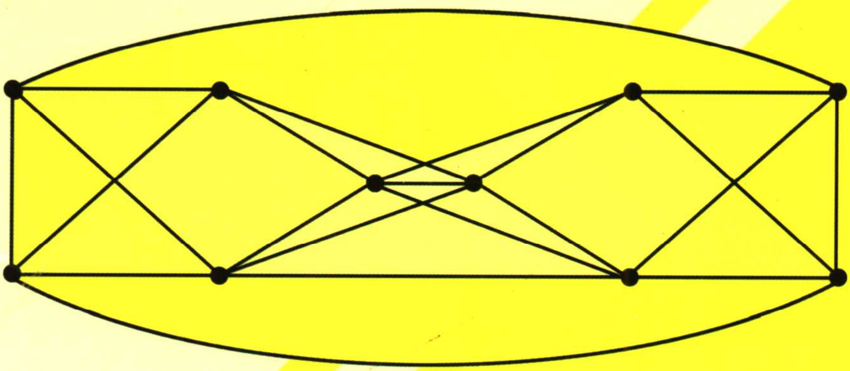
图的控制理论

徐保根 著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要介绍关于图的控制理论方面的一些最新研究成果. 从图的传统点控制概念开始, 通过定义不同的控制函数, 引入了图的多种点控制变化形式, 从而得到图的多种点控制概念. 在图的边控制方面, 本书将点控制转向图的边控制研究, 尤其对边上的符号控制概念进行了多种变化和推广, 如图的符号边(星、圈、团、路、树等)控制.

本书可供离散数学、运筹学、图论等专业的研究生、教师作为教学参考书, 也可供计算机专业的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

图的控制理论/徐保根著. —北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021910-7

I. 图… II. 徐… III. 图论 IV. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 065448 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张: 13 1/4
印数: 1—3 000 字数: 249 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

序

随着计算机技术的飞速发展, 图论作为离散数学中的一个重要组成部分, 也得到了高速的发展, 而且其应用也越来越广泛. 事实上, 图论为任何一个包含一种二元关系的系统提供了数学模型. 近二十年来, 随着信息化和数字化技术的不断进步, 许多实际问题的数学模型促使人们对离散型结构上的数字化技术更加关注, 也使得图的标号理论 (包括图的标号、控制和染色等) 成为图论中发展最快的分支.

在数学的众多分支中, 图论不像代数、拓扑等学科具有一套完整的数学理论. 不过近些年来, 图的控制的内容越来越丰富, 理论体系正在形成. 加拿大著名图论专家 Cockayne 等先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998 年, 美国图论学者 Haynes 等出版了专著 *Domination in Graphs* 和 *Fundamentals of Domination in Graphs*, 较为系统地综述了一些主要研究成果. 然而值得注意的是, 几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言, 很少涉及图的边控制问题.

为了进一步丰富和完善图的控制理论的内容, 本书主要研究图的边控制和全控制问题, 引入许多新概念和新参数, 如减边控制、符号边 (星、圈、团、路) 控制等, 并提出一些新的问题和猜想, 从而丰富了控制理论的内容. 可以预见, 在不远的将来, 图的边控制 (包括全控制) 的研究必将涌现更为丰富的研究成果, 使控制理论成为图论中一个体系完整、内容丰富、方法新颖、相对独立的重要分支. 正如图的染色一样, 从图的点着色到边着色、全着色, 再到各式各样的特殊着色, 图的控制也将自然地从点控制到边控制、全控制, 再到各式各样的特殊控制, 使控制理论更加丰富和完善.

为了保证内容上的完整性和可读性, 本书第 1 章介绍图的基本知识、基本理论和基本定理, 供读者参考, 省略了部分定理的证明过程, 因为对于图论的读者来说, 这些结论是众所周知的; 第 2 章是关于图的着色与 Ramsey 数, 除了介绍图的几种正常着色 (包括点着色、边着色和全着色) 外, 还着重介绍了图的 IC 着色、局部着色和 Grundy 着色概念, 对于 Ramsey 数方面, 除了经典 Ramsey 数外, 还介绍了广义 Ramsey 数和混合 Ramsey 数的相关结果. 从第 3 章开始介绍图的控制理论, 是本书的主要部分. 第 3 章和第 4 章是关于图的点控制; 而第 5 章和第 6 章则是关于图的边控制; 第 3 章主要介绍了图的一般点控制、符号控制和减控制相关概念与结果; 第 4 章指出了点控制的若干变化形式, 未证明的结论大多给出了参考文献, 供读者查阅; 第 5 章主要介绍图的边控制、符号边控制和减边控制的概念及相关结果, 这也是点控制、符号控制和减控制的点–边转化形式; 第 6 章介绍图的符号边控

制的若干变化, 主要包括图的符号圈控制、符号团边控制、符号星控制、符号路控制和符号树控制. 在最后的附记中列出了边控制研究的几种发展方向, 意在抛砖引玉. 由于最后两章的概念和内容基本上是作者近年来提出的, 基本结论大多给予了详细的证明, 也提出了许多很有趣味的问题和猜想, 供读者参考.

对于图论专业 (尤其是控制论方向) 的研究生, 或者从事图的控制论科研人员来说, 本书或许是一本好的参考资料, 至少在图的边控制方面, 该书具有明显的先进性. 尤其目前在国内还没有控制论专著的情况下, 该书具有较好的参考价值.

本书得到了国家自然科学基金项目和华东交通大学专著出版基金的资助, 上海大学康丽英教授为作者提供了宝贵资料, 在写作过程中也得到了两位硕士研究生赵金凤和赵华的大力帮助, 此外, 徐彤仔细校对了全稿, 在此一并深表谢意. 由于作者水平有限, 加上时间仓促, 书中一定有不少缺点和错误, 敬请读者批评指正.

徐保根

2008 年 4 月于华东交通大学

目　录

第 1 章　图的基础知识

本章简明扼要地介绍图的一些基本知识和基本定理, 大多数定理和结论都能在图论教材中找到.

本章还介绍本书中使用的符号和术语. 除特别声明外, 本书所指的图均为无向简单图, 不含重边和自环.

1.1　图的基本概念

1.1.1　什么是图

简单地说, 图是由一些 (顶) 点和一些由两点连成的线 (边) 组成的整体. 通常地, 一个图 G 的全体顶点构成的集合记为 $V(G)$, 图 G 的全体边构成的集合记为 $E(G)$, 并记 $G=(V(G),E(G))$, 或者简记为 $G=(V,E)$. 如果一个图 G 的顶点数目为 p 且边数为 q, 则称 G 为一个 (p,q) 图, $p=|V(G)|$ 称为图 G 的阶. 如图 1.1.1(a) 所示的一个 6 阶图为 (6, 8) 图. 若 $u,v\in V(G)$ 且 $uv\in E(G)$, 则称在 G 中顶点 u 与顶点 v 邻接. 如图 1.1.1(a), 顶点 u 与 v 邻接, 而顶点 u 与 w 不邻接.

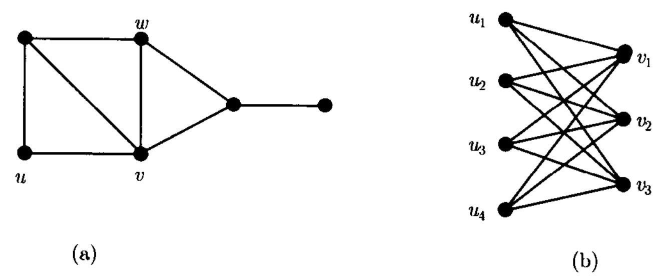


图 1.1.1　两个图例

设 $G=(V,E)$ 为一个图, $u\in V$, 则在 G 中与 u 邻接的全体顶点构成的集合称为 u 点在 G 中的邻域, 记为 $N_G(u)$, 而 $N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 称为 u 点在 G 中的闭邻域, 在不致引起混淆的情况下, $N_G(u)$ 和 $N_G[u]$ 可分别简记为 $N(u)$ 和 $N[u]$.

一个图可以用来表示现实生活中许多离散型事物之间的二元关系.

例 1.1.1　假设全世界共有 n 个机场, 每个机场作为一个顶点, 两个机场之间若有直达航班, 则其对应的顶点用一条边邻接, 可得到一个 n 阶图.

例 1.1.2 设一人群中共有 m 个人, 每个人作为一个顶点, 两个人如果是朋友, 则用一条边邻接其对应的顶点, 可得到一个 m 阶图.

例 1.1.3 设有 n 个集合, 共包含 m 个不同的元素, 每个集合和每个元素均用一个顶点来表示 (相同元素用同一个顶点表示), 如果某个元素属于某一个集合中, 则将其对应的顶点邻接, 便得到一个 $m+n$ 阶图.

从上面的例子中不难看出, 图可以用来表示许许多多离散型结构及其关系, 使许多本来抽象、复杂的问题变得更为直观和具体, 以便于问题的分析和解决. 如图 1.1.1(b), 若将右边三个顶点表示三个集合, 左边的四个顶点表示四个元素, 可见, 集合和元素之间的关系十分清楚.

1.1.2 图的度序列

设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶图, $v \in V$, $N_G(v)$ 表示在 G 中与 v 点相邻的所有点的集合, 称为 v 点的邻域, $N_G[v]=N_G(v) \cup \{v\}$ 称为 v 点的闭邻域, $d_G(v)=|N_G(v)|$ 称为 v 点在 G 中的度. 在不致引起混乱的情况下, $N_G(v)$, $N_G[v]$ 和 $d_G(v)$ 可分别简记为 $N(v)$, $N[v]$ 和 $d(v)$. 度为零的点称为孤立点, 度为 1 的点称为悬挂点. 若 G 的每个顶点的度均为 k, 则称 G 为 k 度正则图, 0 度正则图称空图.

设 $V=V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $d_i=d(v_i)$, $i=1,2,\cdots,n$, 则称非负整数序列 $\pi(G)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为图 G 的度序列. 图 1.1.1(b) 所示图的度序列为 $\pi=(4,4,4,3,3,3,3)$. 不难证明

定理 1.1.1 若 (n,m) 图 G 的度序列 $\pi(G)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i=2m$.

可见, 任何一个图各顶点的度数之和为一个非负偶数. 反过来, 如果将一个非负偶数 $2m$ 分折成 n 个非负整数之和, 即 $2m=d_1+d_2+\cdots+d_n$, 是否一定存在一个图 G, 使得图 G 的度序列 $\pi(G)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$? 回答是否定的. 例如, $10=3+3+3+1$, 而 (3, 3, 3, 1) 就不是图的度序列. 对于一个非负整数组 $\pi(G)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i=2m$ 为偶数, 如果存在一个图以它为度序列, 则称这个数组是可图的.

定理 1.1.2[1] 设有非负整数组 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i=2m$ 为偶数, 且 $n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, 则它是可图的充要条件是 $\pi'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ 是可图的.

定理 1.1.3[2] 令 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为非负整数列, $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i=2m$ 为偶数,

$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, 则 π 为图序列当且仅当对于每一个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$,

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\{r, d_i\}.$$

1.1.3 子图与图的运算

1. 子图的有关概念

定义 1.1.1 设 $G=(V,E)$ 为一个图, 图 H 满足 $V(H) \subseteq V(G)$, 并且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 为 G 的子图, 记为 $H \subseteq G$.

当 $H \subseteq G$ 但 $H \neq G$ 时, 称 H 为 G 的真子图, 记为 $H \subset G$. 当 $E(G) = \varnothing$ 时, 称 G 为空图.

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 为 $G=(V,E)$ 的子图, 如果对于 V_1 中任何两点 u 和 v, u 和 v 在 G_1 中邻接当且仅当它们在 G 中邻接, 则称 G_1 为 V_1 在 G 中的导出子图, 记为 $G_1 = G[V_1]$. 并记 $G[V \backslash V_1] = G - V_1$, 特别地, 当 $V_1 = \{v\}$ 时, 简记 $G - \{v\} = G - v$. 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 为 $G=(V,E)$ 的子图, 如果 $V_1 = V$, 则称 G_1 为 G 的生成子图或支撑子图.

定理 1.1.4 任何一个有 m 条边的图 G 的生成子图数目为 2^m.

事实上, 由于图 G 每个生成子图 H 的构造是: 对图 G 的每条边, 在 H 中可有可无, 即有两种选择方式, 故定理成立.

2. 图的运算

设 G_1 和 G_2 为图 G 的两个子图, 如果 G_1 和 G_2 没有公共顶点, 则称 G_1 和 G_2 为 G 的两个点不交的子图; 如果 G_1 和 G_2 没有公共边, 则称 G_1 和 G_2 为 G 的两个边不交的子图.

定义 1.1.2 如果 G_1 和 G_2 为两个点不交的图, 则 G_1 和 G_2 的并图 $G_1 \cup G_2$ 定义为

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2), \quad E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

定义 1.1.3 如果 G_1 和 G_2 为两个点不交的图, 则 G_1 和 G_2 的联图 $G_1 \vee G_2$ 定义为

$$V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2),$$

$$E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \,|\, u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}.$$

定义 1.1.4 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(G_2,E_2)$ 为两个图, 则其积图 $G_1 \times G_2$ 定义为

$$V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2,$$

$$E(G_1 \times G_2) = \left\{(u_1, v_1)(u_2, v_2)\,\middle|\, u_1 = u_2 \text{且} v_1 \sim v_2 \text{或者} v_1 = v_2 \text{且} u_1 \sim u_2 \right\},$$

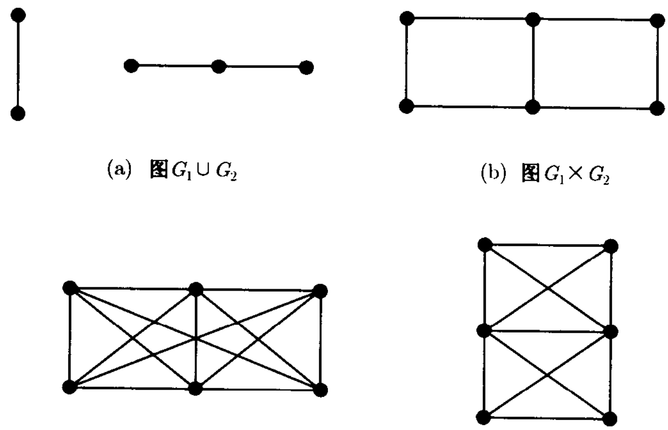
其中 $v_1 \sim v_2$ 表示 v_1 与 v_2 在 G_2 中邻接, $u_1 \sim u_2$ 表示 u_1 与 u_2 在 G_1 中邻接.

定义 1.1.5　设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (G_2, E_2)$ 为两个图, 则 G_1 与 G_2 的合成图 $G_1[G_2]$ 定义为

$$V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2,$$

$$E(G_1[G_2]) = \left\{(u_1, v_1)(u_2, v_2)\,\middle|\, u_1 \sim u_2 \text{或者} v_1 \sim v_2 \text{且} u_1 = u_2 \right\}.$$

设 G_1 和 G_2 分别为 2 阶路和 3 阶路, 则 G_1 与 G_2 的并图、积图和合成图分别如图 1.1.2 中所示.



(a) 图 $G_1 \cup G_2$　　(b) 图 $G_1 \times G_2$

(c) 图 $G_1[G_2]$　　(d) 图 $G_2[G_1]$

图 1.1.2

一般地, 若 G_1 的点数和边数分别为 n_1 和 m_1, G_2 的点数和边数分别为 n_2 和 m_2, 则 G_1 与 G_2 的并图、和图、积图和合成图的点数和边数如表 1.1.1.

表 1.1.1　四种图的点数和边数的关系

运　算	点　数	边　数
并 $G_1 \cup G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2$
联 $G_1 \vee G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2 + n_1 n_2$
积 $G_1 \times G_2$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2 m_1$
合成 $G_1[G_2]$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2^2 m_1$

定义 1.1.6　设 $G = (V, E)$ 为一个图, 图 G 的补图记为 $\overline{G}$, 定义为

$$V(\overline{G}) = V, \quad \text{并且} E(\overline{G}) = \{uv \,|\, u \in V, v \in V, uv \notin E\}.$$

1.1.4 几类常见的特殊图

一条通道 $w=v_1e_1v_2e_2\cdots v_{n-1}e_{n-1}v_n$, 如果 $v_1=v_n$, 则称为闭通道.

(1) 路与迹. 一条 n 阶路 (长度为 $n-1$) 记为 P_n, 其定义为

$$V(P_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

并且

$$E(P_n)=\{v_iv_{i+1}\,|1\leqslant i\leqslant n-1\}.$$

由此看出, 一条路是一条点不交的通道, 即 $v_i\neq v_j(i\neq j)$. 一条 n 阶迹是一条边不交的通道 $w=v_1e_1v_2e_2\cdots v_{n-1}e_{n-1}v_n$, $e_i\neq e_j(i\neq j)$, 但可能有 $v_i=v_j(i\neq j)$. 如果 $v_1=v_n$, 则称之为闭迹.

(2) 圈. 一个 n 阶圈 (长度为 n) 记为 C_n, 其定义为

$$V(C_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

并且

$$E(C_n)=\{v_iv_{i+1}\,|1\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_1v_n\}.$$

(3) 完全图. 一个 n 阶完全图记为 K_n, 其定义为

$$V(K_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

并且

$$E(K_n)=\{v_iv_j\,|1\leqslant i\neq j\leqslant n\}.$$

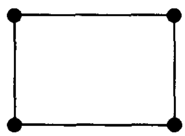
不难看出, n 阶完全图的边数为 $|E(K_n)|=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 并称 $\overline{K}_n$ 为 n 阶空图. 空图是没有任何边的, 并称 K_1 为平凡图.

(4) 完全二部图. 设 V_1 和 V_2 为两个非空点集, 如果图 $G=(V_1\cup V_2,E)$, 其中 $E=\{uv|u\in V_1,v\in V_2\}$, 则称 G 为完全二部图, 且若 $m=|V_1|,n=|V_2|$, 则记 $G=K_{m,n}$. 特别地, $K_{1,n}$ 称为 $n+1$ 阶星. 不难看出, $K_{m,n}=\overline{K}_m\vee\overline{K}_n$,

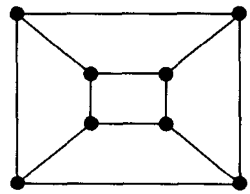
(5) 完全 n 部图. $K(m_1,m_2,\cdots,m_n)=\overline{K}_{m_1}\vee\overline{K}_{m_2}\vee\cdots\vee\overline{K}_{m_n}$ 称为完全 n 部图.

(6) 轮图和扇图. $W_{n+1}=C_n\vee K_1$ 称为 $n+1$ 阶轮图, $F_{n+1}=P_n\vee K_1$ 称为 $n+1$ 阶扇图.

(7) 方体. 可以用积图来递推地定义: 设 $Q_1=K_2$, $Q_n=K_2\times Q_{n-1}(n\geqslant 2)$. 称 Q_n 为 n 方体. 2 方体和 3 方体如图 1.1.3 所示.



2 方体



3 方体

图 1.1.3　两个方体

一个 n 方体 Q_n 共有 2^n 个顶点, 每个顶点可用一个 n 位二进制数 $a_1a_2\cdots a_n$ 来表示, Q_n 的两个顶点相邻接当且仅当其对应的二进制数只有一处不同.

1.1.5　连通图、距离、直径和围长

如果对于一个图 G 中的任何两个点 u 和 v, 在 G 中都存在一条连接 u 点和 v 点的路, 则称图 G 为连通图. 否则称为不连通图.

设 $G=(V,E)$ 为一个图, $u,v\in V$, 在 G 中连接 u 点和 v 点的最短路的长度称为 u 点到 v 点的距离, 用 $d_G(u,v)$ 或者 $d(u,v)$ 表示. 如果在 G 中不存在连接 u 点和 v 点的路 (即 u 点和 v 点分别在 G 的两个不同分支中), 则记 $d_G(u,v)=+\infty$. 图 G 的直径定义为 $d(G)=\max\{d(u,v)\,|u\in V,v\in V\}$. 显然, 当 G 是不连通图时, $d(G)=+\infty$.

一个图 G 中最短圈的长度称为图 G 的围长, 常用 $g(G)$ 表示.

1.1.6　图的同构

定义 1.1.7　设 G 和 H 为两个同阶的图, 如果存在一个双射 $\theta: V(G)\to V(H)$, 使得 $uv\in E(G)$ 当且仅当 $\theta(u)\theta(v)\in E(H)$ 成立, 则称图 G 与 H 同构, 记为 $G\cong H$, 有时简记为 $G=H$.

关于同构, 有一个著名的猜想尚未解决, 即

Ulam 猜想[3]　设 G 和 H 为两个图, $|V(G)|=|V(H)|$, 记 $V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 且 $G-u_i\cong H-v_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $G\cong H$.

1.1.7　自补图与度补图

如果一个图 G 与其补图 $\overline{G}$ 同构, 则称 G 为自补图. K_1 为平凡自补图, P_4 和 C_5 也是自补图. 显然, 若 G 为 n 阶自补图, 则 G 的边数等于 n 阶完全图边数的一半, 即 $m(G)=\dfrac{n(n-1)}{4}$ 为整数, 从而得到

定理 1.1.5　若 G 为 n 阶自补图, 则 $n\equiv 0,1(\bmod 4)$.

定理 1.1.6 若一个图 G 的直径 $d(G) \geqslant 4$, 则其补图的直径 $d(\overline{G}) \leqslant 2$.

证明 当 $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_t$ 为不连通图时 $(t \geqslant 2)$, 对于 G 中任何两点 u 和 v, 若 u 和 v 在 G 的不同分支中, 有 $d_{\overline{G}}(u,v) = 1$. 若 u 和 v 在 G 的同一个分支中, 在 G 的另一个分支中取一点 w, 有

$$d_{\overline{G}}(u,v) \leqslant d_{\overline{G}}(u,w) + d_{\overline{G}}(w,v) = 2,$$

由 u 和 v 的任意性知 $d(\overline{G}) \leqslant 2$.

当 G 为一个连通图时, 由于 $d(G) \geqslant 4$, 故 G 中有一条长度为 4 的路 $P_5 = (uv_1v_2v_3v)$, 使得 $d_G(u,v) = 4$. 对于 G 中任何两点 x 和 y, 若 x 和 y 在 G 中不邻, 则 $d_{\overline{G}}(x,y) = 1$; 若 x 和 y 在 G 中相邻, 如果 x 和 y 至少其一 (在 G 中) 与 u 点相邻, 则 x 和 y 与 v 点均不相邻 (否则与 $d_G(u,v) = 4$ 矛盾), 从而有

$$d_{\overline{G}}(x,y) \leqslant d_{\overline{G}}(x,v) + d_{\overline{G}}(v,y) = 2;$$

如果 x 和 y 点在 G 中与 u 点均不相邻, 则有

$$d_{\overline{G}}(x,y) \leqslant d_{\overline{G}}(x,u) + d_{\overline{G}}(u,y) = 2.$$

由 x 和 y 的任意性知 $d(\overline{G}) \leqslant 2$. 证毕.

由上述定理可直接得出下面的推论.

推论 1.1.1 每个非平凡自补图的直径等于 2 或 3.

如果一个图 G 与其补图 $\overline{G}$ 有相同的度序列, 则称 G 为度补图. 可见, 自补图一定是度补图, 但反之不真, 如图 1.1.4 所示. 当然, 一个 n 阶度补图的边数等于 n 阶自补图的边数.

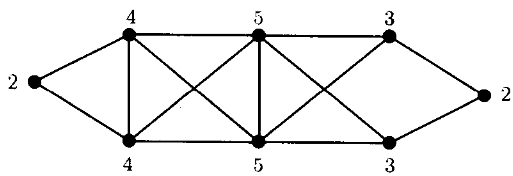


图 1.1.4 直径为 4 的度补图

图 1.1.4 所示的图 G 与其补图 $\overline{G}$ 有相同的度序列 $\pi = (5,5,4,4,3,3,2,2)$, 从而为度补图. 但由于其直径等于 4, 故不是自补图.

定理 1.1.7[4] 每个非平凡的度补图的直径等于 2, 3 或 4.

证明 设 G 为一个非平凡的度补图, u 为图 G 的一个最大度点, 即 $\Delta = d_G(u)$. 假设存在一点 $v \in V(G)$, 使得 $d_G(u,v) \geqslant 3$, 则有 $N(u) \cap N(v) = \varnothing$, 从而

$d_G(u)+d_G(v)\leqslant n-2$, 这与 $\Delta+\delta=n-1$(G 为度补图) 矛盾. 因此, u 点到 G 中任何点的距离不超过 2, 即 G 的直径 $d(G)\leqslant 4$. 证毕.

图 1.1.4 所表示的是一个直径为 4 的度补图, 由推论 1.1.1 知其为非自补图, 一个自然的问题是

问题 1.1.1 如何刻画直径为 4 的度补图?

1.1.8 图的邻接矩阵

设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶图, 其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 定义一个 n 阶矩阵 $A=A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 如下: 当 v_i 与 v_j 邻接时, $a_{ij}=1$, 当 v_i 与 v_j 不邻接时, $a_{ij}=0(i\neq j)$, 并且 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$, 则称 A 为图 G 的邻接矩阵. 可见, A 为一个 (0, 1) 对称矩阵, 且主对角元素均为 0. 图 1.1.5 所示图的邻接矩阵为

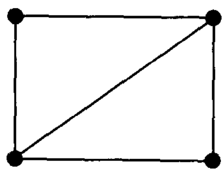


图 1.1.5

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

同一个图在不同标定法下的邻接矩阵是不同的. 若 A 和 B 均为同一个图的邻接矩阵, 则存在一个置换矩阵 P, 使得 $A=P^{-1}BP$ 成立, 即 A 和 B 相似. 从而它们有相同的特征值.

定理 1.1.8 设 $A=(a_{ij})_{p\times p}$ 为一个标定图 G 的邻接矩阵, $a_{ij}^{(n)}$ 表示 A^n 中第 i 行第 j 列的元素, 则 $a_{ij}^{(n)}$ 等于 G 中由 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通道数目.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时, $A^0=I$ 为单位矩阵, 可见定理成立. 假设定理对于 n 成立, 由 $A^{n+1}=AA^n$ 知

$$a_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}a_{kj}^{(n)}.$$

由于 a_{ik} 是联结 v_i 和 v_k 的长度为 1 的通道的数目, $a_{kj}^{(n)}$ 是联结 v_k 和 v_j 的长度为 n 的通道的数目, 所以上式右边每项表示由 v_i 经过一条边到 v_k, 再经过一条长度为 n 的通道到 v_j 的总长度为 $n+1$ 的通道的数目, 对所有的 k 求和, 即得 $a_{ij}^{(n+1)}$ 是所有联结 v_i 与 v_j 的长度为 $n+1$ 的通道数目, 故定理对 $n+1$ 成立. 证毕.

推论 1.1.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个 n 阶图 G 的邻接矩阵, 记 $A^2=(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$, 则有

(1) $a_{ii}^{(2)}=d_G(v_i)$;

(2) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 G 的 n 个特征值, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=2m$.

证明 (1) 由定理 1.1.8 知, $a_{ii}^{(2)}$ 等于 G 中由 v_i 到 v_i 的长度为 2 的通道数目, 即为 v_i 点在 G 中的度.

(2) 由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 故 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 为 A^2 的 n 个特征值, 从而

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}d_G(v_i)=2m.$$

证毕.

定理 1.1.9 设 λ 是一个 n 阶图 G 邻接矩阵 A 的任何一个特征值, $m=|E(G)|$, 则

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}.$$

证明 记 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 不妨设 $\lambda=\lambda_n$. 对于两个 $n-1$ 维向量 $(1,1,\cdots,1)$ 和 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1})$, 由 Schwartz 不等式及推论 1.1.2 得

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^2\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2=(n-1)(2m-\lambda^2).$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=0,$$

即

$$(-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^2\leqslant(n-1)(2m-\lambda^2),$$

故有

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}.$$

证毕.

1.2 树

1.2.1 树的概念与性质

定义 1.2.1 一个无圈的图称为一个森林. 一个无圈的连通图称为一棵树, 常用 T 表示. 在一棵树 T 中, 度为 1 的点称为 T 的叶点, 度大于 1 的点称为 T 的分支点. K_1 称为平凡树. 可见, 一个森林是若干树之并.

定理 1.2.1　设 G 为一个 n 阶图, m 为 G 的边数, 则下列命题是等价的:

(1) G 为一棵树;

(2) G 是连通的, 且 $m = n - 1$;

(3) G 是无圈的, 且 $m = n - 1$;

(4) G 是无圈的, 但 $G + e$ 中有唯一的圈;

(5) G 中任何两个点之间有且只有一条路相连.

证明　(1)⇒(2) 是显然的.

(2) ⇒(3) 假设 G 是有圈的, 在圈上任意去掉一条边, 得到一个 n 阶连通图, 其边数为 $n - 2$, 这是不可能的, 因为 n 阶连通图至少有 $n - 1$ 条边.

(3) ⇒(4) 若 $G + e$ 中没有圈, 则 e 边两端点在 G 的不同分支中, 从而 G 为一个无圈的不连通图, 这与 $m = n - 1$ 不符.

(4) ⇒(5) 反证. 若 G 为不连通图, 在 G 的不同分支之间增加一条边 e, 由于 G 是无圈的, 故 $G + e$ 中也没有圈, 矛盾. 故 G 为连通图, 从而 G 中任何两个点之间有一条路相连. 若 G 中两个点之间存在两条不同的路相连, 则 G 中存在圈, 矛盾.

(5) ⇒(1) 由于 G 中任何两个点之间有一条路相连, 故 G 为连通图. 假设 G 中有圈, 圈上的两点之间至少有两条路相连, 矛盾. 因此 G 为一个连通的无圈图, 即为一棵树. 证毕.

推论 1.2.1　每棵非平凡的树至少有两个叶点, 恰有两个叶点的树为一条路.

证明　若非平凡的树 T 至多只有一个叶点, 记 $|V(T)| = n \geqslant 2$, $|E(T)| = m$, 则

$$m = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(T)} d(v) \geqslant \frac{1 + 2(n-1)}{2} = n - \frac{1}{2},$$

这与定理 1.2.1 矛盾. 证毕.

推论 1.2.2　一个森林 F 的分支数目为 $\omega(F) = n - m$.

证明　设 $\omega(F) = t$, F 的所有分支记为 $F_i, i = 1, 2, \cdots, t$, 当 $t = 1$ 时 F 为一棵树, 由定理 1.2.1 知推论成立. 当 $t \geqslant 2$ 时, 在 F_i 与 F_{i+1} 之间任意增加一条边, 共增加 $t - 1$ 条边产生一棵树 T, 由定理 1.2.1 知 $m + (t - 1) = n - 1$, 故有 $t = \omega(F) = n - m$. 证毕.

定义 1.2.2　设 G 为一个连通图, $e \in E(G)$, $v \in V(G)$, 则

(1) 若 $G - e$ 是不连通图, 则称 e 为图 G 的一条割边;

(2) 若 $G - v$ 是不连通图, 则称 v 为图 G 的一个割点.

如图 1.2.1 所示即为有一条割边和两个割点的图.

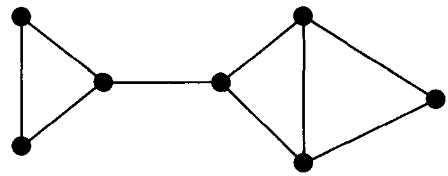


图 1.2.1 有一条割边和两个割点的图

一个非平凡的连通图至少有两个点不是割点.

定理 1.2.2 设 G 为一个连通图, 则 G 为一棵树的充要条件是 G 的每条边均为割边.

证明 若 G 为一棵树, 显然 G 的每条边均为割边. 反之, 若 G 的每条边均为割边, 则图 G 中无圈, 否则圈上的边不是割边, 矛盾. 故 G 为一个无圈的连通图, 因此 G 为一棵树. 证毕.

1.2.2 树的中心

设 G 为一个连通图, $v \in V(G)$, 则称 $e(v) = \max\{d(u,v)\,|\,u \in V(G)\}$ 为 v 点的离心率, 称 $r(G) = \min\{e(v)\,|\,v \in V(G)\}$ 为图 G 的半径. 显然, 对任何一个连通图 G, 均有 $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$. 如图 1.2.2 所示

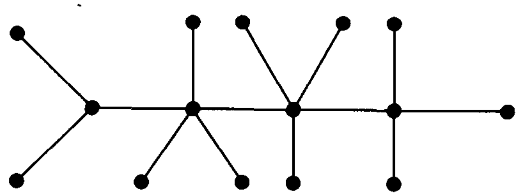


图 1.2.2 直径 $d(G) = 5$ 且半径 $r(G) = 3$

定义 1.2.3 设 G 为一个连通图, 满足 $e(v) = r(G)$ 的点 v 称为 G 的一个中心点, 图 G 的全体中心点组成的集合称为 G 的中心.

定理 1.2.3 每棵树的中心是由一个点或两个相邻点组成的集合.

证明 设 T 为任意一棵树, 对 $n = |V(T)|$ 用归纳法. 当 $T = K_1$ 或者 $T = K_2$ 时, 定理显然成立, 假设对阶数不超过 $n-1$ 的树定理均成立, T 中去掉所有叶点得到树 T', 由归纳假设 T' 的中心点是一个点或两个相邻点, T 与 T' 有相同中心点, 从而 T 的中心是由一个点或两个相邻点组成的集合. 证毕.

1.2.3 生成树

定义 1.2.4 如果图 G 的一个生成子图 T 是一棵树, 则称 T 为 G 的一棵生成树. 若 T 为森林, 则称 T 为 G 的一棵生成森林.