高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微积分

◎ 杨桂华 梁建英 主编

高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微 积 分

杨桂华 梁建英 主编

高等教育出版社

内容提要

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用，不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程和差分方程简介。各章配有循序渐进、难度适当的习题，书末附有各章习题参考答案。

教材内容处理上在不影响本学科的系统性、科学性的前提下，力求使基本概念引入自然、形象和直观，有意识地融入数学文化的教育。尽可能地联系经济管理领域中的实际问题，培养学生解决实际问题的能力，并注意到培养学生的运算能力、解题方法和技巧。本教材可供经济管理类本科各专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/杨桂华，梁建英主编．—北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023911-9

Ⅰ.微…　Ⅱ.①杨…②梁…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第042064号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　张申申　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　余　杨　**责任校对**　杨凤玲　**责任印制**　尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京东光印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年5月第1版
印　　张	20.75	印　　次	2008年5月第1次印刷
字　　数	380 000	定　　价	26.00元

物料号　23911-00

前　　言

随着高等教育规模快速发展，为全面贯彻落实科学发展观，切实把高等教育重点放在提高质量上，教育部、财政部实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，其中教材建设是这一教学质量工程的重要内容。在这样的背景下，编写一套适合高等学校经济管理类各专业便于教、便于学的基础数学教材是我们多年的心愿，也是我们教学一线从事多年教学的老师们义不容辞的责任。在高等教育出版社大力支持下，我们组织了有三十余年教学经验的老师，在省级精品课教案的基础上，编写了这套教材。这套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。该套教材内容框架是根据教育部数学与统计教学指导委员会2007年制订的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，针对经济管理类各专业编写的。

《微积分》内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用，不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程和差分方程简介。

《线性代数》内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型。

《概率论与数理统计》内容包括概率论与数理统计两部分。概率论部分有：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律与中心极限定理。数理统计部分有：数理统计的基本概念、抽样分布定理、参数的点估计和区间估计、假设检验及回归分析。

本教材在内容处理上注意到了经济管理类专业和地方高校生源的特点，尽量使数学概念、理论与方法易于学生接受。在不影响本学科的系统性、科学性的前提下，简化和略去了某些结论冗繁的推导或仅给出直观解释，尤其重视知识的来龙去脉，概念的产生背景，有意识地融入数学文化的教育。

在例题与习题的配置上注意到了学习难度的循序渐进，选择了一些经典例子或历年研究生入学考试试题。习题中的A组题是根据教学基本内容和要求编制的，学生通过本组习题的训练能够达到教学目的要求；而B组题属于综合应用能力训练题，多是结合全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”内容和历年考试真题配置的综合训练题。

教材中“＊”号标出的内容为选学内容，可根据课时决定是否讲授。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心希望得到专家、学者和读者的批评指正，使这套教材在教学实践中不断完善和改进。

编者

2007.07

目　　录

第一章　函　　数

在自然科学、工程技术和某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，也是微积分这门课程的主要研究对象．本课程讨论的是定义在实数集上的函数，为此，我们先简要叙述实数的有关概念．

§1.1　实　数　集

从历史上看，人们先认识有理数，不过在公元前古希腊时期就已经发现正方形对角线的长与其边长之比是不能用有理数来表示的，提出了“无理数”的存在．但有关实数的理论却直到 19 世纪末，为奠定微积分基础的需要才完整地建立起来．

一、实数及其性质

在中学数学中，我们已经知道实数包括有理数和无理数，有理数是可以表示为分数$\dfrac{p}{q}$(p,q 为整数，$q\neq 0$)的数，也可用有限十进位小数或无限十进位循环小数来表示；而无限十进位不循环小数则为无理数．全体实数构成的集合称为**实数集**，记为 $\mathbf{R}$；全体有理数构成的集合称为**有理数集**，记为 $\mathbf{Q}$.

实数集与数轴上的所有点一一对应，即每一实数都对应数轴上唯一的一个点，反之，数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数．在本书以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看作具有相同的含义．并把全体非负整数(即自然数)的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$. 有时我们还在表示数集的字母的右上方加上“+”、“-”等上标，来表示该数集的几个特定子集．以实数集为例，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数之集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数之集．其他数集的情况类似，不再赘述．

二、实数的绝对值及其基本性质

实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

在数轴上表示点 x 与原点之间的距离．其基本性质如下：

1. $|x| \geqslant 0$;

2. $\sqrt{x^2} = |x|$;

3. $|-x| = |x|$;

4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

5. 设 $a > 0$，则

$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$,

$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x < -a, 或 x > a\}$,

式中“<”、“>”改为“≤”、“≥”同样成立；

6. $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y| \quad (y \in \mathbf{R}, 下同)$;

7. $|xy| = |x||y|$;

8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$.

三、区间与邻域

在微积分中最常用的实数集是区间和邻域.

1. 区间

区间包括四种有限区间和五种无限区间. 设 a，$b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，则四种有限区间为

开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$，如图 1-1(a)；

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$，如图 1-1(b)；

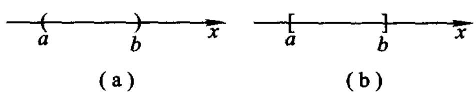

图 1-1

左开右闭区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$；

左闭右开区间 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$.

五种无限区间为

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\}$； $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$；

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}$； $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$；

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

2. 邻域

当考虑某点附近的点所构成的集合时，通常用邻域的概念来描述.

设 x_0，$\delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 即集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in$

$\mathbf{R}\}$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域**(如图 1-2),点 x_0 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.

点 x_0 的 δ 邻域内"挖去"点 x_0 后变为集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为**点 x_0 的 δ 去心邻域**(如图 1-3).

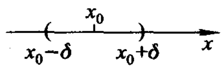

图 1-2

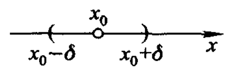

图 1-3

四、平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数,称 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 分别为 a_1, $a_2, \cdots, a_n$ 的**算术平均值和几何平均值**. 它们满足下述不等式:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

等号仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全部相等时成立.

证明从略.

§1.2 函　数

一、函数概念

定义 1.1 设 D 是非空实数集,若对任意的 $x \in D$,按照对应规则 f,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的**一元实函数**(习惯上也称 y 为 x 的**函数**),简称为**函数**. 记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为 f 的**定义域**,也可记为 $D(f)$ 或 D_f.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值记为 $f(x_0)$,也可以记为 $y\big|_{x=x_0}$ 或简记为 $y(x_0)$. 全体函数值所构成的集合称为函数 f 的**值域**,记为 $f(D)$ 或 R_f,即

$$f(D) = R_f = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

注 (1) 表示函数的记号是可以任意选取的,除了常用的 f 外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如"g"、"F"、"ϕ"等. 有时还用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y = y(x)$.

(2) 函数的定义域和对应规则是确定函数的两个要素. 两个函数相等是指它们的定义域相同,对应规则也相同,但对应规则的表达形式或变量的记号可能不同. 例如

$$f(x)=1,\ x\in\mathbf{R};\ g(x)=1,\ x\in\mathbf{R}\setminus\{0\};\ h(x)=\sin^2x+\cos^2x,\ x\in\mathbf{R},$$

其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个不同的函数，而 $f(x)$ 与 $h(x)$ 是同一函数.

同样 $y=f(x)$，$x\in D$ 与 $y=f(t)$，$t\in D$ 也是同一函数，因为它们的定义域相同，对应规则也相同，只是变量采用的记号不同而已.

关于函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，应根据问题的实际意义来确定；另一种是对抽象地用解析式子表达的函数，约定其定义域是使表达式有意义的一切实数组成的集合. 在这种约定之下，函数的定义域可省略不写，而只用对应规则 f 来表示一个函数. 例如上述函数 $g(x)=1$，$x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$，一般表示成 $g(x)=\dfrac{x}{x}$. 不过要注意不是任意解析式子都表示一个函数，例如 $f(x)=\arcsin(x^2+2)$ 就不是函数.

函数的表示法主要有三种：(1)表格法；(2)图像法；(3)解析法.

在解析法中，根据函数的解析表达式的形式不同，函数可分为显函数(包括分段函数)、隐函数和参变量函数三种.

下面举几个函数的例子.

例 1.1　将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个边长为 x 的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒. 所得方盒的容积 V 显然是 x 的函数

$$V=x(a-2x)^2,\ x\in\left(0,\frac{a}{2}\right).$$

函数 V 由 x 的解析表达式直接表示，用这种方式表达的函数称为**显函数**.

例 1.2　某市的出租汽车公司执行的收费标准是：两千米以内起步价为 10 元，超过两千米的部分每千米 2 元. 如果用 x 表示行驶的里程，y 表示出租车费用，则 y 是 x 的函数，且

$$y=f(x)=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 2,\\ 10+2(x-2), & x>2,\end{cases}$$

该函数的定义域 $D=(0,+\infty)$，值域 $f(D)=[10,+\infty)$.

这个函数在其定义域的不同范围用不同的解析式子来表达，这种显函数通常称为**分段函数**. 分段函数是用几个式子来表示一个函数，在实际问题中经常会遇到.

例 1.3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=[0,+\infty)$，其图像如图 1－4.

例 1.4　取整函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\ n\in\mathbf{Z},$$

即$[x]$表示不超过 x 的最大整数，其图像如图 1－5.

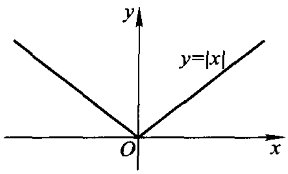

图 1－4

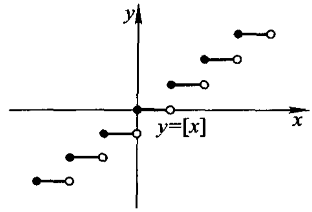

图 1－5

例 1.5 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

其图像如图 1－6.

因为任取 $x\in\mathbf{R}$，总有 $|x|=y\operatorname{sgn} x$，所以 $\operatorname{sgn} x$ 起了 x 的符号的作用，因此称为符号函数.

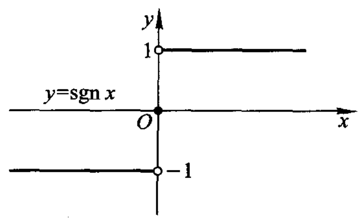

图 1－6

例 1.6 **狄利克雷**(Dirichlet, 1805—1859)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

前面所列举的函数都是直接用自变量的解析式子(可能不止一个)来表示因变量．如果自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系 $y=f(x)$是由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，其对应规则是不明显的，它隐藏在式子 $F(x,y)=0$ 中，这样的函数称为**隐函数**.

例 1.7 二元方程 $x^2+y^2=r^2$ 在$[-r,r]$上确定两个隐函数，它们化成的显函数形式是：

$$y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}\in[0,r]$$

与

$$y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}\in[-r,0].$$

例 1.8 二元方程 $e^x-e^y-xy=0$ 所确定的隐函数，不能化为显函数.

除了隐函数外，一般在研究物体运动的轨迹时，还常遇到参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta], \tag{1.1}$$

在(1.1)式中，变量 x 和 y 都是变量 t(通常称为**参变量**或**参数**)的函数，如果把对应于同一个 t 值的 x 与 y 的值看作是对应的，这样就得到 x 与 y 之间的函

数关系，称此函数关系所表达的函数为由**参数方程所确定的函数**，简称为**参变量函数**．

若能在(1.1)式中消去参数 t，就可得到由参数方程(1.1)所确定的函数的显函数形式．

例 1.9　如果不计空气阻力，则抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 v_1，v_2 分别为抛射体初速度的水平、铅直分量，g 是重力加速度，t 是飞行时间，x 和 y 分别是飞行中抛射体在铅直平面上的位置的横坐标和纵坐标，如图 1－7.

在(1.2)式中消去参数 t，得到由参数方程(1.2)所确定的函数的显函数形式为

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

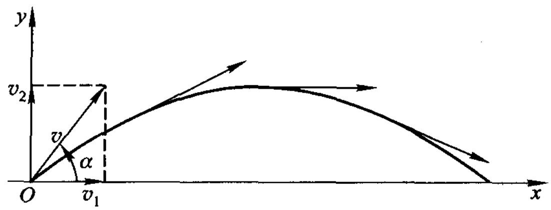

图 1－7

例 1.10　半径为 r 的圆的参变量函数为

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

参数 t 表示 x 轴正向与射线 OP 的夹角，如图 1－8.

例 1.11　椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi],$$

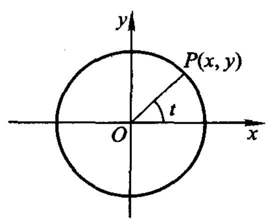

图 1－8

二、反函数

圆的周长 l 是半径 r 的函数：

$$l=2\pi r,\quad r\in(0,+\infty).$$

对任意 $r\in(0,+\infty)$，对应唯一一个周长 l. 如果互换自变量与因变量的位置，则有

$$r=\frac{l}{2\pi},\quad l\in(0,+\infty).$$

即对任意周长 $l\in(0,+\infty)$，也对应唯一一个半径 r. 那么函数 $r=\frac{l}{2\pi}$就称为函数 $l=2\pi r$ 的反函数.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$在 D 上有定义，如果对每一个 $y\in f(D)$，都有唯一一个确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，这是一个由$f(D)$到 D 的新的对应关系，按此对应关系得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

由反函数的定义不难看到，反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域和值域恰好是函数 $y=f(x)$的值域和定义域. 并且函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数，因此有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,\ x\in D(f)\text{ 与 }f[f^{-1}(y)]\equiv y, y\in f(D).$$

由于习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把反函数改写成

$$y=f^{-1}(x)^{①},\quad x\in f(D).$$

在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-9.

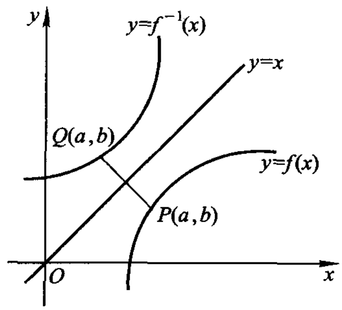

图 1-9

例 1.12 函数 $y=2x-3$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$. 按照函数关系，任取 $y\in\mathbf{R}$(值域)，对应 $\mathbf{R}$(定义域)中唯一一个 $x=\frac{1}{2}(y+3)$，所以函数 $y=2x-3$的反函数是

$$y=\frac{1}{2}(x+3),\quad x\in\mathbf{R}.$$

例 1.13 求函数 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$的反函数.

解 将函数变形为 $y=\log_4 2\sqrt{x}$，所以 $4^y=2\sqrt{x}$，因此 $x=4^{2y-1}$，故所求的

① 如无特殊声明凡提到的反函数都是指按习惯记法写出的反函数.

反函数是 $y=4^{2x-1}$.

一般说来，函数在定义域上不一定存在反函数．例如，函数 $y=x^2$ 就没有反函数．但是，若将函数限定在定义域的某个子集上，就可能存在反函数．例如，将函数 $y=x^2$ 的定义域限定在区间 $[0,+\infty)\subset\mathbf{R}$（或 $(-\infty,0]\subset\mathbf{R}$）上，则函数 $y=x^2$ 存在反函数 $y=\sqrt{x}$（或 $y=-\sqrt{x}$）.

三、复合函数

设 $y=f(u)=u^2+1$，$u=\varphi(x)=\sin x$，则 y 能够通过 u 化为 x 的函数，即

$$y=f(\varphi(x))=f(\sin x)=\sin^2 x+1.$$

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$，而 $u=\phi(x)$，$x\in D_\phi$. 如果 $R_\phi\cap D_f\neq\varnothing$（空集），则 y 可通过变量 u 化为 x 的函数，称这个函数为 $y=f(u)$ 与 $u=\phi(x)$ 构成的**复合函数**．记作 $y=f[\phi(x)]$. u 称为**中间变量**，ϕ 称为**内函数**，f 称为**外函数**．

例 1.14　由函数 $y=\ln(1-u^2)$，$u=\sqrt{x}$ 构成一个复合函数 $y=\ln(1-x)$，其定义域是 $[0,1)$.

例 1.15　由函数 $f(u)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda u}, & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0,\end{cases}$ $u=\lg x$ 构成的复合函数 $f(\lg x)$ 为

$$f(\lg x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda\lg x}, & x>1,\\ 0, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

例 1.16　设函数 $f(x)=\arcsin x$，$g(x)=2+x^2$，则 $f(g(x))$ 无意义．但若将两个函数换位则能构成复合函数，且有

$$g(f(x))=2+(\arcsin x)^2.$$

例 1.17　三个函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=5x-4$ 构成的复合函数是

$$y=\sqrt{\ln(5x-4)},\quad x\in[1,+\infty).$$

例 1.18　函数 $y=\cos^3(x^2+1)$ 可视为由以下三个简单函数复合而成：

$$y=u^3,\quad u=\cos v,\quad v=x^2+1.$$

例 1.19　设函数 $f(x+1)=x^2$，求 $f(x)$.

解法一　令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，所以 $f(t)=(t-1)^2$，因此

$$f(x)=(x-1)^2.$$

解法二　因为 $f(x+1)=x^2=[(x+1)-1]^2=(x+1)^2-2(x+1)+1$，

所以

$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2.$$

§1.3 具有特殊性质的函数

一、单调函数

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 I① 上有定义，若对任意 x_1，$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，都有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**广义单调增加**；

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**广义单调减少**.

若将上述不等式改为

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**严格单调增加**(或**严格单调减少**)，简称**单调增加**(或**单调减少**).

广义单调增加与广义单调减少函数统称为**广义单调函数**，相应的区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调区间**. 严格单调增加与严格单调减少函数统称为**严格单调函数**，简称**单调函数**.

例如，函数 $y=x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内严格单调增加；$y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内不是单调函数，但在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，在 $(-\infty,0]$ 上严格单调减少；符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbf{R}$ 内广义单调增加.

定理 1.1(反函数存在定理) 单调函数必有反函数. 且严格单调增加(或减少)函数必有严格单调增加(或减少)的反函数.

二、有界函数

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在正常数 M，使得对任意 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，但它在 $(0,1)$ 内无界.

函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 有界的几何意义是：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的图

① 除非特别说明，区间 I 可以是任意一种区间.