认真解读真题 无须漫游题海

高考数学真题分类解读

第五册

极 限

导数与微分

复 数

算法初步与

选讲选做题

高考真题研究组 编

丛书在手 高考无忧

分类解读 同步教学

前思设计 与众不同

解读细致 数形结合

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高考数学真题分类解读

第五册

极限

导数与微分

复数

算法初步与选讲选做题

丛书策划　张兰知

本册主编　孙宏宇　徐　佳　罗武强

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书是《高考数学真题分类解读》丛书的第五册，主要内容由极限，导数与微分，复数，算法初步与选讲选做题四部分组成。本书全部选自全国和各省的高考真题，以前思、解析的形式解题，图文并茂，便于自学。

本书既适合高考生备考选用，又适合高中一二年级学生学习时参考，同时也可作为高中数学教师的参考书。

责任编辑　张秀华
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8.625　字数 180 千字
版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－2647－4
印　　数　1～5 000 册
定　　价　15.00 元

前　言

高考考查的是考生的思维素质。高考数学真题的区分度也是考生思维素质的区分度。高考数学真题蕴涵着考查考生思维素质的知识载体，这些知识载体就是培养学生思维素质的知识载体。因此，认真解读高考数学真题，是培养学生思维素质的重要途径。这也是作者编写此书的初衷。

高考数学真题是大量高中数学习题的浓缩，是题之经典、题之精华，它反映了高考对不同数学知识点的考核方式与考核要求。如能精通这本《高考数学真题分类解读》，你无须漫游题海就能达到掌握全面的高考题型及解题方法，升华高中数学知识，从容面对高考，省时高效。

本书在结构上采用了“高考真题”后面紧跟“前思”、“解析”的编排方式，节省了前后翻阅之时间。而且在解析之前设计了“前思”，可以呈现解题前的思维过程，给出解题中将要用到的知识点，旨在通过“前思”的过程学会思考，复习知识、整合知识，使数学思维素质在潜移默化中得以提升。这也是本书与众不同的思考。

本书对高考数学真题进行了分类解读，与教学同步，分解考生高考总复习的压力；解读细致，排疑解惑；数形结合，用图形解说，形象直观，一目了然；版面设计别具一格，以减轻视觉疲劳。

全书共六册，分为15章。第一册为集合与简易逻辑，函数，三角函数，平面向量；第二册为直线和圆的方程，直线、平面、简单几何体；第三册为排列、组合和概率，概率与统计，数列；第四册为不等式，圆锥曲线方程；第五册为极限，导数与微分，复数，算法初步与选讲选做题；第六册为高考数学真题分类集，将高考数学真题分类编排为一册，以便于考生自测。

本书既适用于高三备考的考生，也适用于高一、高二的学生，同时也可作为高中数学教师的参考书。

本册导数与微分由孙宏宇和罗武强编写，极限与复数由徐佳编写。算法初步与选讲选作题由王小波、秦颖编写。

一本好书，能让你从中受益！

一本好书，能让你高考无忧！

《高考数学真题分类解读》——高中生必备的学习帮手！

编　者

2007年12月

目　录

第十二章　极　　限

一、选择题

12.1　07 四川

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$______.

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【前思】

先把分子、分母因式分解，约去公因式 $x-1$，然后再求极限值.

【解析】

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(2x+1)}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$$

故选 D.

12.2　07 湖南

下列四个命题中，不正确的是______.

A. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

B. 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x=2$ 和 $x=-2$

C. 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$

D. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

【前思】

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续必须满足下面三个条件：

①函数 $f(x)$ 的点 $x=x_0$ 处有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于函数在这一点的极限值.

如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处及其附近有定义，而且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

就是说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(a-b)=\lim\limits_{x\to\infty}a-\lim\limits_{x\to\infty}b$(前提：$\lim\limits_{x\to\infty}a$、$\lim\limits_{x\to\infty}b$ 存在).

【解析】

对四个选项逐一进行分析：

对选项 A，由前思(1)，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

由前思(2)，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

故选项 A 正确.

对选项 B，由于当 $x=2$ 和 $x=-2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 无定义，所以 $x=2$ 和 $x=-2$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点.

故选项 B 正确.

对选项 C，由 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 是否存在未知.

故选项 C 不正确.

对选项 D，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

故选项 D 正确.

因此本题选 C.

12.3　07 福建

把 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ 展开成关于 x 的多项式，其各项系数和为 a_n，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}$ 等于______.

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【前思】

(1) $(1+x)^n$ 展开式中各项系数之和，即当 $x=1$ 时

$$(1+1)^n=2^n$$

(2) 当 $n\to+\infty$ 时，$2^n\to+\infty$.

(3) 等比数列前 n 项和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

【解析】

由前思(1)，可知

$1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ 展开式中各项系数和为 a_n，则

$$a_n=1+(1+1)+(1+1)^2+\cdots+(1+1)^n=$$
$$1+2+2^2+\cdots+2^n=$$
$$\frac{1\cdot(1-2^{n+1})}{1-2}=2^{n+1}-1$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2(2^{n+1}-1)-1}{2^{n+1}-1+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+2}-3}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(2-\dfrac{3}{2^{n+1}})=2$

故选 D.

12.4 07 江西

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}=$______.

A.等于 0　　B.等于 1　　C.等于 3　　D.不存在

【解析】

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x^2=1$$

故选 B.

12.5 07 上海

数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2},1\leqslant n\leqslant1000\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n},n\geqslant1001\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 的极限值______.

A.等于 0　　B.等于 1　　C.等于 0 或 1　　D.不存在

【解析】

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{n}}=1$$

故选 B.

12.6 06 四川

已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3,x\neq1,\\2,x=1,\end{cases}$ 下面结论正确的是______.

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续　　B. $f(1)=5$

C. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$　　D. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$

【前思】

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

【解析】

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5\neq2=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，A、B 错误，D 正确.

由定义知 $f(1)=2$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=5\neq2$，所以 C 错误.

故选 D.

12.7 06 湖南

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{3}$，且对任意正整数 m、n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$______.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

【解析】

令 $m=1$,则由 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$,得 $a_{n+1}/a_n=a_1=\frac{1}{3}$,则$\{a_n\}$是首项为 $a_1=\frac{1}{3}$,公比为 $q=\frac{1}{3}$的等比数列.所以

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]=\frac{1}{2}$$

故选 A.

12.8 06陕西

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}=$______.

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【前思】

见到形如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}$的式子时,首先要考虑分母有理化.

【解析】

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}{2n\cdot 2}=$

$\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

故选 C.

12.9 05全国

$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{2}{x^2-4x+3})=$______.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{6}$

【前思】

将$\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{2}{x^2-4x+3}$化简,得到简单式后再进行运算,可避免分母在 $x\to 1$ 时,等于0(即无意义).

【解析】

$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{2}{x^2-4x+3})=\lim\limits_{x\to 1}[\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(x-3)}]=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)-2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$
$$\lim_{x\to 1}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2}$$

故选 A.

12.10　05 湖南

已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列，且 $a_1=3$，$a_2=5$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n})=$______.

A. 2　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. 1　　　　D. $\frac{1}{2}$

【前思】

由已知 $a_1=3,a_2=5$，及 $\{\log_2(a_n-1)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列可得数列 $\{a_n\}$，进而判断数列 $\{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\}$ 为何种数列. 再求此数列的前 n 项和的极限值.

【解析】

因为 $a_1=3$，所以 $\log_2(a_1-1)=\log_2(3-1)=1$.

同理 $a_2=5$，$\log_2(a_2-1)=2$，所以数列 $\{\log_2(a_n-1)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 为首项为 1，公差为 1 的等差数列.

故 $\log_2(a_n-1)=n$，即 $a_n=2^n+1$，所以

$$\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2^{n+1}+1-2^n-1}=\frac{1}{2^n}$$

而 $\frac{1}{a_2-a_1}=\frac{1}{2}$ 故数列 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right\}$ 为首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列. 所以

$$S_n=\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=$$
$$\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[1-(\frac{1}{2})^n]=1$$

故选 C.

12.11　05 江西

若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(2-2x)}=$______.

A. -1　　　　B. 1　　　　C. $-\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

【前思】

分析可知，此题应利用换元法将 $2-2x$ 换成另一个字母，即代表函数 $f(x)$ 的自变量，再进行计算.

【解析】

设 $2-2x=t$，则 $x=\frac{2-t}{2}$，$x-1=-\frac{t}{2}$，令 $x-1=a$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=1$，所以 $\lim\limits_{a\to 0}\frac{f(a)}{a}=1$. 而

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(2-2x)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot t}{f(t)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

故选 C.

12.12　05 浙江

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=$______.

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

【前思】

所求式子的分子为首项为 1，公差为 1 的等差数列前 n 项和.

【解析】

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}}{n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

故选 C.

12.13　05 广东

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=$______.

A. $-\frac{1}{6}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

【解析】

$$\text{原式}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{6}$$

故选 A.

12.14　05 广东

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2=\frac{x_1}{2}$，$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$，$n=3,4,\cdots$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$，则 $x_1=$______.

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】

因为　　$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$

所以　　$2x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$.

从而 $$2x_{n-1}=x_{n-2}+x_{n-3},2x_{n-2}=x_{n-3}+x_{n-4},\cdots,$$
$$2x_4=x_3+x_2,2x_3=x_2+x_1$$

将上式累加,有 $$2x_n+x_{n-1}=2x_2+x_1=2x_1$$

两边取极限,$2\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=2\lim\limits_{n\to\infty}x_1$,且已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$,所以
$$2\times2+2=2x_1,x_1=3.$$

故选 B.

12.15　05 辽宁

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续的______.

A.充分而不必要条件　　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　　D.既不充分也不必要条件

【前思】

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但 $f(x)$在点 x_0 处未必有定义.

而函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续必须满足下面三个条件:

(1)函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义;

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,即函数 $f(x)$在点 x_0 处极限值等于这一点的函数值.

【解析】

由前思得"极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在"不能得到"函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续",但反过来可以得到,即由"函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续"可得到"极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在".

故选 B.

12.16　04 全国

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=$______.

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.1　　C.$\dfrac{2}{5}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

【前思】

将所求极限的式子化简,再求极限.

【解析】

原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x+5}=\dfrac{1}{2}$

故选 A.

12.17　04 福建

若$(1-2^x)^9$展开式的第 3 项为 288,则$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots+\dfrac{1}{x^n})$的值是______.

A.2　　B.1　　C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{2}{5}$

【前思】

由二项式定理可得$(1-2^x)^9$展开式，而第3项为288，进而求出x的值，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}$为首项为$\frac{1}{x}$，公比为$\frac{1}{x}$的等比数列前$n$项和，这时再求其极限就容易了.

【解析】

$(1-2^x)^9$展开式第3项为$C_9^2\cdot 1^7\cdot(-2^x)^2$，即$C_9^2\cdot 2^{2x}=288$，解得

$x=\frac{3}{2}$，所以$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2}$，…，$\frac{1}{x^n}$是首项为$\frac{2}{3}$、公比为$\frac{2}{3}$的等比数列，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}=\lim_{n\to\infty}2[1-(\frac{2}{3})^n]=2$$

故选A.

12.18　04湖南

数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{5}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$______.

A.$\frac{2}{5}$　　B.$\frac{2}{7}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{4}{25}$

【前思】

由已知条件推导出数列$\{a_n\}$的通项公式，再求前n项和的极限.

【解析】

由$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$，得

$$a_1+a_2=\frac{6}{5^2}=\frac{6}{25}$$

因为$a_1=\frac{1}{5}$，所以

$$a_2=\frac{6}{25}-\frac{1}{5}=\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}$$

同理$a_3=\frac{1}{5^3}$，$a_4=\frac{1}{5^4}$，…依此类推，得出$a_n=\frac{1}{5^n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}[1-(\frac{1}{5})^n]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}.$$

故选C.

12.19　06湖南

数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，且对任意的正整数m、n都有$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$______.

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.2

【前思】

(1)等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

(2)等比数列的前 n 项和公式

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad 或 \quad S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

【解析】

依题意，对任意的正整数 m、n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$，且 $a_1 = \frac{1}{3}$，故令 $m=1$，得 $a_{n+1} = a_n a_1 = \frac{1}{3}a_n$. 所以数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{3}$、公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

故选 A.

二、填空题

12.20　07 全国

已知数列的通项 $a_n = -5n+2$，其前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} =$ ________.

【前思】

(1)由 $a_n = -5n+2$ 可判定该数列为等差数列.

(2)等差数列的通项 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

(3)等差数列的前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

【解析】

$$\begin{cases} a_n = -5n+2 \\ a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -5 \\ a_1 - d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -5 \\ a_1 = -3 \end{cases}$$

所以　$S_n = -3n + \frac{n(n-1)}{2}\times(-5) = -3n - \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n = -\frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{5}{2}$

故填 $-\frac{5}{2}$.

12.21　07 天津

设等差数列$\{a_n\}$的公差 d 为 2，前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2 - n^2}{S_n} =$ ________.

【前思】

见上一题前思的(2)、(3).

【解析】

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$,且 $d=2$,所以

$$a_n^2-n^2=(a_1+2n-2)^2-n^2$$

$$a_n^2-n^2=4n^2+(a_1-2)^2+4n(a_1-2)-n^2=$$
$$3n^2+a_1^2-4a_1+4+4n(a_1-2)$$

而
$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=na_1+n^2-n=(a_1-1)n+n^2$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+a_1^2-4a_1+4+4n(a_1-2)}{(a_1-1)n+n^2}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{a_1^2-4a_1+4}{n^2}+\frac{4(a_1-2)}{n}}{1+\frac{a_1-1}{n}}=3$$

故填3.

12.22　07 陕西

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x-1}\right)=$________.

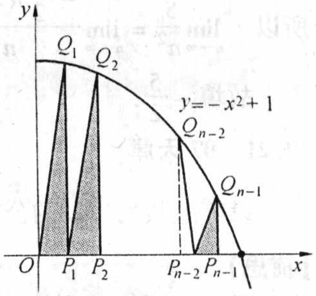
【解析】

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{x-1}\right)=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1-(x+2)}{(x-1)(x+2)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$$

故填$\frac{1}{3}$.

12.23　07 安徽

如图,抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点A,将线段 OA 的n 等分点从左至右依次记为 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$,过这些分点分别作 x 轴的垂线,与抛物线的交点依次为 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n-1}$,从而得到 $n-1$ 个直角三角形$\triangle Q_1OP_1,\triangle Q_2P_1P_2,\cdots,\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$.当 $n\to\infty$时,这些三角形的面积之和的极限为________.



【前思】

(1)$\begin{cases}y=-x^2+1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow A(1,0)$

(2)一条线段上有$(n-1)$个点,则此线段被分成了 n 段:

点 $A(1,0)\Rightarrow P_1(\frac{1}{n},0),P_2(\frac{2}{n},0),\cdots,P_{n-1}(\frac{n-1}{n},0)\Rightarrow$

$OP_1=\frac{1}{n},OP_2=\frac{2}{n},\cdots,OP_{n-1}=\frac{n-1}{n}\Leftrightarrow P_1P_2=\frac{1}{n},P_2P_3=$

$\frac{1}{n},\cdots,P_{n-2}P_{n-1}=\frac{1}{n}$

(3)图中任一直角三角形的面积

$$S_{\triangle Q_xP_{x-1}P_x}=\frac{1}{2}(P_x-P_{x-1})y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}(-x^2+1)$$

【解析】

设这 $n-1$ 个直角三角形的面积之和为 S,则根据前思中的分析可知

$$\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}[-(\frac{1}{n})^2+1-(\frac{2}{n})^2+1-\cdots-(\frac{n-1}{n})^2+1]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}[(n-1)-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}]$$

因为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}[(n-1)-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}[(n-1)-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{6n^2-6n-2n^2+3n-1}{6n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

故填$\frac{1}{3}$.

12.24 06 北京

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$的值等于________.

【解析】

$$原式=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+2}{x-1}=-\frac{1}{2}$$

故填$-\frac{1}{2}$.

12.25 06 上海

计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^3}{n^3+1}=$________.

【前思】

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

【解析】

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{6(n^3+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{6(1+\frac{1}{n^3})}=\frac{1}{6}$$

故填$\frac{1}{6}$.

12.26　06天津

设函数$f(x)=\frac{1}{x+1}$，点A_0表示坐标原点，点$A_n(n,f(n))(n\in\mathbf{N}^*)$.若向量$\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，$\theta_n$是$\boldsymbol{a}_n$与$\boldsymbol{i}$的夹角(其中$\boldsymbol{i}=(1,0)$)，设$S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________.

【前思】

(1)$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}$

(2)直线l与x轴正方向所夹的最小正角称为l的倾斜角.

不是90°的倾斜角的正切值称为该直线的斜率.

【解析】

因为　$\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}=(n,f(n))=(n,\frac{1}{n+1})$

所以　$\tan\theta_n=\dfrac{\frac{1}{n+1}-0}{n-0}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

所以　$S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n=$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$1-\frac{1}{n+1}$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

故填1.

12.27　06山东

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})}=1$，则常数$a=$________.

【前思】

将所求极限式子的分母有理化再进行计算.

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot a}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1}}{a}=\frac{2}{a}=1$$

所以$a=2$.

故填2.