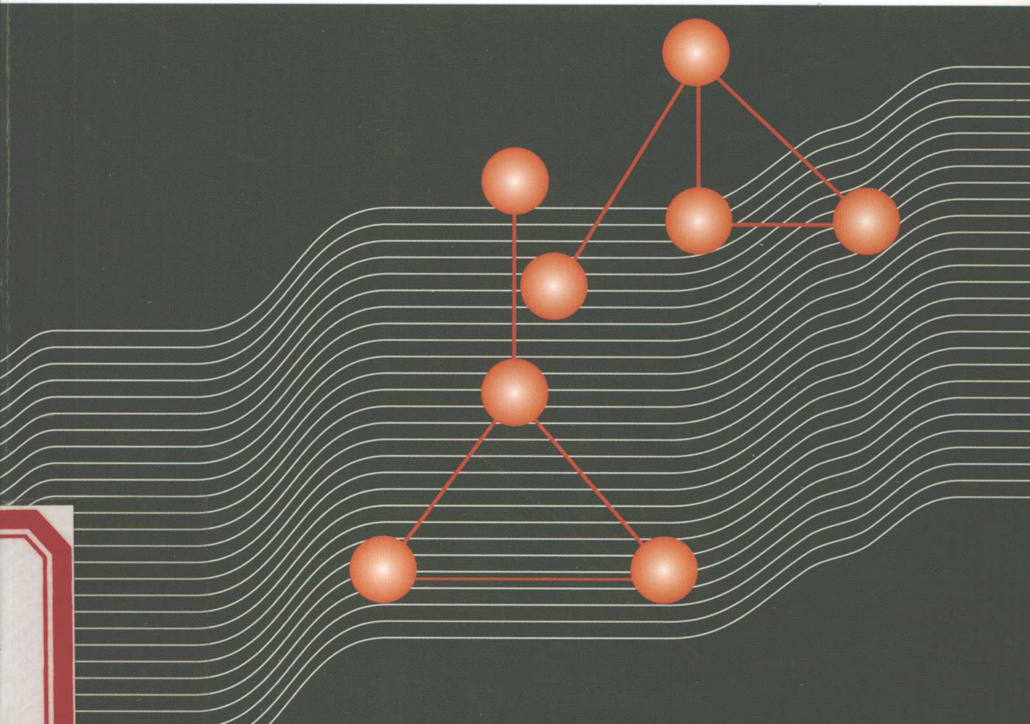
国家自然科学基金重点项目研究成果
交通部交通应用基础科研基金项目研究成果

网络系统韧性度的理论及其应用

王志平　任　光　王众托　编著



大连海事大学出版社

国家自然科学基金重点项目研究成果
交通部交通应用基础科研基金项目研究成果

网络系统韧性度的理论及其应用

王志平　任光　王众托　编著

大连海事大学出版社

·大连·

图书在版编目（CIP）数据

网络系统韧性度的理论及其应用 / 王志平，任光，王众托编著 .—大连：大连海事大学出版社，2005.6
ISBN 7-5632-1824-6

I. 网… II. ①王… ②任… ③王… III.网络系统—稳定性 IV.N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 002516 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌水桥 邮编：116026 电话：0411-84728394 传真：0411-84727996
http://www.dmupress.com E-mail: cbs@dmupress.com
大连铁道学院印刷厂印装 大连海事大学出版社发行
2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷
幅面尺寸：140 mm×203 mm 印张：4.875
字数：119 千字 印数：1～500 册
责任编辑：沈荣欣 封面设计：王 艳
定价：12.00 元

内 容 提 要

本书系统地介绍了衡量网络系统稳定性的一个重要参数——韧性度的理论及其应用. 全书共分十章：绪论、网络图韧性度的基本理论、Harary 图的韧性度、韧性度与最大网络结构、韧性度意义下网络图的优化设计、韧性度与图的连通性、边韧性度的基本理论、严格边韧性度图的充要条件、韧性度的优化设计理论在小群体人际关系中的应用、韧性度的优化设计理论在管理信息系统中的应用. 本书不仅介绍了韧性度的基本理论，也介绍了如何应用韧性度的理论解决实际问题.

本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生的教学参考书，也可供从事图论、系统工程、管理等专业方面的研究人员和工程技术人员参考

前　　言

现实世界中的很多系统可归结为网络系统. 对网络系统主要从这样一个角度来考虑它的可靠性：假如去掉或者破坏掉这个系统的若干个主要素后这个系统仍能正常工作的性能. 对这种性能的研究可归结为它的网络拓扑结构的连通性的研究. 目前人们提出了各种衡量网络图连通性的参数，本书系统地研究了网络图连通性的一个参数——韧性度的理论及其应用，完成了三大部分的研究工作：点韧性度的基本理论、边韧性度的基本理论和韧性度的应用.

1. 点韧性度的基本理论

(1) 介绍了点韧性度的基本理论，如：点韧性度的取值范围、几类特殊网络的韧性度的计算方法、韧性度与网络结构的简单情况.

(2) 在韧性度及网络图主要素已知条件下，最优网络及其构造.

(3) 运用韧性度刻画网络图的连通性，比较了韧性度与连通度、坚韧度、核度、整度等参数之间的关系.

2. 边韧性度的基本理论

(1) 介绍了一些基本理论，如：一些特殊图的边韧性度和边韧性度的取值范围.

(2) 利用边韧性度的定义，得到了判别严格边韧性度图的一个充要条件.

(3) 利用这一充要条件，求出了几类特殊网络图的边韧性度，比较了边韧性度与边坚韧度、边整度之间的关系.

3. 韧性度的应用

(1) 利用点韧性度的优化设计理论对小群体人际关系进行了刻画，得到了不同条件下人际关系优化设计的模型，提供了判别小群体人际关系优劣的一种新方法.

(2) 利用韧性度的优化设计理论对管理信息交流网络系统进行了剖析、研究. 得到了分析信息交流网络系统优劣(诸如信息传递速度的快慢、传递准确性等)的方法, 建立了最优信息交流网络的模型.

关于点韧性度和边韧性度的理论，目前国内从事这一方向研究的人较少，而国外对这一方向的研究也是最近几年的事. 本书是目前国内外这一方向的第一本专著，是作者综合最近几年的研究成果和其他研究者发表在国外学术刊物的学术论文撰写而成的. 在本书编写过程中，赵连昌教授提出了许多宝贵的意见，李彩荣副教授也给予我们热情的鼓励和具体的帮助，在此一并致以衷心的感谢.

由于作者的见识和水平有限，书中难免会有疏漏和错误之处，恳请广大读者批评指正.

作 者

2004 年 2 月

目　录

第1章 绪 论

1.1 研究背景及意义

仔细观察和思考现实世界中所存在的系统,无论是在自然界还是在现实生活中，经常会遇到涉及某些研究对象之间具有特定关系的问题. 如一个国家或地区内，城市之间有或没有交通线,有或没有通讯线；一场球类比赛中，两个球队以前比赛或者没有比赛过等等. 这些关系是对称的，即对象甲对对象乙有某种关系，也意味着对象乙对对象甲有这种关系. 对象之间的关系可以用一个图形来描述. 用点来表示对象，若对象甲和对象乙之间有所研究的关系，那么就在代表对象甲和乙的两个点之间连一条线. 因为我们感兴趣的是对象之间是否有某种特定关系，所以，两点之间有无连线是重要的，而连线的长短曲直则是无关紧要的. 这些网络系统对象之间的关系用图描述，用图抽象成模型后，便可以运用图论的知识解决其中有关人们感兴趣的问题. 因而图论的研究非常有意义，其用途也非常广泛，可以毫不夸张地讲，图论几乎可以应用于人类社会的各个角落. 特别是近代计算机的出现和发展,使得大规模问题的求解成为可能，图论及其应用的研究得到了飞速发展，更显示了它的巨大威力. 图论的应用已渗透于系统工程、建筑工程、通信工程、运筹学、电路网络、计算机科学及经济学、社会学、心理学等各个领域，并使这些领域的研究取得了巨大的甚至革命性的突破.

对于网络系统，要考虑的一个基本问题是系统的牢靠性能,即：系统在发生某些损坏的情况下仍能正常工作的性能. 对网络系统牢靠性的研究通常归结为它的网络拓扑图的连通性的研究.

设X是一个系统，其主要元素为$x_1,x_2,\dots,x_n$，如果x_i与x_j之间有关系且为互相的，就用x_ix_j表示. 由此，可构造一个无向网络图G，其顶点集合为$V(G)$，边集为$E(G)=\{x_ix_j\,|$其中x_i与x_j在X中有关系$\}$. 这里x_i与x_j有关系是广义的概念，可能是互相认识，也可能是两零件x_i与x_j相互连接等，应根据X的性质而定. 这样，我们便称无向网络图G为系统X的网络图.

设$G=(V,E)$表示无环、无重边的简单图. 其中V表示顶点集合，E为G的边集合，设S为边集合或点集合的一个子集，$G-S$表示从G中移去S集合中的边或点以后所得到的图. 如果$G-S$不连通，则我们称S为G的一个边或点割集. 用$\tau(G-S)$来表示$G-S$最大分支的顶点数；用$\omega(G-S)$来表示$G-S$连通分支数；用$|S|$表示点或边的个数.

网络图的连通性与构成它的点和边有关. 当网络失去某些点或边以后，将损害它的有效性. 要使网络构造得尽可能稳定，不仅与最初的损坏有关，还与损坏后重构的难易程度有关. 为了描述网络系统的连通性，人们提出了许多参数，如点连通度和边连通度. 但这两个参数存在着不足，因为它们没有涉及到去掉点或边后网络图遗留下来的分支. 为了克服这个不足，1973 年 Chvatal[1]引入了图的坚韧度，1987 年 Barefoot[2]等提出了整度，1994 年许进[3]提出了核度. 但这些参数没有考虑到网络图遗留下来的最大的分支，于是，1995 年 Cozzens[4]提出了韧性度，1995 年 Piazza[5]等提出了边韧性度. 作者[6]引入了一个新的不变量——离散度，这些参数的引入进一步深刻地从整体上刻画了网络图的连通性. 这些参数涉及到两个根本性的问题：

(1) 网络图在失去了某些点或边后还有多少点能连通?

(2) 重构网络使之连通程度的困难有多大?

各种参数的定义如下:

● 连通度或边连通度

$K(G)=\min\{|S|:S为G的点割集)\},\lambda(G)=\min\{|S|:S为G的边割集\}.$

● 坚韧度或边坚韧度：$t(G)=\min\{{|S|}\big/{\omega(G-S)}:S为G的点割集\}$，

$$\tau(G)=\min\{{|S|}\big/{\omega(G-S)}:S为G的边割集\}.$$

● 核度：$h(G)=\max\{\omega(G-S)-|S|:S为G的点割集\}.$

● 点整度或边整度：$I(G)=\min\{|S|+\tau(G-S):S\subseteq V(G)\}$，

$$I'(G)=\min\{|S|+\tau(G-S):S\subseteq E(G)\}.$$

● 离散度：$D(G)=\max\{\dfrac{\omega(G-S)-\tau(G-S)}{|S|}:S\subseteq V(G)\}$.

● 韧性度或边韧性度：$T(G)=\min\{\dfrac{|S|+\tau(G-S)}{\omega(G-S)}:S\subseteq V(G)\}$，

$$T'(G)=\min\{\frac{|S|+\tau(G-S)}{\omega(G-S)}:S\subseteq E(G)\}.$$

在坚韧度或核度中，对“进攻者”来说，毁坏 S 的“代价”是 S 的大小，得到的“成果”是破坏 S 后遗留下来的分支(因为产生较多的分支将难于重构一个网络图). 在韧性度或离散度中，“代价”也考虑到最大的遗留分支，因为较大的遗留分支意味着“进攻者”不太成功. 整度不考虑“成果”，“进攻者”希望代价与成果的比率尽可能小，而网络设计者希望最小比率值尽可能大.

关于连通度和边连通度[17~21]、坚韧度和边坚韧度[22~46]、核度[47~59]、整度和边整度[60~80]、离散度[81~85]等参数问题的研究目前仍吸引了大批的学者从事这方面的工作.

自从 Cozzens, Piazza 等提出了韧性度、边韧性度以来，理论上得到了迅猛的发展[86~93]. 这种发展的一个重要原因在于，韧性度不仅考虑了网络图遗留下来的分支，也考虑到了网络图遗留

下来的最大分支. 这样韧性度较其他参数而言，更能深刻地从整体上揭示网络系统的牢靠性能. 在韧性度的研究上，Cozzens, Choudum 等工作最为出色. Cozzens[86] 等得到了 Harary 图的韧性度. Choudum[87] 等求出了完全图的积和径的韧性度，并刻画了在网络图顶点数和韧性度给定的条件下，网络所具有的最大边数[88] 在边韧性度的研究上, Piazza 等还得到了边韧性度的一个较低的下界[91]. 作者对韧性度和边韧性度的理论及应用作了进一步的研究[89,90,92,93,94,96,97,98].

1.2 主要研究内容

本书针对韧性度的理论及其应用问题进行了研究, 得到了一些研究成果, 具体包括如下内容:

(1) 介绍了韧性度和边韧性度的一些基本理论, 如:完全图、星图、完全图的积和径、Harary 图的韧性度和边韧性度、韧性度的 Hamiltonian 性质、韧性度和边韧性度的取值范围等[4,5,86,87];

(2) 得到了韧性度、离散度与网络图的结构之间的关系[81,89];

(3) 对韧性度、离散度与其他参数在连通性方面进行了比较[83,90];

(4) 解决了在主要素目和网络图的顶点数已知情况下, 网络所具有的最大及最小结构[94];

(5) 概述了在网络图顶点数及韧性度给定条件下, 网络所具有的最大边数;

(6) 解决了在网络图顶点数及韧性度给定条件下, 网络所具有的最小边数[96];

(7) 证明了国际著名刊物上的一个猜想, 提出了关于严格边韧性度图的一个充分必要条件, 求出了一些图的边韧性度[92,93,98];

(8) 运用韧性度的优化设计理论对管理信息系统进行了研究;

(9) 将韧性度的优化设计理论运用于研究小群体人际关系.

1.3 本书的结构

本书对韧性度的理论进行了系统的研究，并将其应用于管理信息系统和小群体人际关系中. 全书共分十章，第一章介绍了韧性度和边韧性度的研究背景及意义；第二章阐述了韧性度的基本理论，介绍了韧性度的取值范围、一些特殊图的韧性度、韧性度的 Hamiltonian 性质、韧性度与网络图结构之间的关系；第三章概述了 Harary 图的韧性度；第四章介绍了韧性度与最大网络结构之间的关系和相应的构造方法；第五章讨论了韧性度意义下网络图的优化设计，包括最值韧性度和最值网络、最小韧性度函数及最小韧性度网络结构、最小韧性度图的基本理论、最小韧性度图的构造；第六章利用连通度、坚韧度、核度、整度等参数的定义，比较了韧性度和离散度与这些参数在连通性方面的差异，从而得出了韧性度是一个从整体上刻画图连通性的较好的不变量；第七章介绍了边韧性度的一些基本理论，如:取值范围、一些特殊图的边韧性度、韧性度图的一些性质；第八章建立了严格边韧性度图的充要条件，并求出了一些图的边韧性度；第九章将韧性度的优化设计理论运用于研究小群体人际关系；第十章运用韧性度的优化设计理论对管理信息系统进行了研究.

1.4 基本概念和记号

设 $G=(V,E)$ 是一个图，若 $e=\{u,v\}$ 是图 G 的一条边， 则称 u 和 v 是相邻的，边 e 和点 u,v 相邻接，u 和 v 称为边 e 的端点. 点 v 的顶点度数 $d(v)$ 定义为：与点 v 相邻的所有点的个数. 通常把具有

p 个顶点的图 G 称为 p 阶图.如果对于图 G 中任意一对顶点(u,v),在 G 中存在 $u-v$ 路, 则称该图是连通的. 为了清楚和方便, 下面列出本文所出现的基本概念、记号等.

- 若 $K(G)\geq k$, 则称 G 为 k 点连通度;
- 若 $t(G)\geq k$, 则称 G 为 k 点坚韧度;
- 若 $T(G)\geq k$, 则称 G 为 k 点韧性度;
- 若 $h(G)\leq k$, 则称 G 为 k 点核度;
- 若 $I(G)\geq k$, 则称 G 为 k 点整度;
- 图 G 的顶点最小度数: $\delta(G)=\min\{d(v):v\in G\}$;
- 星图: 记作 $K_{1,p-1}$, 它是一种特殊的完全二部图, 其中第一个独立集仅有一个顶点, 第二个独立集有 $p-1$ $(p\geq 2)$ 个顶点;
- 完全图:记作 K_p(p 个顶点), 是任两个顶点皆相邻的图;
- 完全二部图:记作: $K_{m,n}$, 它的顶点集由 2 个两两互不相交的子集 V_1和V_2 (均非空, $k\geq 2$)构成, 这里 $|V_1|=m,|V_2|=n$, 每个 V_i 都是 $K_{m,n}$ 的独立集, 若对 $u,v\in V(K_{m,n})$, 如果 u,v 不同属于某一个 V_i, 则必相邻;
- 图的笛卡尔积:记作 $G_1\times G_2\times\ldots\times G_r$, 它有顶点集 $V(G_1)\times V(G_2)\times\ldots\times V(G_r)$, 两个顶点 $u=(g_1,g_2,\ldots,g_r)$, $v=(h_1,h_2,\ldots,h_r)$ 相邻当且仅当只对一个 $i,g_i\neq h_i$ 且 (g_i,h_i) 为 G_i 中的一条边;
- 最大独立数: 在图 G 的顶点集中没有任何两顶点是相邻的, 则称此顶点集是独立的. 在任何这样的集中顶点数最大的一个称为最大独立数, 记作 $\alpha(G)$;
- 生成子图: 给定图 $G=(V,E)$.若 $V'\subseteq V, E'=\{uv\in E\mid u,v\in V'\}$, 则称图 $G'=(V', E')$ 是 G 中由 V' 生成的子图.

第 2 章　网络图韧性度的基本理论

[本章摘要] 本章主要介绍 Cozzens 在文献[4]中、Choudum 在文献[87]中和作者在文献[89]中的一些工作. 求出了完全图、完全二部图、星图[4]、完全图的积和径[87]等一些特殊图的韧性度,得到了韧性度的取值范围和一些关系式, 研究了韧性度的 Hamiltonian 性质[4], 讨论了最简单情况的韧性度与网络图的结构[89].

2.1　几类特殊图的韧性度及韧性度的取值范围

设 $S \subseteq V(G)$, S 的痕记作: $sc(S)=[|S|+\tau(G-S)]/[\omega(G-S)]$. 如 $sc(S)=T(G)$, 则 S 被称作 G 的 $T-$集.

命题 2.1[4]　如 G 是 H 的生成子图, 则 $T(G)\le T(H)$.

证明　因为 G 是 H 的生成子图, 所以, 对任何子集 $S\subseteq V(G)$ 得到 $\omega(G-S)\ge \omega(H-S)$, $\tau(G-S)\le \tau(H-S)$, 这样 $T(G)\le T(H)$.

命题 2.2[4]　对任何图 G, $T(G)\ge \dfrac{K(G)+1}{\alpha(G)}$, $\alpha(G)$ 是 G 的独立数.

证明　对 G 的任何切割集 S, $|S|\ge K(G)$, 这样 $|S|+\tau(G-S)\ge K(G)+1$. 从这可看出, $G-S$ 的分支数的最多为 $\alpha(G)$.

命题 2.3[4]　如 G 不是完全图, 则 $T(G)\le \dfrac{p-\alpha(G)+1}{\alpha(G)}$.

证明　设 X 是 G 中顶点集为最大的独立集, 令 $S=V(G)-X$, 那么, $|S|=p-\alpha(G)$, $\tau(G-S)=1$, $\omega(G-S)=\alpha(G)$, 结果成立.

命题 2.4[4]　G 是 p 阶连通图，则 $\frac{2}{p-1} \le T(G) \le p$.

证明　因为 $1 \le \alpha(G) \le p-1$ [100]，$K(G) \ge 1$ [101],所以结论成立.

命题 2.5[4]　如 $m \le n$，则 $T(K_{m,n}) = \frac{m+1}{n}$.

证明　如果 $G = K_{m,n}$ $(m \le n)$，那么 $K(G) = m, \alpha(G) = n$. 利用命题 2.2 和命题 2.3，得到 $\frac{K(G)+1}{\alpha(G)} \le T \le \frac{m+n-\alpha(G)+1}{\alpha(G)}$，因此 $T = \frac{m+1}{n}$.

定理 2.1[4]　对任何图 G，$T(G) \ge t(G) + \frac{1}{\alpha(G)}$.

证明　设 $S \subseteq V(G)$ 是一 T－集，且 $B \subseteq V(G)$ 也是一 T－集. 那么

$$\frac{|B|+\tau(G-B)}{\omega(G-B)} \ge \frac{|B|}{\omega(G-B)} + \frac{1}{\omega(G-B)} \ge \frac{|S|}{\omega(G-S)} + \frac{1}{\alpha(G)},$$

因此 $T(G) \ge t(G) + \frac{1}{\alpha(G)}$.

从这个结果可推出许多推论.

推论 2.1[4] 对任何图 G，$T(G^2) \ge K(G)$.

推论 2.2[4] 设 G 是一个非空图，m 是一个使得 $K_{1,m}$ 为 G 的导出子图的最大整数，则 $T(G) \ge \frac{K(G)}{m} + \frac{1}{\alpha(G)}$.

推论 2.3[4]　设 G 为一个图，且 $0 < T(G)$，$\lambda(G) = \lambda$，则 $T(L(G)) > \frac{\lambda}{2}$.

定理 2.2[4]　设 G 是一个有 p 个顶点的非平凡、非完全的图，

v 为任意一个顶点，则 $T(G-v) \geq T(G)-\frac{1}{2}$.

证明　设 $G'=G-v$，如 $G'=K_{p-1}$，那么 $T(G')=p-1$，且由命题 2.3 可知，$T(G) \leq \frac{p-1}{2}$，这样定理成立. 假设 $G' \neq K_{p-1}$，设 S' 是 G' 的一 $T-$ 集，且设 $|S'|=m$, 那么 $T(G')=\frac{m+\tau(G'-S')}{\omega(G'-S')}$. 现定义 $S=S' \cup \{v\}$，明显地，S 是 G 的一切割集，这样

$$T(G) \leq \frac{|S|+\tau(G-S)}{\omega(G-S)}.$$

因为 $|S|=m+1, G-S=G'-S'$，这样

$$\begin{aligned} T(G) &\leq \frac{m+1+\tau(G'-S')}{\omega(G'-S')} \\ &= \frac{m+\tau(G'-S')}{\omega(G'-S')}+\frac{1}{\omega(G'-S')} \leq T(G')+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

定理 2.3 [4]　如果 G 是一个二部 $r-$ 正则，$r-$ 连通 p 个顶点的图，则 $T(G)=\frac{p+2}{p}$.

证明　从文献[103]可得出 $t(G) \geq 1$，这样由定理 2.1 可知 $T(G) \geq 1+\frac{1}{\alpha(G)}$. 容易推出 $\alpha(G)=\frac{p}{2}$，这样 $T(G) \geq \frac{p+2}{p}$. 设 S 是一部分集的一个. 那么，因为 G 是 $r-$ 正则的，所以，$|S|=\frac{p}{2}$，$\tau(G-S)=1$，$\omega(G-S)=\frac{p}{2}$，因此 $T(G)=\frac{p+2}{p}$.

这个结果给出了许多有趣的推论.

推论 2.4 [4]　如果 G_1 是一个二部、$n-$ 正则、$n-$ 连通 p_1 个顶