普通高等学校 工程硕士 系列教材
Putong Gaodeng Xuexiao G — ONGCHENG SHUOSHI
Xilie Jiaocai

高等工程数学

GAODENG GONGCHENG SHUXUE

黄廷祝 傅英定 主编

UESTCP
电子科技大学出版社

高等工程数学

黄廷祝　傅英定　主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等工程数学 / 黄廷祝，傅英定主编. —成都：电子科技大学出版社，2008. 4

（普通高等学校工程硕士系列教材）

ISBN 978-7-81114-764-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①黄…②傅…　Ⅲ. 工程数学—研究生—教材　Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038291 号

内 容 提 要

本书以精练的语言，介绍了矩阵分析基础、科学计算方法、最优化理论与方法、组合数学、图论以及随机过程等六个方面的基础数学和工程数学理论和方法。本书论证简明，叙述清晰，并力求以有限的篇幅，尽可能多地反映现代工程数学的概况。不仅是工程硕士研究生的教学用书，还可供工程技术人员阅读参考。

普通高等学校工程硕士系列教材

高等工程数学

黄廷祝　傅英定　主编

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）
策划编辑： 曾　艺　罗　雅
责任编辑： 辜守义
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮件： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸： 185mm×240mm　**印张** 22　**字数** 394 千字
版　　次： 2008 年 4 月第一版
印　　次： 2008 年 4 月第一次印刷
书　　号： ISBN 978-7-81114-764-3
定　　价： 35.00 元

序　　言

本书是工程硕士研究生的公共基础学位课程《工程数学》的专门教材。具有高等数学和线性代数知识的工程技术人员也可将本书作为学习工程数学的参考书。

工程数学由多门数学课程所组成，它的涉及面很广。本书的选材参照工科硕士研究生各专业的教学计划中数学课程的设置情况，确定了矩阵分析基础、科学计算方法、最优化理论与方法、组合数学、图论以及随机过程等六个方面的内容。

本书论证简明，叙述清晰，并配有较多的实例和难易程度不同的习题。教师可根据教学要求、专业情况、课时多少灵活选取授课内容。为了在有限的篇幅中包含尽可能多的信息量，书中一些较繁的证明被省略。为了便于自学，部分习题给出了参考答案。

本书由黄廷祝教授、博导和傅英定教授主编，由张先迪教授统稿。第一章由黄廷祝和杨传胜编写，第二章由钟尔杰和何国良编写，第三章由傅英定编写，第四章和第五章由张先迪和汪小平编写，第六章由覃思义和彭江艳编写。

本书的作者都多年从事相应的教学工作，具有丰富的教学经验和科研经历，但编写这样一本内容广泛而篇幅不多的教材仍有难度，加之水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，恳请同行专家及读者提出宝贵意见和建议，以使本书得以不断改进和完善。

本书的编写得到了电子科技大学研究生院和电子科技大学出版社的大力支持，在此向他们表示衷心感谢。本书编者借此机会向在我校该门工程硕士课程建设中做出重要贡献的李正良教授表示衷心感谢。

编　者

2007 年 12 月

目　录

第一章 矩阵分析基础

在自然科学与工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关，并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究．甚至有些是性质完全不同的，表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的．这就使矩阵成为数学中一个极其重要且应用广泛的工具，因而也就成为代数——特别是数值代数的一个主要研究对象，尤其是随着计算机的广泛应用，矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础．本章将介绍矩阵的一些基本知识，为后面各章提供必要的理论基础．

§1.1 向量与矩阵的范数

首先引出矩阵和向量的概念，给出本书中经常使用的基本符号．

定义 1 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列处的元，i 称为 a_{ij} 的行指标，j 称为 a_{ij} 的列指标；当 $n=1$ 时，称 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ 为 $m\times 1$ 列向量，当 $m=1$ 时，称 $(a_{11},\cdots,a_{1n})$ 为 $1\times n$ 行向量．

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或者 $(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$ 表示矩阵．如需指明矩阵的行数和列数，通常用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$．用小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{s},\boldsymbol{c}$ 或者 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 等表示向量，符号 $R^{m\times n}$ （$C^{m\times n}$）表示实(复)数域上所有 $m\times n$ 矩阵的集合．

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

为一个 2×3 矩阵.

n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1.1}$$

的系数可以组成一个 m 行 n 列矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵；而系数及常数项可以组成一个 m 行 $n+1$ 列矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

称为方程组的增广矩阵，我们将利用矩阵这一工具来研究线性方程组.

利用矩阵和向量的定义，线性方程组(1.1.1)可以写成矩阵的形式

$$Ax=b\tag{1.1.2}$$

在求解线性方程组(1.1.2)过程中，经常要估计误差的大小，判定算法的稳定性，这就需要利用向量和矩阵的范数.

向量范数是用来刻画向量大小的一种度量. 实数的绝对值，复数的模，向量的长度，都是抽象向量范数的原型. 下面给出向量范数的定义.

定义 2 若对于任意向量 $x\in C^n$ 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应，且满足

(1) 正定性 $\|x\|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时 $\|x\|=0$；

(2) 齐次性 $\|kx\|=|k|\|x\|$，$k\in C$；

(3) 三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x,y\in C^n$；

则称映射 $\|x\|$ 为向量 x 的向量范数. 条件(1)、(2)、(3)称为向量范数三公理.

由向量范数的定义可得范数的性质如下:

(1) 零向量的范数为 0;

(2) $\|-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$;

(3) $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时, $\left\|\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right\|=1$;

(4) $\big|\,\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\,\big|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

性质(1)、(2)、(3)直接由定义得出. 性质(4)的证明如下.

$$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

从而

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\geqslant\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|,$$

又

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\geqslant\|\boldsymbol{y}\|-\|\boldsymbol{x}\|,$$

那么

$$-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|,$$

于是

$$\big|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\big|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

例 1 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in C^n$, 则

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\boldsymbol{x}_i|,$$

都是 C^n 上的向量范数, 分别称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的 1-范数, 2-范数, ∞-范数.

证明 根据范数定义, 易证 $\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 满足范数的三个条件, 所以是向量范数. 下面证明 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 也是向量范数.

正定性和齐次性显然, 下面证明满足三角不等式.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in C^n$, 由 Cauchy 不等式有

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}|=\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i y_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}=\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2$$

其中 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)$, 所以有

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2&=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2=(x+y)^{\mathrm{H}}(x+y)\\&=x^{\mathrm{H}}x+x^{\mathrm{H}}y+y^{\mathrm{H}}x+y^{\mathrm{H}}y\\&\leqslant|x^{\mathrm{H}}x|+|x^{\mathrm{H}}y|+|y^{\mathrm{H}}x|+|y^{\mathrm{H}}y|\\&\leqslant\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2\\&=(\|x\|_2+\|y\|_2)^2,\end{aligned}$$

或

$$\|x+y\|_2\leqslant\|x\|_2+\|y\|_2,$$

即三角不等式成立，故 $\|x\|_2$ 是向量范数. 证毕

在矩阵分析与计算过程中，仅仅有向量范数还不够，还需要矩阵的范数.

定义 3 若对于任意矩阵 $A\in C^{m\times n}$ 都有一个实数 $\|A\|$ 与之对应，且满足

(1) 正定性 $\|A\|\geqslant 0$，当且仅当 $A=0$ 时 $\|A\|=0$；

(2) 齐次性 $\|kA\|=|k|\cdot\|A\|$，k 是常数；

(3) 三角不等式 $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$，$A,B\in C^{m\times n}$；

则称映射 $\|A\|$ 为矩阵 A 的矩阵范数. 条件(1)、(2)、(3)称为矩阵范数三公理.

由矩阵范数的定义可得范数的性质如下:

(1) 零矩阵的范数为 0;

(2) $\|-A\|=\|A\|$;

(3) $A\neq 0$ 时，$\left\|\dfrac{1}{\|A\|}A\right\|=1$；

(4) $\big|\,\|A\|-\|B\|\,\big|\leqslant\|A-B\|$.

例 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{1/2},$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}|a_{ij}|,$$

都是 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数.

注意到，如果把 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$ 看做 C^{mn} 中的一个向量，则 $C^{m\times n}$ 上的三种矩阵范数可以认为是 C^{mn} 上的向量范数，因此上面关于向量范数的性质对矩阵范数也

都成立，证明方法类似，并有下面的性质.

定理 1 $C^{m\times n}$ **上的矩阵范数都是等价的.**

定义 4 设任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n},\boldsymbol{B}\in C^{n\times l}$，如果矩阵范数$\|\cdot\|$恒有不等式

$$\|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|,$$

则称该矩阵范数是相容的.

例 3 证明矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$是相容的.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in C^{n\times l}$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\|_{m_1}&=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\,|b_{kj}|\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{l}|b_{kj}|\right)\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}|b_{kj}|\right)\\&=\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\|\boldsymbol{B}\|_{m_1}.\end{aligned}$$

证毕

在矩阵与向量的乘积运算中既出现了矩阵范数，又出现了向量范数，如何确定它们的关联呢？我们有如下定义

定义 5 设$\|\cdot\|_m$是$C^{n\times n}$上的矩阵范数，$\|\cdot\|_v$是C^n上的向量范数，若$\forall\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$和$\forall x\in C^n$都有

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_v\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_m\|\boldsymbol{x}\|_v,$$

则称矩阵范数$\|\cdot\|_m$与向量范数$\|\cdot\|_v$是相容的.

例 4 求证$C^{n\times n}$上的矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$与C^n上向量 1-范数相容.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_2)^T\in C^n$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Ax}\|_1&=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\\&=\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\|\boldsymbol{x}\|_1,\end{aligned}$$

这说明矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$与C^n上向量 1-范数相容. 证毕

对于任一向量范数，是否存在与该向量范数相容的矩阵范数呢？下面定理给

出了肯定的答案.

定理 2 设$\|x\|_v$是C^n上的向量范数，$A\in C^{n\times n}$，则

$$\|A\|_v=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\left(=\max_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v\right)$$

是与向量范数$\|x\|_v$相容的矩阵范数，称此范数为从属于向量范数$\|x\|_v$的算子范数.

证明 首先证明$\|A\|_v$确实是矩阵范数.

(1) 正定性

设$A\neq 0$，则存在非零向量$x_0\in C^n$，使$Ax_0\neq 0$，由向量范数的定义得知，$\|Ax_0\|_v>0$，$\|x_0\|_v>0$，于是$\|A\|_v\geqslant\dfrac{\|Ax_0\|_v}{\|x_0\|_v}>0$.

(2) 齐次性

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_v&=\max_{x\neq 0}\frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v}=\max_{x\neq 0}\frac{|\lambda|\cdot\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\\&=|\lambda|\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}=|\lambda|\cdot\|A\|_v.\end{aligned}$$

(3) 三角不等式

$$\begin{aligned}\|A+B\|_v&=\max_{x\neq 0}\frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v}\\&\leqslant\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v+\|Bx\|_v}{\|x\|_v}\\&\leqslant\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}+\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v}\\&=\|A\|_v+\|B\|_v,\end{aligned}$$

即$\|A\|_v$确实是矩阵范数. 下面证明相容性.

由$\|A\|_v=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$，知$\|A\|_v\geqslant\dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$，故不等式$\|Ax\|_v\leqslant\|A\|_v\|x\|_v$成立.

这就完成了定理的证明. 证毕

推论 1 设$\|x\|_v$是C^n上的向量范数，$A,B\hat{I}C^{n\times n}$，$\|A\|_v$是从属于$\|x\|_v$的算子范数，则它是相容的矩阵范数，即

$$\|AB\|_v\leqslant\|A\|_v\|B\|_v.$$

证明 根据定义

$$\|AB\|_v=\max_{x\neq 0}\frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v}\leqslant\max_{x\neq 0}\frac{\|A\|_v\|Bx\|_v}{\|x\|_v}$$

$$\leqslant\|A\|_v\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v}=\|A\|_v\|B\|_v.$$

证毕

上面给出了算子范数的定义和基本性质，下面给出几个特殊算子范数的计算公式.

定理 3 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$\|A\|_1$ 是从属于向量 1-范数的算子范数，则

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

称为矩阵 A 的 1-范数或列和范数.

证明 根据定义

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)\leqslant\max_{j}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

$$=\|A\|_1\|x\|_1,$$

故 $\|A\|_1$ 与 $\|x\|_1$ 是相容的. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，令

$$l=\sum_{i=1}^{m}|a_{is}|=\max_{j}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|,1\leqslant s\leqslant n,$$

则 $l=\|\alpha_s\|_1$，取 $e_s=(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)^T$，于是

$$\|Ae_s\|_1=\|\alpha_s\|_1=l\|e_s\|_1,$$

故

$$l=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\|A\|_1,$$

因此，$\|A\|_1$ 是从属于向量 1-范数的算子范数.

证毕

定理 4 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$\|A\|_\infty$ 是从属于向量 ∞-范数的算子范数，则

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

称为矩阵 A 的 ∞-范数或行和范数.

证明 根据定义，则