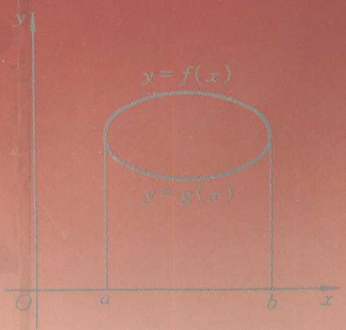
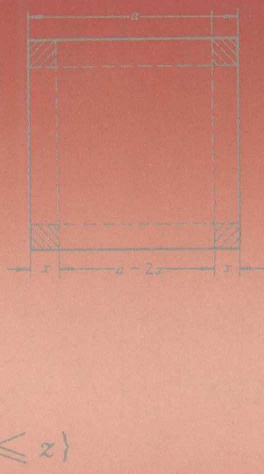
高等数学自学精粹

贺才兴　裘义端　主编





$$
\begin{aligned}
F_{\min}(z) &= P\{N \leqslant z\} = P\{\min(X,Y) \leqslant z\} \\
&= 1 - P\{\min(Y,Y) > z\} \\
&= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\
&= 1 - [1 - P\{X \leqslant z\}][1 - P(Y \leqslant z)] \\
F_{\min}(z) &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]
\end{aligned}
$$

上海交通大学出版社

高等数学自学精粹

贺才兴 裘义端 主编

上海交通大学出版社

高等数学自学精粹
主　　编　贺才兴　裘义端

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030
电话　64281208　传真　64683798
全国新华书店经销
上海交通大学印刷厂·印刷
开本：850×1168(mm)1/32　　印张：10.25　字数：266 千字
版次：1998 年 8 月　　第 1 版
印次：1998 年 8 月　　第 1 次　　印数：1—5050
ISBN 7—313—01993—9/O·136
定价：13.80 元

614

内 容 提 要

本书是作者按照全国高等教育自学考试指导委员会高等教育自学考试教材《高等数学(一)》(经济管理类专业)教材的内容,根据多年的教学实践和给参加自学考试的考生进行复习辅导所积累的丰富资料,根据对学生考试时典型错误的分析,针对自学考试的特点和要求而编写的。

本书内容翔实,突出了高等数学的基本内容、基本概念和基本要求,介绍了高等数学解题的基本思想和基本方法。本书共有8章,每章分为三个部分:第一部分为自学的基本要求和内容;第二部分为典型例题的选讲,具有相当的启发性和典型性;第三部分为自我检查题,即练习题,是针对教材中的习题而编写的,书中对每一习题均一一给出了解答。

本书除供经济类专业使用外,也可供其他专业的高等数学读者使用,不仅适用于广大自学考生,而且可供大学生复习、学习之用。

前　言

《高等数学》是高等院校一门重要的基础课。它在传授知识、启发学生思维和培养学生能力等方面都具有重要的作用。近年来，国家从造就和选拔人才的需要出发，编写了《高等数学(一)》自学考试大纲，出版了相应的自学教材，本书在编者多年教学实践的基础上，按照大纲和教材的要求，力求以较少的学时达到自学目的，努力处理好传授知识与培养能力的关系，以适应精练与自学相结合的要求。

本书标名为"精粹"，目的主要想尽量将高等数学的精华展示给读者，针对自学的特点，消除盲目性，少走弯路。本书内容充实，深浅得当，知识覆盖面广，文字通俗易懂，便于自学，对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精炼的归纳和总结。书中每章写有学习目的和要求，配备了典型例题和大量练习题，并有相应内容的自我检查题，对所有这些题目，我们都逐一给出了详尽的解答，解题方法力求简明扼要，步骤清楚，向读者揭示了高等数学的基本思想和基本方法，读者可从中学到举一反三、融会贯通的本领。

本书具有广泛的适用性。无论经济类或机电类，广大自学高等数学课程的读者和成人教育的师生等，都可用来作为辅导材料。

本书由贺才兴、裘义端主编，参加工作的还有张慰如、李舰等同志。编者衷心希望，本书的出版能帮助广大读者在自学成才的道路上更前进一步。

编　者

1997 年 9 月 1 日

目　录

第 1 章　函数及其图形

1.1　学习的目的与要求

1. 掌握集合的概念、集合的表示法以及它们之间的关系；掌握集合间并，交、补运算及其运算律。了解两集合之间映射的意义，从而了解映射与函数关系。

2. 理解函数的定义，会求函数定义域，掌握函数的单调、有界、奇偶、周期等特性。

3. 了解复合函数与反函数的概念，会分析复合函数的复合过程以及函数存在反函数的条件和求法。了解五种基本初等函数和初等函数概念。

4. 识记经济学上某些常见函数，对较简单的经济问题，会建立函数关系。

1.2　例题

例 1　设 $M=\{2,4,6\}$，$N=\{1,2,3,4,\}$，$E=\{4,5,6\}$，求 $(M\cup N)\cap E$。

解　$M\cup N=\{2,4,6\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,6\}$，

$(M\cup N)\cap E=\{1,2,3,4,6\}\cap\{4,5,6\}=\{4,6\}$。

例 2　设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$N=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，$G=\{x\mid |x|<1\}$，求 $(M\cap N)\cup G$。

解　$M\cap N=\{x\mid 0<x<2\}$，

$(M\cap N)\cup G=\{x\mid 0<x<2\}\cup\{x\mid |x|<1\}=\{x\mid -1<x<2\}$

例 3　如果集合 M 和 N 满足 $M\cup N=N$，那么 M 与 N 的关

系必是(　　)。

(A) $M=N$　　(B) $M\subset N$

(C) $M\subseteq N$　　(D) $M\supseteq N$

解　可用 Veen 氏图来示意与分析，如图 1.1。从图形上可以看出，若满足 $M\cup N=N$ 的话 M 既可以被 N 所包含，也可以与 N 相等，故因有：$M\subseteq N$ 关系式成立，应选择(C)。

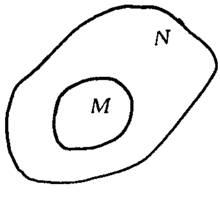


图 1.1

练习题 1.2.1 及解答

1. 用集合符号写出下列集合：

(1) 大于 30 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 外部一切点的集合；

解　(1) 设 A 表示所求集合，则 $A=\{x\mid x>30,x\in R\}$；

(2) 设 B 表示所求集合，则 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=25,x\in R,y\in R\}$；

(3) 设 C 表示所求集合，则 $C=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1,x\in R,y\in R\}$。

2. 按下列要求举例：(1) 一个有限集合；(2) 一个无限集合；(3) 一个空集；(4) 一个集合是另一个集合的子集。

解　(1) 例如，某学校的全体学生；

(2) 例如，全体有理数；

(3) 例如，$\{x\mid x^2+1=0,x\in R\}$；

(4) 例如，设集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 A 是集合 B 的子集。

3. 下列集合哪一个是空集 ϕ？

$A=\{x\mid x+5=5\}$，$B=\{x\mid x\in R$，且 $x^2+5=0\}$；$C=\{x\mid x>5$ 且 $x<5\}$。

解　集合 B,C 是空集 ϕ。

4. 设 $A=\{a,b,c\}$，下列式子中哪些是正确的？

(1) $\phi\in A$；　(2) $a\bar{\in} A$；　(3) $\{a\}\subset A$；　(4) $\phi\subset A$；

(5) $A\subset A$；　(6) $b\in A$；　(7) $b\subset A$

解　(3)，(4)，(5)，(6)是正确的。

5. 如果 $A=\{x|3<x<5,\ x\in R\}$，$B=\{x|x>4,\ x\in R\}$，求(1)$A\cup B$；(2) $A\cap B$。

解 (1) $A\cup B=\{x|x>3,\ x\in R\}$;

(2) $A\cap B=\{x|4<x<5,x\in R\}$。

6. 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$, $C=\{c,d\}$, 求 $A\cup B$, $B\cup C$, $A\cup C$, $A\cup A$, $A\cap B$, $A\cap C$, $(A\cup B)\cap C$, $A\cap A$。

解 $A\cup B=\{a,b,c\}$, $B\cup C=\{b,c,d\}$, $A\cup C=\{a,b,c,d\}$, $A\cup A=\{a,b\}$, $A\cap B=\{b\}$, $A\cap C=\phi$,

$(A\cup B)\cap c=\{a,b,c\}\cap\{c,d\}=\{c\}$ $A\cap A=\{a,b\}$。

7. 试证:若 $A\subset B$, $B\subset C$, 则 $A\subset C$。

证明 对任一 $x\in A$, 由于 $A\subset B$,故 $x\in B$, 又由于 $B\subset C$,所以也有 $x\in C$, 从而 $A\subset C$。

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x|\leqslant 2$, (2) $|x-5|\leqslant 1$, (3) $|x-1|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$

(4) $|x|>1$, (5) $|x+2|\geqslant 3$。

解 (1) $\{x||x|\leqslant 2,x\in R\}=[-2,2]$;

(2) $\{x||x-5|\leqslant 1,\ x\in R\}=\{x|-1\leqslant x-5\leqslant 1,x\in R\}=\{x|4\leqslant x\leqslant 6,x\in R\}=[4,6]$;

(3) $\{x||x-1|<\varepsilon,\varepsilon>0,x\in R\}=\{x|-\varepsilon<x-1<\varepsilon,\varepsilon>0,x\in R\}=\{x|1-\varepsilon<x<1+\varepsilon,\varepsilon>0,x\in R\}=(1-\varepsilon,1+\varepsilon),(\varepsilon>0)$;

(4) $\{x||x|>1,\ x\in R\}=\{x|x>1$ 或 $x<-1,\ x\in R\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;

(5) $\{x||x+2|\geqslant 3,\ x\in R\}=\{x|x+2\geqslant 3$ 或 $x+2\leqslant -3,x\in R\}=(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$。

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

(1) $|x-a|<\delta$,a 为常数,$\delta>0$;(2) $1<|x-2|<3$。

解 (1) $\{x||x-a|<\delta,\ x\in R\}=(a-\delta,a+\delta)$,如图 1.2 所示

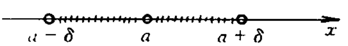


图 1.2

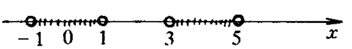


图 1.3

(2) $\{x|1<|x-2|<3,x\in R\}=\{x||x-2|>1$ 且 $|x-2|<3,\ x\in R\}=\{x|-1<x<1$ 或 $3<x<5,\ x\in R\}=(-1,1)\cup(3,5)$。如图 1.3 所示。

例 4 已知:(1) $A=R^+$, $B=R$, 对应法则是“取绝对值”,

(2) $A=\{x|x\in R,x\neq 0\}$, $B=R$, 对应法则“取倒数”,问以上对应,是否是从集合 A 到集合 B 的映射?

解 (1),(2)的对应,符合映射的两个对应条件,所以是一种

映射。

练习题 1.2.2 及解答

1. 设 X 是所有同心圆的集合，Y 为实数集合，若把同心圆与其直径建立对应关系，试验证这种对应关系构成从 X 到 Y 的映射。

解 因为题中所述对应关系满足以下两个条件：

(1) 对于集合 X 的每一个元素，即为一个同心圆，而这个同心圆的直径是一个实数，它是 Y 实数集合中的一个元素，因此，集合 X 中每一个元素均能按其对应法则与集合 Y 中的一个元素对应；

(2) 因为每个圆的直径是唯一的，所以对于集合 X 中每一个元素，集合 Y 仅有一个元素与之对应。

故题设中的对应是构成从集合 X 到集合 Y 的映射。

2. 请判断下列对应关系是否构成映射：

设 X 集合由 A,B,C 三个工厂构成，Y 集合由甲、乙、丙，丁四个商店构成，A,C 两个工厂产品分别由甲、丁两个商店销售，B 工厂产品由乙、丙两个商店共同销售。若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店建立对应关系(供销关系)，问这种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射。

解 这种对应关系不构成从集合 X 到集合 Y 的映射，因为集合 X 中的一个元素(如 B 工厂)，在集合 Y 中有两个元素(乙、丙商店)与之对应，这样就不符合映射的定义。

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 (1) $f(-2)$；(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；(3) $f\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$。

解 (1) $f(-2)=\dfrac{1}{1+(-2)}=\dfrac{1}{-1}=-1$；

(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x}{1+x}$；

(3) 由(2) 知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1+x}$，所以 $f\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=f\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=$
$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1+x}{1+2x}$。

例 6 下列各对函数是否等同，为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$,　$g(x)=2\ln x$；(2) $f(x)=3x^2-1$, $g(t)=3t^2-1$。

解　(1) 不等同。因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$；

(2) 等同。因为 $f(x)$ 与 $g(t)$ 的定义域与对应法则都是相同的所以是等同的。

例 7　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$；(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$；(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{3}-4\sqrt{2x+1}$。

解　(1)由于分母不能等于零，所以 $x\neq1$，又由于 $x>0$，故其定义域为 $x\neq1, x>0$，即 $(0,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 由于反正弦的定义域为 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant1$，即 $-3\leqslant x-1\leqslant3$，故其定义域为 $[-2,4]$。

(3) $f(x)$ 定义域为 $\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 定义域与 $4\sqrt{2x+1}$ 定义域的交集，只需求出 $4\sqrt{2x+1}$ 的定义域。由于被开方数要大于等于零，即 $2x+1\geqslant0$，其定义域为 $[-\dfrac{1}{2},+\infty]$；故 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,4]\cap[-\dfrac{1}{2},+\infty]$，即 $[-\dfrac{1}{2},4]$。

例 8　设 $f(x)$ 的定义域为 $[1,3]$，求下列函数的定义域。

(1) $f(x+1)$；(2) $f(kx)$ $(k\neq0)$。

解　按题意 $f(x)$ 的定义域为 $[1,3]$ 即 $1\leqslant x\leqslant3$，那末

(1) 对于 $f(x+1)$，有 $1\leqslant x+1\leqslant3$，故 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,2]$。

(2) 对于 $f(kx)$ $(k\neq0)$，有 $1\leqslant kx\leqslant3$，有 $\dfrac{1}{k}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{k}$。当 $k>0$ 时，其定义域为 $\left[\dfrac{1}{k},\dfrac{3}{k}\right]$，当 $k<0$ 时，其定义域为：$\left[\dfrac{3}{k},\dfrac{1}{k}\right]$。

例 9　设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求(1) $f(x-1)$；(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；(3) $\dfrac{1}{f(x)}$。

解　(1) $f(x-1)=\dfrac{(x-1)}{(x-1)+1}=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$；

(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{1}{1+x}$；

(3) $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{1+x}{x}=\dfrac{1}{x}+1$。

例 10　判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\cos x$；(2) $y=\cos x-\sin x$；(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解　(1) 因为 $(-x)\cos(-x)=-x\cos x$，所以 $y=x\cos x$ 为奇函数。

(2) 因为 $\cos(-x)-\sin(-x)=\cos x+\sin x$，所以 $y=\cos x-\sin x$ 为非奇非偶函数。

(3) 因为 $\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数。

例 11　判断下列函数的单调性：

(1) $f(x)=3x+1$；(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$。

解　(1) $f(x)=3x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，在定义域内任取二点 x_1,x_2（不妨设 $x_1<x_2$），有 $f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+1)-(3x_2+1)=3(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)=$

$3x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$内为单调增加函数。

(2)$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在定义域内任取二点 x_1,x_2(不妨设 $x_1<x_2$),有 $f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{1}{2}^{x_1}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}2^{x_2}}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}}$。由于 $2^{x_1+x_2}>0,2^{x_2}>2^{x_1}$,故有 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,故 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$内为单调减少函数。

例 12 指出下列函数由哪些简单函数复合而成:

(1) $g=\sqrt{3x+2}$; (2) $y=e^{\cos^2 x}$; (3) $y=\ln tg x^2$。

解 (1) 设中间变量为 u,令 $u=3x+2$,则 $y=\sqrt{3x+2}$可由简单函数 $y=\sqrt{u}$, $u=3x+2$ 复合而成。

(2) 设中间变量为 u,v,令 $u=v^2$, $v=\cos x$ 则函数 $y=e^{\cos^2 x}$ 是由简单函数 $y=e^u$, $u=v^2$, $v=\cos x$ 复合而成。

(3) 设中间变量 u,v,令 $u=tg v$, $v=x^2$ 则函数 $y=\ln tg x^2$ 是由简单函数 $y=\ln u$, $u=tg v$, $v=x^2$ 复合而成。

例 13 求函数 $y=2^x-1$ 的反函数。

解 知 $y=2^x-1$,即有 $2^x=y+1$,解得 $x=\log_2(y+1)$。

例 14 某工厂生产某产品,每日最多生产 100 单位,它的日固定成本为 130 元,生产一个单位产品的可变成本为 6 元。求该厂日总成本函数及平均单位成本函数。

解 设日总成本为 C,平均单位成本为 $\overline{C}$,日产量为 x,由于日总成本为固定成本与可变成本之和。故有,日总成本函数为 $C=C(x)=130+6x$,定义域为$[0,100]$。

平均单位成本函数为 $\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{130}{x}+6$,定义域为$(0,100]$。故其反函数为:$y=\log_2(x+1)$。

练习题 1.2.3 及解答:

1. 求下列函数值:

(1) 若 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$,求 $f(2),f(-2),f(t^2),f\left(\frac{1}{t}\right)$;

(2) 若 $\varphi(t)=t^3+1$,求 $\varphi(t^2),[\varphi(t)]^2$。

解 (1) $f(2)=2\cdot 4^{2-2}=2$; $f(-2)=(-2)\cdot 4^{-2-2}=-\frac{1}{128}$;

$f(t^2)=t^2\cdot 4^{t^2-2}=\frac{1}{16}t^2 4^{t^2}$, $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1}{t}-2}=\frac{1}{16t}4^{\frac{1}{t}}$

(2) $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$, $[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$。

2. 求下列函数值:

(1) 若 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(0),f(a),f(a+b)$;

(2) 若 $g(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $g(3),g(2),g(0),g(0.5),g(-0.5)$;

(3) 若 $\varphi(x)=\begin{cases}3+x^4, & -\infty<x\leqslant 0\\ 2^x, & 0<x<+\infty\end{cases}$ 求 $\varphi(-2),\varphi(0),\varphi(2)$;

(4) 若 $\psi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$,求 $\psi(1),\psi\left(\frac{\pi}{4}\right),\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$。

解 (1) $f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2$; $f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$; $f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}$。

(2) $g(3)=3-1=2$; $g(2)=2-1=1$; $g(0)=2$; $g(0.5)=2$; $g(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(3) $\varphi(-2)=3+(-2)^4=3+16=19$;
$\varphi(0)=3+0^4=3$; $\varphi(2)=2^2=4$

(4) $\psi(1)=0$; $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

3. 下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\ln x^2$, $\varphi(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $\psi(x)=1$。

解 (1) 不相同。因为 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的定义域不相同，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

(2) 相同，由于 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 的定义域相同，均为 $(-\infty,+\infty)$；其次，$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，与 $\psi(x)=1$ 的对应关系亦相同，所以，$f(x)$ 与 $\psi(x)$ 是相同的。

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+4}$；

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$；

(5) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；　　(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

(7) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$。

解 (1) 因为 y 的分母不能为零，故 $x^2-3x+2\neq 0$，解得：$x\neq 1, x\neq 2$，所以该函数的定义域为。$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

(2) 因为被开方数不能为负数，故 $3x+4\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -\dfrac{4}{3}$，所以该函数的定义域为 $[-\dfrac{4}{3},+\infty]$。

(3) 因为被开方数不能为负数，故 $a^2-x^2\geqslant 0$，解得：$-|a|\leqslant x\leqslant |a|$，所以该函数的定义域为。$[-|a|,|a|]$。

(4) 设 $y_1=\dfrac{1}{1-x^2}$，$y_2=\sqrt{x+4}$，则 $y=y_1+y_2$。对于 y_1，因为分母不能为零，即 $1-x^2\neq 0$，解得 $x\neq\pm 1$，故 y_1 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；对于 y_2，因为被开方数不能为负数，即 $x+4\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -4$，故 y_2 的定义域为 $[-4,+\infty)$。使 y_1, y_2 同时有意义的部分是 y 的定义域，所以该函数的定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(5) 因为真数不能为负数和等于零，即 $\dfrac{x}{x-2}>0$，解得：$x-2>0, x<0$，所以该函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

(6) 设 $y_1=\sqrt{\sin x}$，$y_2=\sqrt{16-x^2}$，则 $y=y_1+y_2$；对于 y_1，因为 y_1 的被开方数不能为负数，即 $\sin x\geqslant 0$，故 y_1 的定义域为：$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$；对于 y_2，因为被开方数不能为负，即 $16-x^2\geqslant 0$，故 y_2 的定义域为 $-4\leqslant x\leqslant 4$。使 y_1, y_2 同时有意义的部分是 y 的定义域。所以 y 的定义域为 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$。

(7) 从反正弦函数的定义域可知：$-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1$，解得，$1\leqslant x\leqslant 5$，所以

该函数的定义域为$[1,5]$。

5. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域并作出函数图形。

解 本题所求函数为分段函数，其定义域为分段函数有意义部分之和，即 $\{x\,|\,|x|<1\}\cup\{x\,|\,1<|x|<2\}$，解得，该函数的定义域为$(-2,2)$。

其函数的图形如图 1.4 所示。

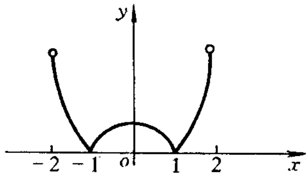


图 1.4

6. 某产品年产量为 x 台，每台售价为 400 元。当年产量在 1000 台以内时，可以全部售出；当年产量超过 1000 台时，经广告宣传后又可以再多出售 200 台，每台平均广告费 40 元，生产再多，本年就售不出去，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数。

解 按题意，本年度的销售总收入函数 $R(x)$可用如下的分段函数表出：

$$R(x)=\begin{cases}400x, & 0\leqslant x<1000,\\ 400\times 1000+(400-40)(x-1000), & 1000\leqslant x\leqslant 1200,\\ 400\times 1000+(400-40)\times 200, & x>1200,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}400x, & 0\leqslant x<1000,\\ 400000+360(x-1000), & 1000\leqslant x\leqslant 12000,\\ 472000, & x>12000。\end{cases}$$

7. 设生产与销售某产品的总收入 R 是产量 x 的二次函数。经统计得知，当产量 $x=0,2,4$ 时，总收入 $R=0,6,8$，试确定总收入 R 与产量 x 的函数关系。

解 设总收入函数 $R(x)=ax^2+bx+c$，据题意，有 $R(0)=0$，$R(2)=6$，$R(4)=8$，得方程组

$$\begin{cases}c=0\\ 4a+2b+c=6\\ 16A+4b+c=8\end{cases}。$$

解得：$a=-\frac{1}{2}$，$b=4$，$c=0$。

所以总收入函数 $R(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$。

8. 判别下列函数的单调性：

(1) $y=3x-6$；(2) $y=2^{x-1}$；(3) $y=\log_a x$。

解 (1) $y=3x-6$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。设 x_1,x_2 为定义域中任意两点，且 $x_1<x_2$，则 $y(x_1)-y(x_2)=3x_1-6-(3x_2-6)=3(x_1-x_2)<0$，故 $y(x_1)<y(x_2)$，所以，$y=3x-6$ 在定义域内是严格单调增加的函数。

(2) $y=2^{x-1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。设x_1,x_2为定义域内任意两点，且$x_1<x_2$,则$y(x_1)-y(x_2)=2^{x_1-1}-2^{x_2-1}=2^{x_1-1}(1-2^{x_2-x_1})<0$,因为$2^{x_1-1}>0$,而$1-2^{x_2-x_1}<0$,故$y(x_1)<y(x_2)$,所以$y=2^{x-1}$在定义域内是严格单调增加函数。

(3) $y=\log_a x$的定义域为$(0,+\infty)$,设x_1,x_2为定义域内任意两点，且$x_1<x_2$则

$$y(x_1)-y(x_2)=\log_a x_1-\log_a x_2=\frac{\lg x_1}{\lg a}-\frac{\lg x_2}{\lg a}\ (\text{换底公式})=$$

$\dfrac{\lg x_1-\lg x_2}{\lg a}=\dfrac{\lg\dfrac{x_1}{x_2}}{\lg a}$,由于$x_1<x_2$,故$\lg\dfrac{x_1}{x_2}<0$,因此,当$a>1$时,$y(x_1)-y(x_2)<0$,此时,$y=\log_a x$在定义域内是严格单调增加的。

当$0<a<1$时,$y(x_1)-y(x_2)>0$,此时,$y=\log_a x$在定义域内是严格单调减少的。

9. 判断下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数:

(1) $f(x)=x^4-2x^2$; (2) $f(x)=x-x^2$;

(3) $f(x)=\operatorname{tg}x$; (4) $f(x)=\sin x-\cos x$;

(5) $f(x)=x\sin x$; (6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(7) $f(x)=ln\dfrac{1+x}{1-x}$; (8) $f(x)=a^x+a^{-x}$;

(9) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$; (10) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解 (1) 因为$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$,所以$f(x)=x^4-2x^2$是偶函数;

(2) 因为$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2=-(x+x^2)$,它不等于$f(x)$或$-f(x)$,所以$f(x)=x-x^2$为非奇非偶函数。

(3) 因为$f(-x)=\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x=-f(x)$,所以$y=\operatorname{tg}x$为奇函数;

(4) 因为$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$,它不等于$f(x)$也不等于$-f(x)$,所以$f(x)=\sin x-\cos x$为非奇非偶函数;

(5) 因为$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$,所以$y=x\sin x$为偶函数;

(6) 因为$f(-x)=\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$,所以$f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$是偶函数;

(7) 因为$f(-x)=\ln\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=$