　加法法则与乘法法则

加法法则和乘法法则是排列与组合最基本的两个法则，通过这两个原则，可将复杂问题化为若干个较为简单的问题来解决。

1.1.1　加法法则

加法法则也叫加法原理。

加法法则　如果事件 A 有 n 种产生方式，即 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，事件 B 有 m 种产生方式，即 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，且 $A\cap B=\varPhi$。则事件“A 或 B”有 $n+m$ 种产生方式。

加法法则在使用中要求：(1)事件 A 和事件 B 中的每一种方式不能重叠，即一种产生方式只能属于其中一个事件，而不能同时属于两个事件；(2)事件“A 或 B”可由 A 或 B 事件中的任意一种方式完成。

例如，大于 0 而小于 10 的偶数有 4 个，即{2，4，6，8}；大于 0 而小于 10 的奇数有 5 个，即{1，3，5，7，9}；则大于 0 小于 10 的整数有 4+5 个，即{1，2，3，4，5，6，7，8，9}。这里事件 A 是“大于 0 而比 10 小的偶数”，事件 B 是“大于 0 而小于 10 的奇数”；事件“A 或 B”是“大于 0 小于 10 的整数”，不外乎或是偶数或是奇数两种可能，即属于 A 或属于 B。

【例 1.1】 某人消费，由于费用的限制，只能在彩电和冰箱中选购一种。彩电可选 3 个品牌，冰箱可选 4 个品牌。问该人共有几种消费选择。

解：设购彩电为事件 A，购冰箱为事件 B，则购彩电或冰箱为事件“A 或 B”。事件 A 有 3 种选择方式：{彩电 1，彩电 2，彩电 3}，事件 B 有 4 种选择方式：{冰箱 1，冰箱 2，冰箱 3，冰箱 4}。根据加法法则，事件“A 或 B”(该人的消费选择)一共有 3+4=7 种选择方式，即

A 或 B ={彩电 1，彩电 2，彩电 3，冰箱 1，冰箱 2，冰箱 3，冰箱 4}

加法法则可以推广到有限个事件当中。

【例 1.2】 某学校有两门外语课程，三门数学课程和四门计算机课程供同学们选修。为了不增加同学们的学习负担，学校规定每位同学只能选修一门课程。那么，根据加法法则，同学们选修课程的方式有 2＋3＋4=9 种。

1.1.2 乘法法则

乘法法则也可称作乘法原理，其具体内容如下。

乘法法则 如果事件 A 有 n 种产生方式，即 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，事件 B 有 m 种产生方式，即 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$。则事件"$A$ 与 B"有 $n\times m$ 种方式。

乘法法则在使用中要求：(1)事件 A 和事件 B 是互相独立的，即一种事件的产生方式的选择不会影响另一事件的产生方式的选择；(2)事件"A 与 B"要求 A 和 B 事件一一完成才算完成。

例如，设一个符号有两个字符组成，第一个字符有{a，b，c，d，e}五种方式，第二个字符有{1，2，3}三种方式。则根据乘法法则，该符号共有 5×3=15 种方式。这里事件 A 是"第一个字符"，事件 B 是"第二个字符"，显然，他们是互相独立的事件。而要构成"一个符号"这一事件，必须是"第一个字符"和"第二个字符"一一完成才算完成。即

$a1$, $b1$, $c1$, $d1$, $e1$, $a2$, $b2$, $c2$, $d2$, $e2$, $a3$, $b3$, $c3$, $d3$, $e3$

【例 1.3】 从集合{1，2，3}中选取数字：(1)构成个位数与十位数为不同数字的两位数，共有多少种方式；(2)构成个位数与十位数可以为相同数字的两位数，共有多少种方式？

解：(1) 设构成十位数为事件 A，构成个位数为事件 B。则事件 A 有 3 种产生方式。由于构成的两位的数个位数与十位数的数字不相同，所以每产生一个十位数后，个位数只能在剩下的两个数字中产生，因此，事件 B 有 2 种产生方式。根据乘法法则，"A 与 B"事件(即构成个位数与十位数为不同数字的两位数的个数)一共有 3×2=6 种方式，即

$$A\text{ 与 }B=\{12, 13, 21, 23, 31, 32\};$$

(2) 由于构成的两位的数个位数与十位数的数字可以相同，所以每产生一个十位数后，个位数还能在这三个数字中产生，因此，事件 B 有 3 种产生方式。根据乘法法则，"A 与 B"事件(即构成个位数与十位数可以为相同数字的两位数的个数)一共有 3×3=9 种方式，即

$$A\text{ 与 }B=\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

乘法法则可以推广到有限个事件当中。

【例 1.4】 某人从家里出发经过甲地、乙地到丙地，家到甲地有 2 种走法，甲地到乙地有 3 种走法，乙地到丙地有 2 种走法。问从家里到丙地共有多少种走法？

解：事件 1：从家到甲地有 2 种走法；

事件 2：从甲地到乙地有 3 种走法；

事件 3：从乙地到丙地有 2 种走法。

根据乘法法则，从家里到丙地共有 2×3×2=12 种走法。

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

定义 1.1 从 n 个元素的集合 S 中取 r 个元素按顺序排列，叫做 S 的一个 r 排列，不同的排列总数记为 $P(n, r)$。如果 $r=n$，则称为 S 的全排列，简称为 S 的排列。

显然，当 $r>n$ 时，$P(n, r)=0$。

定理 1.1 设 $n\in Z^{+}$，$r\in Z^{+}$，当 $r\leqslant n$ 时，

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

证明：设有 r 个盒子，每个盒子可以(而且只能)放置集合 S 中的一个元素。那么，第一个盒子有 n 个选择，即有 n 种选法；第一个盒子放置完毕后，第二个盒子只能在剩下的 $n-1$ 个元素中选一个，选法有 $n-1$ 种；第三个盒子有 $n-2$ 种放置选法；…；最后一个，即第 r 个盒子 $n-r+1$ 种选法。根据乘法法则，不同的放置方法数为

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

如果我们令 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$，且规定 $0!=1$，则

$$P(n,r)=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$

显然，全排列总数

$$P(n,n)=n!$$

(证毕)

【例 1.5】 (1) 从{1，2，3，…，9}中选取数字构成每位数不相同的四位数，有多少种选法？(2) 从{0，1，2，3，…，9}中选取数字构成每位数不相同的四位数，有多少种选法？

解：(1) 该问题为从 9 个不同的元素中选取 4 个元素的排列，排列总数为

$$P(9,4)=9\times 8\times 7\times 6=3024$$

(2) 由于构成四位数的数字的千位数不能为 0，因此，千位数在子集{1，2，3，4，5，6，7，8，9}中任选其一，有 $P(9,1)$ 种选法；百位数、十位数和个位数在包含 0 在内剩下的 9 个数中选取 3 个进行排列，有 $P(9,3)$ 种选法。根据乘法法则，构成每位数不相同的四位数的选法数为

$$P(9,1)\times P(9,3)=9\times 9\times 8\times 7=4536$$

【例 1.6】 有 8 人去借指定的 6 本不同的书，规定每人最多只能借 1 本，如果要把这 6 本书全部借来，共有多少种不同的借法？

解：把 8 个人看成 8 个元素，每次抽出 6 个人(元素)去借 6 本不同的书。每个人都有不同的选择，每个人的每一种选择都构成一个不同的排列，因此，共有

$$P(8,6)=8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3=20169$$

【例 1.7】 在 26 个字母中，大写和小写按同一个字母计算。

(1) 每次不重复的拿出 6 个进行排列，有多少种排法？

(2) 每次不重复的拿出 6 个除 m 和 n 以外的字母，放在 m 和 n 之间进行排列，有多少种排法？

(3)把 26 个字母全部拿出来进行不重复排列，并且必须保证有 6 个字母排在 m 和 n 之间，有多少种排法？

解：(1)从 26 个字母中，每次不重复的拿出 6 个进行排列的种数为

$$P(26,6)=26\times 25\times 24\times 23\times 22\times 21=165\ 765\ 600$$

(2) 26 个字母中除去 m 和 n 还剩下 24 个，将这 24 个字母每次不重复地拿出 6 进行排列，有 P(24,6)种排法。这些排法要放在 m 和 n 之间进行排列还有两类排法：一种是字母 m 在首位，字母 n 在末尾；另一种是字母 n 在首位，字母 m 在末尾。所以，总的排列种数为

$$2\times P(24,6)=2\times 24\times 23\times 22\times 21\times 20\times 19=193\ 818\ 240$$

(3) 先从除 m 和 n 以外的 24 个字母中取 6 个在 m 和 n 之间进行排列，共有 $2\times P(24,6)$ 种排法；再将与 m 和 n 一同排好的字母(共 8 个)看成一个元素与剩下的 18 个字母(共 19 个)进行全排列，根据乘法法则得到总排列种数为

$$\begin{aligned}&2\times P(24,6)\times P(19,19)\\=&2\times 24\times 23\times 22\times 21\times 20\times 19\times 19!\\=&2\times 19\times 24!\\=&38\times 19!\end{aligned}$$

1.2.2 组合

定义 1.2 从 n 个元素的集合 S 中无序选取 r 个元素，叫做 S 的一个 r-组合，不同的组合总数记为 $C(n, r)$。

我们规定，当 $n\geqslant 0$ 时，$C(n, 0)=1$。

显然，当 $r>n$ 时，$C(n, r)=0$。

定理 1.2 对于一切 $r\leqslant n$，有

$$P(n,r)=r!\,C(n,r)$$

即

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}\quad 或\quad C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

证明：从 n 个不同的元素中每次取出 r 个不同的元素构成的排列总数为 $P(n,r)$。排列方法可以分成两个步骤：(1)先从 n 个不同元素中取出 r 个元素；(2)把这 r 个元素进行不同的全排列。

由于 n 个不同元素中每次取出 r 个不同元素的所有组合数为 $C(n,r)$，而 r 个元素的全排列总数是 $r!$，根据乘法法则，有

$$P(n,r)=r!C(n,r)$$

所以

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$$

将 $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ 代入上式，得

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\qquad\text{(证毕)}$$

【例 1.8】 某小组共有成员 10 人，其中 2 个负责人。现在要安排 5 人参加一项活动，要求 5 人中至少要有一名负责人，共有几种不同的安排方法？

解：(1) 2 个负责人中安排 1 人，8 个组员中安排 4 人参加，安排方法种数为

$$C(2,1)\times C(8,4)=2\times\frac{8\times7\times6\times5}{4!}=140$$

(2) 2 个负责人都参加，另外安排 3 个组员参加，安排方法数为

$$C(2,2)\times C(8,3)=1\times\frac{8\times7\times6}{3!}=56$$

所以，安排方法总数为

$$140+56=196$$

【例 1.9】 有产品 20 件，其中 A 级品 12 件，B 级品 5 件，C 级品 3 件。任取 5 件，有多少种不同的取法？其中恰好有 1 件是 C 级品，有多少种取法？其中恰好有 A 级品 2 件，B 级品 2 件，C 级品 1 件，有多少种取法？其中至少有 1 件是 C 级品，有多少种取法？

解：(1) A 级品、B 级品、C 级品共有 20 件，从 20 件中任取 5 件，取法共有

$$C(20,5)=\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5\times4\times3\times2\times1}=15\,504$$

(2) 先从 3 件 C 级品中任取一件，有 C(3,1) 种取法；剩余的 4 件在 17 件 A 级或 B 级品中取，有 C(17,4) 种取法。根据乘法法则，取法数为

$$C(3,1)\times C(17,4)=3\times\frac{17\times16\times15\times14}{4!}=7140$$

(3) 从 12 件 A 级品中取 2 件，有 C(12,2) 种取法；从 5 件 B 级品中取 2 件，有 C(5,2) 种取法；从 3 件 C 级品中取 1 件，有 C(3,1) 种取法。根据乘法法则，取法数为

$$C(12,2)\times C(5,2)\times C(3,1)=1980$$

(4) 对 C 级品数进行讨论：

① 有 1 件是 C 级品：$C(3,1)\times C(17,4)$ 种取法；

② 有 2 件是 C 级品：$C(3,2)\times C(17,3)$ 种取法；

③ 有 3 件是 C 级品：$C(3,3)\times C(17,2)$ 种取法。

根据加法法则，至少有 1 件是 C 级品的取法数为

$$C(3,1)\times C(17,4)+C(3,2)\times C(17,3)+C(3,3)\times C(17,2)=9316$$

1.2.3 组合的性质

性质 1.1 如果 $n\in N,\ r\in N$，且 $n>r$ 则

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

证明：因为

$$C(n,r)=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

用 $(n-r)!$ 乘以上式的分子分母，则分子为 $n!$，分母为 $r!(n-r)!$。即

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

从而

$$C(n,n-r)=\frac{n}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=C(n,r)$$

即

$$C(n,r)=C(n,n-r) \qquad \text{(证毕)}$$

性质 1.2　$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$

证明： 由于

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

而

$$\begin{aligned}
&C(n-1,r)+C(n-1,r-1)\\
&=\frac{(n-1)!}{r![(n-1)-r]!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}\\
&=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\\
&=\frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!}+\frac{(n-1)!r}{r!(n-r)!}\\
&=\frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&=C(n,r)
\end{aligned}$$

所以

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \qquad \text{(证毕)}$$

【例 1.10】 计算 $C(999,998)$。

解： 根据组合的性质一，有

$$\begin{aligned}
&C(999,997)\\
&=C(999,999-997)=C(999,2)\\
&=\frac{999!}{2!(999-2)!}=\frac{999!}{2!\cdot 997!}=\frac{999\times 998}{2}\\
&=498\,501
\end{aligned}$$

1.3　多重集的排列与组合

多重集是元素可以多次出现的集合。我们把某个元素 a_i 出现的次数 $n_i(n_i=0,1,2,\cdots,\infty)$ 叫做该元素的重复数。一般地，把含有 k 种不同元素的多重集 S 记作 $\{n_1a_1, n_2a_2, \cdots, n_ka_k\}$。

用多重集的概念可以处理允许重复的排列和组合问题。

1.3.1 多重集的排列

定义 1.3 从一个多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$中有序选取的$r$个元素叫做$S$的一个$r$-排列。当$r=n$ $(n=n_1+n_2+\cdots+n_k)$时叫做S的一个排列。

如$S=\{3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c\}$，则$abcb$，$aacb$是$S$的4-排列，$abbaca$是$S$的6-排列。

定理 1.3 多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_k\}$的$r$-排列数为$k^r$。

证明： S的一个r-排列的第一位有k种选法，由于S中的每个元素可以无限地重复选取，同样第二位也有k种选法，故第i $(i=1,2,\cdots,k)$位有k种选法；排列中的每一位的选择都不依赖于以前的各位的选择。根据乘法法则，不同的排列数是k^r。(证毕)

推论 1.1 多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，对于$i=1,2,\cdots,k$，有$n_i \geqslant r$，则$S$的$r$-排列数为$k^r$。

【例 1.11】 求位数为 4 位的二进制数的个数。

解： 4 位的二进制数的每一位都由 0 或 1 构成。这个问题相当于多重集$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 0\}$的4-排列，根据定理 1.3，所求的二进制数的个数为$N=2^4=16$。

定理 1.4 多重集$S=\{n_1 a_1, n_2 a_2, \cdots, n_k a_k\}$，且$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，则$S$的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证明： S的一个排列就是n $(n=n_1+n_2+\cdots+n_k)$个元素的一个全排列。S中有n_1个a_1，排列时要占n_1个位置，由于n_1个a_1都是相同的元素，排列时与选取的顺序无关。因此，这些位置的选法有$C(n,n_1)$种；下面，再在剩下的$n-n_1$个位置中选n_2个放a_2，选法有$C(n-n_1,n_2)$种；以此类推，我们有$C(n-n_1-n_2,n_3)$种方法放a_3，…，有$C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)$种方法放$a_k$。根据乘法法则，$S$的排列数为

$$\begin{aligned}N&=C(n,n_1)\cdot C(n-n_1-n_2,n_3)\cdot\cdots\cdot C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)\\&=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!}\\&=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\end{aligned}$$

(证毕)

【例 1.12】 用 3 面红旗，3 面黄旗依次悬挂在一根旗杆上，可以组成多少种不同的旗语信号？

解： 旗语信号是由多重集｛3 红旗，3 黄旗｝的排列构成，由定理 1.4 得排列数为

$$N=\frac{6!}{3!3!}=20$$

1.3.2 多重集的组合

定义 1.4 设S是多重集，S的含有r个元素的子多重集叫做S的r-组合。

例如，$S=\{3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c\}$，则$S$的2-组合有

$$\{a,a\}，\{a,b\}，\{a,c\}，\{b,b\}，\{b,c\}$$

如果多重集S有n个元素(其中包括重复的元素)，则S的n-组合只有一个，即S本身；如果S有k种不同的元素，则S的1-组合有k个。

定理 1.5 设多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$，则$S$的$r$-组合数为

$$C(k+r-1,r)$$

证明： S的一个r-组合有以下的形式

$$\{m_1\,a_1,m_2\,a_2,\cdots,m_k\,a_k\}$$

其中$m_1,m_2,\cdots,m_k$都是非负整数，且满足

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$$

反之，对于满足方程组$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$的每一组非负整数解$m_1,m_2,\cdots,m_k$，$\{m_1\,a_1,m_2\,a_2,\cdots,m_k\,a_k\}$就是$S$的一个$r$-组合。所以，多重集$S$的$r$-组合数就是方程$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$的非负整数解的个数。

我们来证明这种解的个数等于多重集$T=\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$的排列数。

给定T的一个排列，在这个排列中$k-1$个0把r个1分成k组。从左边开始数，我们把第一个0左边的1的个数记为m_1，第一个0与第二个0之间的1的个数记为m_2，…，最后一个0右边的1的个数记为m_k，显然$m_1,m_2,\cdots,m_k$均为非负整数，且$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$。反之，给定方程$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$的一组非负整数解$m_1,m_2,\cdots,m_k$，我们可以构成以下形式的排列：

$$\underbrace{1\Lambda 1}_{m_1\text{个}1}\ \underset{\text{第1个0}}{0}\ \underbrace{1\Lambda 1}_{m_2\text{个}1}\ \underset{\text{第2个0}}{0}\ \Lambda\Lambda\ \underset{\text{第}k\text{个0}}{0}\ \underbrace{1\Lambda 1}_{m_k\text{个}1},$$

这就是多重集$T=\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$的一个排列。由此，证明了多重集$T=\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$的排列数等于方程$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$的非负整数解的个数。

根据定理 1.4，$T=\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$的排列数为

$$N=\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!\,r!}=C(k+r-1,r)\ \text{(证毕)}$$

推论 1.2 设多重集

$$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$$

当$n_i\geqslant r(i=1,2,\cdots k)$时，则$S$的$r$-组合数为$C(k+r-1,r)$。

【例 1.13】 3个相同的球，将其放入2个不同的盒子中，每个盒子都能容纳3个球，问有多少种放法？

解： 2个盒子看成多种集的两个元素a和b，每个盒子都能容纳3个相同的球，3是a和b中放置球的重复数，构成多重集$S=\{3\cdot a,3\cdot b\}$。放置的方法数是S的3-组合，这里$k=2$，$r=3$，组合数为

$$C(k+r-1,r)=C(4,3)=C(4,1)=4$$

推论 1.3 设多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$，当$r\geqslant k$时，$S$中每个元素至少取一次的$r$-组合数为$C(r-1,k-1)$。

证明： 任取一个符合要求的r-组合，从其中拿走元素$a_1,a_2,\cdots,a_k$，就得到一个$(r-k)$-组合；反之，对于S的一个$(r-k)$-组合，加入元素$a_1,a_2,\cdots,a_k$，得到所求得r-组合。因此，S中每个元素至少取一个的r-组合数就是S的$(r-k)$-组合数。

由定理 1.5 得这个组合数为

$$N = C(k+(r-1)-1, r-1) = C(r-1, r-k) = C(r-1, (r-1)-(r-k))$$
$$= C(r-1, k-1)$$

(证毕)

【例 1.14】 有 10 本相同的语文书和 8 本相同的数学书，现在要把这些书，全部分给 4 个班级。(1)任意将书全部分完，有多少种不同的分法？(2)将书全部分完，且每个班级至少有一本语文书和一本数学书，有多少种不同的分法？

解：(1)我们把 4 个班级分别定义为：a、b、c、d。

第一步，把 10 本相同的语文书分给 4 个班级，10 为每个班级得到语文书的重复数，构成多种集 $S_1 = \{10\cdot a, 10\cdot b, 10\cdot c, 10\cdot d\}$，不同的分法是 S 的 10-组合。这里 $k=4$，$r=10$，根据推论 1.2，组合数为

$$C(k+r-1, r) = C(4+10-1, 10)$$
$$= C(13,10)$$
$$= C(13,3)$$
$$= 286$$

第二步，把 8 本相同的数学书分给 4 个班级，8 为每个班级得到数学书的重复数，构成多种集 $S_2 = \{8\cdot a, 8\cdot b, 8\cdot c, 8\cdot d\}$，不同的分法是 S 的 8-组合。这里 $k=4$，$r=8$，根据推论 1.2，组合数为

$$C(k+r-1, r) = C(4+8-1, 8)$$
$$= C(11,8)$$
$$= C(11,3)$$
$$= 156$$

根据乘法法则，总的分法数是

$$286 \times 165 = 47\,190$$

(2) 同样，我们把 4 个班级分别定义为：a、b、c、d，构成多重集 $S_1 = \{10\cdot a, 10\cdot b, 10\cdot c, 10\cdot d\}$ 和 $S_2 = \{8\cdot a, 8\cdot b, 8\cdot c, 8\cdot d\}$。根据推论 1.3，每个班级至少有一本语文书的组合数为 $C(r-1, k-1) = C(9,3)$；每个班级至少有一本数学书的组合数为 $C(r-1, k-1) = C(7,3)$。根据乘法法则，每个班级至少有一本语文书和一本数学书的总分法数是

$$C(9,3) \times C(7,3)$$
$$= 84 \times 45$$
$$= 3780$$

1.4 习　题

1. 在一条铁路沿线上共有 18 个车站，问需要准备多少种不同的车票？
2. 某产品在加工过程中一共要经过 5 个工序，问：
(1) 加工顺序有多少种排法？

(2) 如果其中的一个工序必须首先进行，工序有多少种排法？

(3) 如果其中的一个工序不能在最后进行，工序有多少种排法？

(4) 如果其中两个工序必须连续加工，且这两个工序的顺序不能颠倒，工序有多少种排法？

3. 有 7 个人排成一排，问：

(1) 如果某个人必须安排在中间，有多少种排法？

(2) 如果某个人不能排在中间，有多少种排法？

(3) 如果某个人必须排在正中间或两端，有多少种排法？

(4) 如果某 3 人必须排在一起，有多少种排法？

4. 把字母 A、B、C、D、E、F 放在一起进行排列。

(1) 字母 B 总是紧跟在字母 E 的左边，共有多少种排法？

(2) 字母 B 总是在字母 E 的左边，共有多少种排法？

5. 书架上有 9 本不同的书，其中 4 本红皮书，5 本黑皮书。

(1) 这 9 本书有多少种排列方法？

(2) 若要求黑皮书放在一起，有多少种排列方法？

(3) 若要求黑皮书放在一起，红皮书也放在一起，有多少种排列方法？

(4) 若要求黑皮书与红皮书相间排列，有多少种排列方法？

6. 有 14 个学生安排坐在 2 排座位上，其中每排座位有 8 个。如果其中的 5 个人必须坐在第一排，另外还有 4 个人必须坐在第二排，问一共有多少种排法？

7. 有相同的文学参考书 6 本，相同的外语参考书 4 本，将这 10 本书赠给 10 位同学，每人一本，共有多少种不同的送法？

8. 从 8 个字母 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ 中，每次取出 3 个相乘，可以组成多少种不同的乘积？

9. 平面内有 8 个点，且没有 3 个点在同一条直线上。过每 2 个点作一条直线，一共可以作多少条直线？

10. 空间有 7 个点，且没有 4 个点在一个平面上。过每 3 个点作一个平面，一共可以作多少个平面？

11. 有 15 名篮球运动员。

(1) 分成三个组，每组 5 名运动员，有多少种分法？

(2) 分成 A、B、C 三个组，每组 5 名运动员，有多少种分法？

12. 每次从{1，3，5，7，9}中取出 3 个数字，从{2，4，6，8}中取出 2 个数字，组成没有重复的五位数，一共可以组成多少个组？

13. 有红球 4 个，绿球 3 个，白球 3 个，把他们排成一条直线，有多少种排法？

14. 有 2 个英文字母后面接 4 个数字组成汽车牌照，数字可以重复。

(1) 如果两个英文字母不能相同，可以组成多少种不同的牌照？

(2) 如果两个英文字母可以相同，可以组成多少种不同的牌照？

15. 某城市电话号码由 8 为数组成。

(1) 最多可以组成多少个不同的号码？

(2) 如果数字 0 和 1 不能放在电话号码的首位，最多可以组成多少个不同的号码？