组合序列与矩阵

谭明术 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍了常见经典组合序列、线性递归关系的性质与矩阵应用，其中也包括作者的研究成果. 全书共分 8 章，分别介绍了二项式系数、Stirling 数、Fibonacci 数等组合数、发生函数、反演、Möbius 反演、整数分拆、Bernoulli 数、Euler 数、Bell 多项式等的基本性质以及它们推广后的序列组成的矩阵及性质和相关最新研究成果. 同时介绍了一维、二维线性递推序列以及 Riordan 阵列与矩阵变换和矩阵的幂，试图对前人在组合序列与矩阵的关系上的研究成果进行较系统的归类总结.

本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学、计算机科学与技术、信息安全等专业的大学生和研究生的学习参考书，也可作为理工类大学教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

组合序列与矩阵/谭明术著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-020621-3

I. 组… II. 谭… III. ①序列 ②矩阵 IV. 017 0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031092 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：李奕萱
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—2 500 字数：374 000

定价：58.00 元

前　言

经典组合序列一直是组合学界的热门课题之一, 它们既老又新, 既易又难. 说它们老, 是因为它们已经具有相当长的历史. 位于西安东部的半坡村文化遗址距今已五六千年, 人们发现在那里出土的陶器残片上有许多小孔, 这些小孔的数目形成一个等差数列. 朱世杰于 1299 年的《算学启蒙》中, 发展了沈括的隙积术、杨辉的堆垛术, 求出了各种高阶等差数列的和. 很久以来, 就有不少人对二项式系数、Fibonacci 数、Lah 数、Catalan 数、Stirling 数、Eulerian 数、Bernoulli 数、Bell 数、Euler 数等进行了研究, 证明它们在组合数学中起着非常重要的基础性作用, 许多离散数学问题都与它们具有密切的联系. 说它们新, 是因为这些序列至今还吸引着不少数学工作者, 对它们的研究特别是应用研究从未间断过, 因为一个新的有趣的结果必将激起新的研究热情. 说它们易, 就是它们往往看起来是那么简单, 那么诱人, 所以有不少数学爱好者加入了研究者的行列. 说它们难, 是因为其研究的历史太久, 研究者很多, 所以要想在这方面有创新和突破并不是容易的事情. 对组合序列的研究方法有许多, 常用的有递推法、归纳法、发生函数法、反演技术以及矩阵法等. 1968 年, Riordan 在《组合恒等式》中, 利用递推关系、发生函数、反演技术和算子理论, 系统地阐述了组合恒等式及相关理论, 为寻找和证明组合恒等式奠定了良好的基础. 1972 年, Gould 在他的《组合恒等式》中, 列举了 555 个恒等式.

我们知道, 两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$ 按矩阵普通乘法: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 有 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$, 此等式与 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 是相互等价的. 这说明在恒等式与矩阵乘法之间可以架起一道很有利用价值的桥梁. 虽然人们在研究组合序列时, 自觉不自觉地用到了矩阵方法, 但目前还没有关于这方面的系统论述. 同时由于不断丰富的成果, 要进行很好的归类和系统化, 还有待进一步完善.

作者试图通过本书, 介绍基本组合序列的基本知识以及与其相关的矩阵及应用, 目的是让读者通过此书对其产生浓厚的兴趣, 吸引更多的组合数学工作者.

由于时间仓促, 加之本人水平有限, 疏漏和不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

谭明术

2007 年 12 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

1.1　二项式系数

之所以把二项式系数作为本书的开始, 是因为组合序列都因它而起. 二项式系数由来已久, 世界上公认其是由我国数学家贾宪发现的 (约 11 世纪上半叶). 1261 年, 杨辉在《详解九章算法》中提到由贾宪述及的数字三角形, 朱世杰在 1303 年再次给予确认. 大约在公元前 1000 年, 印度的 Brahagupta 研究了 $(a+b)^3$, 激发了另一个与贾宪同时代的阿拉伯数学家 al-Karaji 对此的研究. 在欧洲, 虽然有很多人比 Pascal(1623~1662) 早研究二项式系数, 但 Pascal 在 1654 年最先用归纳法证明了这个数字三角形的性质, 并且第一次正式提出这个数字三角形是二项展开式的系数表, 他在《论算术三角形》(*Treatise on the Arithmetical Triangle*, 1665) 中做了大量原创性的工作并发现了许多恒等式, 人们将二项式展开系数表称为 Pascal 三角形[148](或杨辉三角形). 自此, 对 $\binom{n}{k}$ 及各种推广形式的研究吸引了不少数学工作者, 因其在组合数学中的基础性作用而备受关注..

二项式系数定义为

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}, & \text{整数}k\geqslant 0,\\[2mm] 0, & \text{整数}k<0.\end{cases}$$

下面列出最基本的 10 个二项式系数恒等式 (其中, $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$):

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad \text{整数 } n\geqslant k\geqslant 0;$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\quad \text{整数 } n,k\geqslant 0;$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},\quad \text{整数 } k>0;$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},\quad \text{整数 } k>0;$$

$$\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{k-n-1}{k},\quad \text{整数 } k>0;$$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},\quad \text{整数 } m,k\geqslant 0;$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\quad \text{整数 } n\geqslant 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}=\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{r+n}{n}$$

$$=\binom{r+n+1}{n},\quad \text{整数 } n\geqslant 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1},\quad \text{整数 } m,n\geqslant 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n},\quad \text{整数 } n\geqslant 0\ (\text{Vandermonde 公式}).$$

二项式系数的乘积的和:

$$\sum_{k}\binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{m+n},\quad \text{整数 } m,n;$$

$$\sum_{k}\binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k}=\binom{l+s}{l-m+n},\quad \text{整数 } l\geqslant 0,m,n;$$

$$\sum_{k}\binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k}(-1)^k=(-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l},\quad \text{整数 } l\geqslant 0,m,n;$$

$$\sum_{k\leqslant l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k=(-1)^{l+m}\binom{s-m-1}{l-m-n},\quad \text{整数 } l,m,n\geqslant 0;$$

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n}=\binom{l+q+1}{m+n+l},\quad \text{整数 } l,m\geqslant 0,\quad \text{整数 } n\geqslant q\geqslant 0.$$

用

$$(1+z)^x=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}z^k,\quad |z|<1$$

可将 $\binom{n}{k}$ 推广, 其中, z,x 为任意复数, 即

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

对于整数 $a,b,c\geqslant 0$, 有

$$\sum_{k}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+a}{b+k}=\frac{(a+b)!}{a!b!},$$

$$\sum_{k}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}=\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$

一般地, 对于非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 记 $\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1, a_2, \cdots, a_n} = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}$, 有

$$\sum_{k_{ij}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i<j<n} k_{ij}} \prod_{1\leqslant i<j<n}\binom{a_i+b_j}{a_j+k_{ij}} \prod_{i\leqslant j<n}\left(a_n+\sum_{i<j}^{a_j+a_n} k_{ij}-\sum_{i>j} k_{ij}\right)$$
$$=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1, a_2, \cdots, a_n},$$

这里的和是对 $\binom{n-1}{2}$ 个指数变量 k_{ij} 求的.

1.2 Stirling 数

Stirling 数是以 Jame Stirling(1692~1770) 的名字命名的, 这些数有两种形式, 通常称为第一类 Stirling 数和第二类 Stirling 数.

第一类 (有符号)Stirling 数 $s(n,k) = (-1)^{n-k}s(n,k)$, Stirling(无符号) 数 $s(n,k)$ 表示将 n 个元素安排成 k 个轮换 (而不是子集) 的方式数, 称为"n 轮换 k". 轮换就是循环排列. 例如, 轮换 $[A,B,C,D] = [B,C,D,A] = [C,D,A,B] = [D,A,B,C]$, 它不同于 $[A,B,D,C]$ 或 $[D,C,B,A]$. 有 11 种不同方式从 4 个元素来形成 2 个轮换:

$$[1,2,3][4]; \quad [1,2,4][3]; \quad [1,3,4][2]; \quad [2,3,4][1]; \quad [1,3,2][4];$$

$$[1,4,2][3]; \quad [1,4,3][2]; \quad [2,4,3][1]; \quad [1,2][3,4]; \quad [1,3][2,4]; \quad [1,4][2,3].$$

当 $n>0$ 时, 从任何 n 个元素的集合能形成 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 个轮换 (有 $n!$ 个排列, 且每个对应于它们的 n, 因为它的任何一个元素都能列在第一个), 所以有 $s(n,1) = (n-1)!$. 由轮换数的定义可得出递推:

$$s(n,k) = (n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1), \quad \sum_{k=0}^{n} s(n,k) = n!. \tag{1.1}$$

对于任意整数 $n, k, n \geqslant k \geqslant 0$, x 为一变量, 设

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1), \quad \langle x\rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1). \tag{1.2}$$

用代数定义第一类 Stirling 数为

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \quad \langle x\rangle_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, n \geqslant k \geqslant 0. \tag{1.3}$$

下面是第一类有符号 Stirling 数 $s(n,k)$ 的值：

$$s(n,k) = \sum_{h=0}^{n-k}(-1)^h\binom{n-1+h}{n-k+h}\binom{2n-k}{n-k-h}S(n-k+h,h)$$
$$= \sum_{0\leqslant j\leqslant h\leqslant n-k}(-1)^{j+h}\binom{h}{j}\binom{n-1+h}{n-k+h}\binom{2n-k}{n-k-h}\frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!}. \tag{1.4}$$

第一类无符号 Stirling 数值见表 1.1.

表 1.1　第一类无符号 Stirling 数值表

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	2	3	1				
4	6	11	6	1			
5	24	50	35	10	1		
6	120	274	225	85	15	1	
7	720	1764	1624	735	175	21	1

$s(n,k)$ 也可表示成 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中所有 $n-k$ 个不同的整数乘积之和[57]：

$$s(n,k) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}\leqslant n-1} i_1 i_2\cdots i_{n-k}. \tag{1.5}$$

这种乘积共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个. 例如,

$$s(6,2) = 1\cdot2\cdot3\cdot4+1\cdot2\cdot3\cdot5+1\cdot2\cdot4\cdot5+1\cdot3\cdot4\cdot5+2\cdot3\cdot4\cdot5 = 274.$$

第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 是把 n 个元素的集合 X 划分为 k 个不相交的非空子集合 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的划法数, 或解释为将 n 个不同的球放入 k 个相同的盒子里且不允许有空盒的放法数. 根据这个组合定义可递推得到

$$S(n,k) = kS(n-1,k)+S(n-1,k-1). \tag{1.6}$$

其代数定义为

$$\begin{cases} x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(x)_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)\langle x\rangle_k, \\ (x)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)x^k. \end{cases} \tag{1.7}$$

下面是第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 的值 (显式表示, 具体数值见表 1.2)[57]:

$$S(n,k)=\sum_{c_1+c_2+\cdots+c_k=n-k}1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k}. \tag{1.8}$$

表 1.2 第二类 Stirling 数值表

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

换句话说, 第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 是 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中所有 $n-k$ 个不必互异的整数乘积的和 $\left(\text{该种乘积共有 }\binom{n-1}{k-1}\text{ 个}\right)$.

它的另一个直接表示为

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{j}(k-j)^n=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n. \tag{1.9}$$

$s(n,k),S(n,k)$ 的一些特殊值如下:

$$\begin{aligned}
&S(n,0)=s(n,0)=0,\quad n\neq 0,\quad S(0,0)=s(0,0)=1,\\
&S(n,1)=1,\quad n>0,\quad s(n,1)=(n-1)!,\quad n>0,\\
&S(n,n-1)=s(n,n-1)=\binom{n}{2},\quad S(n,n)=s(n,n)=\binom{n}{n}=1,\\
&S(n,k)=s(n,k)=\binom{n}{k}=0,\quad k>n,\\
&S(n,2)=2^{n-1}-1,\quad n>0,\quad s(n,2)=(n-1)!H_{n-1},\quad n>0,
\end{aligned}$$

其中, H_n 是调和数 $H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

反演关系:

$$\sum_k(-1)^{n-k}s(n,k)S(k,m)=\delta_{mn},\quad \sum_k(-1)^{n-k}S(n,k)s(k,m)=\delta_{mn}, \tag{1.10}$$

其中, Kronecker 记号 $\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$

$S(n,k)$ 另外的一些基本等式 (可参见文献 [225]):

$$S(n+1,m+1)=\sum_k\binom{n}{k}S(k,m);$$

$$S(n,m)=\sum_k(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S(k+1,m+1)=\sum_{k=m}^{n}S(k-1,m-1)m^{n-1};$$

$$s(n+1,m+1)=\sum_k\binom{k}{m}s(n,k);$$

$$s(n,m)=\sum_k(-1)^{m-k}\binom{k}{m}s(n+1,k+1);$$

$$m!S(n,m)=\sum_k(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)k!\binom{k-1}{m-1};$$

$$S(n+1,m+1)=\sum_{k=0}^{n}(m+1)^{n-k}S(k,m);$$

$$S(m+n+1,m)=\sum_{k=0}^{m}kS(n+k,k);$$

$$s(m+n+1,m)=\sum_{k=0}^{m}(n+k)s(n+k,k);$$

$$\binom{n}{m}=\sum_k S(n+1,k+1)s(k,m)(-1)^{m-k};$$

$$S(n,n-m)=\sum_k\binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k}s(m+k,k);$$

$$s(n,n-m)=\sum_k\binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k}S(m+k,k);$$

$$S(n,l+m)\binom{l+m}{l}=\sum_k S(k,l)S(n-k,m)\binom{n}{k};$$

$$s(n,l+m)\binom{l+m}{l}=\sum_k s(k,l)s(n-k,m)\binom{n}{k};$$

$$s(n+1,m+1)=\sum_{k=0}^{n}s(k,m)(n)_{n-k}=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{s(k,m)}{k!};$$

$$(n-m)!\binom{n}{m}=\sum_k s(n+1,k+1)S(k,m)(-1)^{m-k},\quad n\geqslant m.$$

1.3 Fibonacci 数

意大利数学家 Leonardo Fibonacci(1170~1240) 写有《算盘书》等 5 部著作, 他在《算盘书》中的第三部分, 提出了经久不衰的兔子问题. 问题是这样的: 在一年之初, 把一对雌雄兔子放进围栏内, 从第二个月开始, 每月生出雌雄一对小兔子, 每对小兔子从它们出生的第二个月开始每月生出雌雄一对小兔子. 问一年后, 栏内有多少对兔子?

Fibonacci 数列是一个典型的递推数列之一:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \ F_1 = 1.$$

Lucas 普及了 Fibonacci 数, 并引出了 Lucas 数 $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, Lucas 数 L_n 也可定义为满足下面关系的序列:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad L_0 = 2, \ L_1 = 1.$$

Fibonacci 数与 Lucas 数的值见表 1.3.

表 1.3 Fibonacci 数与 Lucas 数

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Fibonacci 序列的发生函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} F_n x^n \\ &= \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\hat{\varphi} x}\right), \end{aligned}$$

其中, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803, \hat{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61803$, φ 称为黄金分割率, 用来纪念 Phidias.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}}{\varphi - \hat{\varphi}}.$$

此公式通常称为 Binet(1786~1856) 公式. 1843 年, 他找到了特征根[32] 由 $\varphi, \hat{\varphi}$ 表示的 Fibonacci 数.

1963 年, 美国创办并开始出版专门的学术刊物 *The Fibonacci Quarterly* 杂志, 专门发表有关 Fibonacci 数与 Lucas 数的研究文章.

1680 年, 法国天文学家 Gassini 提出了关于 Fibonacci 数最早的定理:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n > 0.$$

经过对 Fibonacci 数数百年的研究, 人们已发现了许多相关结论, 下面仅介绍有关 Fibonacci 数的一些基本等式. 等式中 $F(n)$ 等同于 F_n, $L(n)$ 等同于 L_n.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{10^{n+1}} = \frac{1}{89}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n)} = 3.35988566$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F(n+1)F(n)} = \varphi - 1$;

(5) $F(n)^2 + 2F(n-1)F(n) = F(2n)$;

(6) $F(n+1)^2 + F(n)^2 = F(2n+1)$;

(7) $F(n)^2 - F(n+r)F(n-r) = (-1)^{n-r}F(r)^2$;

(8) $F(n+1)^2 - F(n)^2 = F(n+2)F(n-1)$;

(9) $F(n+3)^2 + F(n)^2 = 2[F(n+1)^2 + F(n+2)^2]$;

(10) $F(n+1)F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n$;

(11) $F(n+k+1)^2 + F(n-k)^2 = F(2k+1)F(2n+1)$;

(12) $F(n+1)^2 - F(n-1)^2 = F(2n)$;

(13) $\displaystyle\left[\frac{L(n) + \sqrt{5}F(n)}{2}\right]^k = \frac{L(kn) + \sqrt{5}F(kn)}{2}$;

(14) $\displaystyle\left[\frac{L(n) - \sqrt{5}F(n)}{2}\right]^k = \frac{L(kn) - \sqrt{5}F(kn)}{2}$;

(15) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$;

(16) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(i) = (-1)^n F(n-1) - 1$;

(17) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L(i) = L(n+2) - 1$;

(18) $\sum_{i=a}^{n} F(i) = F(n+2) - F(a+1);$

(19) $\sum_{i=a}^{n} L(i) = L(n+2) - L(a+1);$

(20) $\sum_{i=0}^{n} F(2i) = F(2n+1) - 1, \quad n \geqslant 0;$

(21) $\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n), \quad n \geqslant 1;$

(22) $\sum_{i=1}^{n} L(2i-1) = L(2n) - 2;$

(23) $\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} F(i-1) = 2^n - F(n+2);$

(24) $\sum_{i=0}^{n} 2^i L(i) = 2^{n+1} F(n+1);$

(25) $\sum_{i=0}^{n} F(3i-1) = \frac{F(3n+1)+1}{2};$

(26) $\sum_{i=0}^{n} F(3i) = \frac{F(3n+2)-1}{2};$

(27) $\sum_{i=0}^{n} F(3i+1) = \frac{F(3n+3)}{2};$

(28) $\sum_{i=0}^{n} F(4i+2) = F(2n+1)F(2n+3) - 1;$

(29) $\sum_{i=0}^{n} F(4i+1) = F(2n+1)F(2n+2);$

(30) $\sum_{i=0}^{n} F(4i) = F(2n+1)^2 - 1;$

(31) $\sum_{i=0}^{n} F(4i+3) = F(2n+3)F(2n+2);$

(32) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i L(n-2i) = 2F(n+1);$

(33) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}L(2n-2i+1)=F(2n+2)$;

(34) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F(i)}{2^{i}}=2$;

(35) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{L(i)}{2^{i}}=6$;

(36) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F(i)}{r^{i}}=\frac{r}{r^{2}-r-1}$;

(37) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{L(i)}{r^{i}}=2+\frac{r+2}{r^{2}-r-1}$;

(38) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iF(i)}{2^{i}}=10$;

(39) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iL(i)}{2^{i}}=22$;

(40) $\sum_{i=1}^{2n}F(i)F(i-1)=F(2n)^{2}$;

(41) $\sum_{i=1}^{2n}L(i)L(i-1)=L(2n)^{2}-4$;

(42) $\sum_{i=1}^{2n+1}F(i)F(i-1)=F(2n+1)^{2}-1$;

(43) $\sum_{i=1}^{2n+1}L(i)L(i-1)=L(2n+1)^{2}-5$;

(44) $\sum_{i=0}^{n-1}F(2i+1)^{2}=\frac{F(4n)+2n}{5}$;

(45) $\sum_{i=0}^{n-1}L(2i+1)^{2}=F(4n)-2n$;

(46) $\sum_{i=1}^{n}F(i)^{2}=F(n)F(n+1)$;

(47) $\sum_{i=1}^{n}L(i)^{2}=L(n)L(n+1)-2$;

(48) $\sum_{i=1}^{2n-1} L(i)^2 = 5F(2n)F(2n-1);$

(49) $\sum_{i=0}^{n} F(i)L(n-i) = (n+1)F(n);$

(50) $\sum_{i=1}^{n} L(2i)^2 = F(4n+2) + 2n - 1;$

(51) $\sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} = F(n);$

(52) $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-i-1}{i} = F(n);$

(53) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{2i} = F(2n+1);$

(54) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{2i+1} = F(2n);$

(55) $5\sum_{i=0}^{n} F(i)F(n-i) = \begin{cases} (n+1)L(n) - 2F(n+1), \\ nL(n) - F(n); \end{cases}$

(56) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(p-k) = F(p+n);$

(57) $\sum_{i=0}^{n} L(i)L(n-i) = \begin{cases} (n+1)L(n) + 2F(n+1), \\ (n+2)L(n) + F(n); \end{cases}$

(58) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} F(i) = F(2n+1) - 1;$

(59) $F(n)F(m+1) - F(m)F(n+1) = (-1)^m F(n-m);$

(60) $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L(2i) = 5^n L(2n);$

(61) $F(n) = F(m)F(n+1-m) + F(m-1)F(n-m);$

(62) $\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} L(2i) = 5^{n+1} F(2n+1);$

(63) $F(n-2)F(n-1)F(n+1)F(n+2) + 1 = F(n)^4;$

(64) $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L(i)^2 = 5^n L(2n);$

(65) $\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}F(i)^2=5^nF(2n+1)$;

(66) $\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}L(i)^2=5^{n+1}F(2n+1)$;

(67) $F(3n)=F(n+1)^3+F(n)^3-F(n-1)^3$;

(68) $\sum_{i=0}^{\infty}5^i\binom{n}{2i}=2^{n-1}L(n)$;

(69) $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f(n)^if(n-1)^{k-i}F(i)=F(kn)$;

(70) $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f(n)^if(n-1)^{k-i}L(i)=L(kn)$;

(71) $F(n)F(n+1)=F(n-1)F(n+2)+(-1)^{n-1}$;

(72) $\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}F(2i)=5^nF(2n)$;

(73) $F(n+1)F(m+1)-F(n-1)F(m-1)=F(n+m)$;

(74) $\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}F(2i)=5^nL(2n+1)$;

(75) $F(n+m)=F(m)F(n+1)+F(m-1)F(n)$;

(76) $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}=F(2n+3)$;

(77) $F(n+i)F(n+k)-F(n)F(n+i+k)=(-1)^nF(i)F(k)$;

(78) $\sum_{i=0}^{\infty}5^i\binom{n}{2i+1}=2^{n-1}F(n)$;

(79) $F(n+1)F(n+2)F(n+6)-F(n+3)^3=(-1)^nF(n)$;

(80) $\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}F(i)^2=5^{n-1}L(2n)$;

(81) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F(i)=F(2n)$;

(82) $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}2^iF(i)=F(3n)$;

(83) $F(a)F(b)-F(c)F(d)=(-1)^r[F(a-r)F(b-r)-F(c-r)F(d-r)]$,