



2009^年 李永乐·李正元 考研数学 5

数学

数学二

历年试题解析

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元

国家行政学院出版社



013-44/119=4

:2

2008

2009 年李永乐·李正元考研数学⑤

数 学 历 年 试 题 解 析

【数学二】

主 编 北 京 大 学 李 正 元

清 华 大 学 李 永 乐

编 者 (按姓氏笔画)

北 京 大 学 李 正 元

清 华 大 学 李 永 乐

北 京 大 学 刘 西 垣

中 国 人 民 大 学 严 颖

北 京 大 学 范 培 华

北 京 交 通 大 学 赵 达 夫

中 国 人 民 大 学 袁 荫 棠

东 北 财 经 大 学 龚 兆 仁

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析. 2/李永乐,李正元主编. —北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)

ISBN 978-7-80140-323-0

I. 数... II. ①李... ②李... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004373 号

书 名 数学历年试题解析[数学二]
作 者 李正元 李永乐
责任编辑 李锦慧
出版发行 国家行政学院出版社
(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电 话 (010)88517082
经 销 新华书店
印 刷 北京市朝阳区印刷厂
版 次 2008 年 2 月北京第 5 版
印 次 2008 年 2 月北京第 1 次印刷
开 本 787 毫米×1092 毫米 16 开
印 张 16.5
字 数 430 千字
书 号 ISBN 978-7-80140-323-0/O·30
定 价 24.00 元

前 言

(一)

对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了1994年~2008年历届全国硕士研究生入学统考数学二试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,使考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该题型考过什么样的题目,是从哪个角度来命题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而掌握考研数学试题的广度和深

度,做到复习时目标明确,心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起,我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似,因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外,每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐**主编的《**考研数学复习全书**》(理工类·数学二)),该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路较吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

(四)

本书由北京大学 **李正元**、清华大学 **李永乐**担任主编。参本书编写的有:清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、中国人民大学 **袁荫棠**、**严颖**、北京交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2008年2月

目 录

第一篇 2008 年考研数学二试题及答案与解析

2008 年考研数学二试题	(1)
2008 年考研数学二试题答案与解析	(3)

第二篇 1994 ~ 2007 年考研数学二试题

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(13)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(17)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(20)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(24)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(27)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(31)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(34)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(37)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(40)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(43)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(46)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(49)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(52)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(55)

第三篇 1994 ~ 2007 年考研数学二试题分类解析

第一部分 高等数学	(59)
第一章 函数 极限 连续	(59)
第二章 一元函数微分学	(81)

第三章	一元函数积分学	(118)
第四章	常微分方程	(148)
第五章	多元函数微积分学	(166)
第二部分	线性代数	(195)
第一章	行列式	(195)
第二章	矩阵	(199)
第三章	向量	(213)
第四章	线性方程组	(222)
第五章	特征值与特征向量	(237)
第六章	二次型	(250)

第一篇 2008 年考研数学二试题及答案与解析

2008 年考研数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为

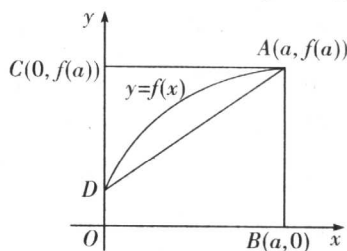
- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【 】

(2) 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x) dx$ 等于

续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x) dx$ 等于

- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.
(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.
(C) 曲边三角形 ACD 的面积.
(D) 三角形 ACD 的面积.



【 】

(3) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

【 】

(4) 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

【 】

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是

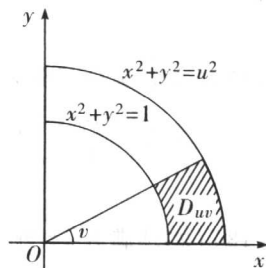
- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

【 】

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$

影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$

- (A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.
(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u}f(u)$.



【 】

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

[]

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ _____.

(10) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$ 的通解是 $y =$ _____.

(11) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 _____.

(12) 曲线 $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 _____.

(13) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$ _____.

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, 3, λ . 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^t \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(18) (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(19) (本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体, 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$;

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

(21) (本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

(22) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(23) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

2008 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1) 【分析】 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. 由罗尔定理知, $f'(x)$ 在 $(0, 1), (1, 2)$ 各有一个零点. 又

$$f'(0) = [2x(x-1)(x-2) + x^2((x-1)(x-2))'] \Big|_{x=0} = 0,$$

$\Rightarrow f'(x)$ 有 3 个零点. 选 (D).

$$(2) \text{【分析】} \int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x df(x) = x f(x) \Big|_0^a - \int_0^a f(x) dx = a f(a) - \int_0^a f(x) dx,$$

其中 $a f(a)$ 是矩形 $ABOC$ 的面积, $\int_0^a f(x) dx$ 是曲梯梯形 $ABOD$ 的面积. 因此 $\int_0^a x f'(x) dx$ 是曲边三角形 ACD 的面积. 选 (C).

(3)【分析】 从通解的结构知, 三阶线性常系数齐次方程相应的三个特征根是: $1, \pm 2i (i = \sqrt{-1})$, 对应的特征方程是

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,$$

因此所求的微分方程是

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

选 (D).

(4)【分析】 只有间断点 $x = 0, x = 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{|x-1|} = 0,$$

故 $x = 0$ 是可去间断点. 又

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1+1)}{x-1} \sin x = \sin 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(x-1+1)}{-(x-1)} \sin x = -\sin 1,$$

故 $x = 1$ 是跳跃间断点. 选 (A).

(5)【分析】 因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, 当 x_n 单调时, $\Rightarrow f(x_n)$ 单调有界 $\Rightarrow f(x_n)$ 收敛. 选 (B).

(6)【分析】 用极坐标变换将二重积分 $F(u, v)$ 表为定积分. D_{uv} 的极坐标表示为

$$0 \leq \theta \leq v, \quad 1 \leq r \leq u,$$

$$\Rightarrow F(u, v) = \int_0^v d\theta \int_1^u \frac{f(r^2)r}{r} dr = v \int_1^u f(r^2) dr.$$

再由变限积分求导法得

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v f(u^2).$$

选 (A).

(7)【分析】 因为 $(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E$,

$$(E + A)(E - A + A^2) = E + A^3 = E,$$

所以, 由定义知 $E - A, E + A$ 均可逆. 故选 (C).

注: 本题用特征值也是简捷的, 由 $A^3 = 0 \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda = 0 \Rightarrow E - A$ (或 $E + A$) 的特征值均不为 $0 \Rightarrow E - A$ (或 $E + A$) 可逆.

(8)【分析】 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正惯性指数, 及相同的负惯性指数. 而正 (负) 惯性指数的问题可由特征值的正 (负) 来决定.

$$\text{因为} \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0, \text{ 故 } p = 1, q = 1.$$

本题中(D)之矩阵,特征值为

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0, \text{故 } p = 1, q = 1.$$

所以选(D).

注:本题的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 不仅和矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同,而且它们也相似,因为它们都和

$\begin{bmatrix} 3 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

二、填空题

(9)【分析】 利用等价无穷小因子替换有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 f^2(x)}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}f(0) = 1.$$

$$\Rightarrow f(0) = 2.$$

(10)【分析】 将方程改写成

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^{-x},$$

这是一阶线性方程. $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{|x|},$

两边乘 $\frac{1}{x}$ 得 $\left(\frac{1}{x}y\right)' = e^{-x}.$

积分得 $\frac{1}{x}y = -e^{-x} + c.$

通解为 $y = cx - xe^{-x},$

其中 c 为 $\forall$ 常数.

(11)【分析】 $(0,1)$ 在曲线上,先求 $y'(0).$

方程两边对 x 求导得

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') + \frac{1}{y-x}(y' - 1) = 1.$$

令 $x = 0, y = 1$ 得

$$1 + y'(0) - 1 = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$\Rightarrow$ 曲线在 $(0,1)$ 点的切线方程是

$$y = x + 1.$$

(12)【分析】 $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$ 处处连续,

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad (x \neq 0),$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1+x) \quad (x \neq 0),$$

由于 $x = -1$ 两侧 y'' 异号,故 $(-1, -6)$ 是拐点. 而 $x = 0$ 时 $(0,0)$ 不是拐点.

因此,拐点的坐标为 $(-1, -6).$

$$\begin{aligned}
 (13) \text{【分析】} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} &= \left. \frac{d}{dx} z(x, 2) \right|_{x=1} = \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right|_{x=1} = \left(e^{\frac{x}{2} \ln \frac{2}{x}} \right)' \Big|_{x=1} \\
 &= \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2}{x} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) \Big|_{x=1} = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2^{-\frac{1}{2}} (\ln 2 - 1).
 \end{aligned}$$

(14)【分析】 本题考查行列式的两个基本公式: $|kA| = k^n |A|$, $|A| = \prod \lambda_i$.

$$|2A| = 2^3 |A| = -48 \Rightarrow |A| = -6,$$

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = -1.$$

三、解答题

(15)【解法一】 $x \rightarrow 0$ 时 $x \sim \sin x$, 用等价无穷小因子替换得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x}.$$

作变量替换 $t = \sin x$ 后再用洛必达法则得

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解法二】} \quad I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \cos(\sin x))}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cdot \cos x}{6x} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

(16)【分析与求解】 先求出 $x(t)$, 它是可分离变量的一阶微分方程的解. 分离变量得

$$e^x dx = 2t dt,$$

积分得

$$e^x = t^2 + c.$$

由初条件得

$$c = 1. \text{ 于是}$$

$$e^x = t^2 + 1, \quad \text{即 } x = \ln(t^2 + 1).$$

下求

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \ln(1+t^2)}{2te^{-x}} = e^x \ln(1+t^2) = xe^x,$$

最后求

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (x+1)e^x.$$

评注 ① 前面求解中利用了方程 $x'_t = 2te^{-x}$ 及 $x = \ln(1+t^2)$.

② 用参数求导法求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \ln(1+t^2)}{2t} = (1+t^2) \ln(1+t^2).$$

最后用方程 $e^x = t^2 + 1, x = \ln(1+t^2)$, 也可得

$$\frac{dy}{dx} = xe^x.$$

③ 若用参数求导法求得

$$\frac{dy}{dx} = (1+t^2)\ln(1+t^2)$$

后未用方程简化它,也可进一步用参数求导法再求

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= [(1+t^2)\ln(1+t^2)]'_t \frac{dt}{dx} = 2t[1+\ln(1+t^2)] \cdot \frac{1+t^2}{2t} \\ &= (1+t^2)[1+\ln(1+t^2)],\end{aligned}$$

最后用方程得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(1+x).$$

$$\begin{aligned}(17) \text{【解】} \quad I &= \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x^2 \arcsin x d \arcsin x \stackrel{t=\arcsin x}{(x=\sin t)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{4} t^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} t \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{16} \pi^2 - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(18)【分析与求解一】 被积函数是分块表示的,用曲线 $xy=1$ (即 $y=\frac{1}{x}$) 将 D 分成两块:

$$D = D_1 \cup D_2,$$

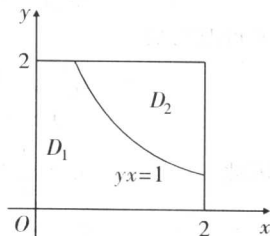
$$D_1: xy \leq 1, (x, y) \in D,$$

$$D_2: xy \geq 1, (x, y) \in D.$$

D_1 边界分段表示,又将 D_1 分成两块

$$D_1 = D_{11} \cup D_{12},$$

如图. 于是



$$\begin{aligned}I &= \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy = \iint_{D_{11}} 1 d\sigma + \iint_{D_{12}} 1 d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{\frac{1}{x}}^2 dx \\ &= 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - \frac{1}{2} \frac{1}{x}) dx = 1 + \frac{1}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= 1 + \ln 2 + (4 - \frac{1}{4}) = \frac{19}{4} + \ln 2.\end{aligned}$$

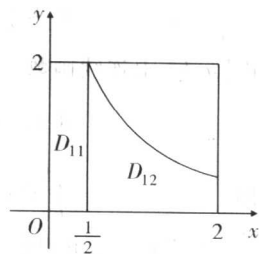
【分析与求解二】 D_1, D_2 如上所述,则

$$I = \iint_{D_1} 1 d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma.$$

将第一个积分作如下分解

$$\iint_{D_1} 1 d\sigma = \iint_D 1 d\sigma - \iint_{D_2} 1 d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad I &= 4 - \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy = 4 - \int_{\frac{1}{2}}^2 (2 - \frac{1}{x}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{\frac{1}{x}}^2 dx \\ &= 4 - 2 \cdot \frac{3}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 x dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx = 1 + \frac{1}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{19}{4} + \ln 2.\end{aligned}$$



(19)【分析与求解】 记 $f(x)$ 为 $y(x)$.

1) 列方程. 由旋转体的侧面积公式与体积公式按题意得

$$2\pi \int_0^t y(x) \sqrt{1+y'^2(x)} dx = 2\pi \int_0^t y^2(x) dx.$$

2) 转化为微分方程.

上述方程中, 令 $t = 0$, 等式自然成立. 现两边对 t 求导得

$$y(t) \sqrt{1+y'^2(t)} = y^2(t).$$

它与原问题等价, 又可转化成

$$y'(t) = \sqrt{y^2(t) - 1}$$

(因 $y(t)$ 是单调增函数, $y'(t) \geq 0$).

3) 求解微分方程的初值问题.

将 t 改为 x , 又题中要求 $y(0) = 1$, 归结为求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

分离变量得 $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx$.

积分并由初值得

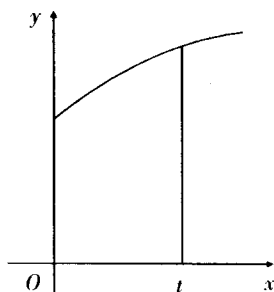
$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x, \quad y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x,$$

又可改写成

$$\ln \frac{1}{y - \sqrt{y^2 - 1}} = x, \quad y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{-x}.$$

因此

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$



(20)【分析与证明】 (I) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是其存在最大、最小值.

$$M = \max_{[a, b]} f(x), m = \min_{[a, b]} f(x),$$

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b]).$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

由 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 达到最大值与最小值定理及取中间值定理 $\Rightarrow \exists \eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{即} \quad \int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 先由积分中值定理可知, $\exists \eta \in [2, 3]$, 使得

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta).$$

现条件变成

$$\varphi(2) > \varphi(1), \quad \varphi(2) > \varphi(\eta), \eta \in (2, 3],$$

要证: $\exists \xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

方法 1° 分别在 $[1, 2], [2, \eta]$ 上用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (1, 2), \xi_2 \in (2, \eta)$, 使得

$$\frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} = \varphi'(\xi_1) > 0, \quad \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta - 2} = \varphi'(\xi_2) < 0.$$

再在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$,

$$\frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \varphi''(\xi) < 0.$$

方法 2° 用反证法证明.

若不然 $\Rightarrow$ 对 $\forall x \in (1, 3), \varphi''(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi'(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调不减.

若 $\varphi'(x)$ 在 $(1, 3)$ 恒正或恒负 $\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[1, 3]$ 单调与 $\varphi(1) < \varphi(2)$, $\varphi(2) > \varphi(\eta)$, 矛盾. 于是 $\exists \zeta \in (1, 3)$, 有 $\varphi'(\zeta) = 0$. 由 $\varphi'(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调不减 $\Rightarrow$

$$\varphi'(x) \begin{cases} \leq 0, & x \in (1, \zeta), \\ \geq 0, & x \in (\zeta, 3). \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[1, \zeta]$ 单调不增, 在 $[\zeta, 3]$ 单调不减.

若 $2 \in [1, \zeta] \Rightarrow \varphi(1) \geq \varphi(2)$ 与 $\varphi(2) > \varphi(1)$, 矛盾.

若 $2 \in [\zeta, \eta] \Rightarrow \varphi(2) \leq \varphi(\eta)$ 与 $\varphi(2) > \varphi(\eta)$, 矛盾.

因此 $\varphi''(x) \geq 0 (x \in (1, 3))$ 是不可能的, 即 $\exists \xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

方法 3° 用反证法证明.

已知结论: 若 $\varphi''(x) \geq 0 (x \in (1, \eta))$, 连接点 $(1, \varphi(1)), (\eta, \varphi(\eta))$ 的直线段方程是 $y = \varphi(1) + \frac{\varphi(\eta) - \varphi(1)}{\eta - 1}(x - 1) \stackrel{\text{记}}{=} g(x)$, 则 $\varphi(x) \leq g(x) (x \in [1, \eta])$.

[证明如下: 令 $F(x) = \varphi(x) - g(x)$, 则 $F(1) = 0, F(\eta) = 0$. 于是 $\exists \zeta \in (1, \eta), F'(\zeta) = 0$. 又

$$F''(x) = \varphi''(x) \geq 0 (x \in (1, \eta)),$$

$$\Rightarrow F'(x) \begin{cases} \leq F'(\zeta) = 0, & x \in (1, \zeta), \\ \geq F'(\zeta) = 0, & x \in [\zeta, \eta]. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} F(x) &\leq F(1) = 0 \quad (x \in [1, \zeta]), \\ F(x) &\leq F(\eta) = 0 \quad (x \in [\zeta, \eta]). \end{aligned}$$

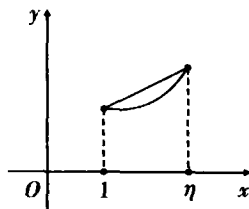
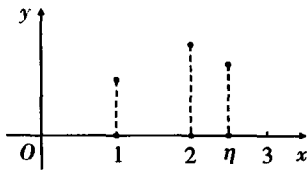
$$\text{因此 } F(x) \leq 0 \quad (x \in [1, \eta]).$$

$$\text{即 } \varphi(x) \leq g(x) \quad (x \in [1, \eta]).$$

但由 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \varphi(\eta) \Rightarrow$

$$\varphi(2) > g(2),$$

这便矛盾了. 因此 $\exists \xi \in (1, 3), \varphi''(\xi) < 0$.



(21)【解】 令 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$,

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0, & \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z = 0, & \text{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \mu} = x + y + z - 4 = 0, & \text{⑤} \end{cases}$$

由 ①, ② 得 $x = y (\lambda = -1, \mu = 0 \text{ 不是解})$, 再由 ④, ⑤ 得 $z = 2x^2, z = 4 - 2x$, 解得

$$P_1(1, 1, 2), \quad P_2(-2, -2, 8).$$

相应地

$$u(P_1) = 6, \quad u(P_2) = 72.$$

因此,在所给条件下, u 的最大值为 72,最小值为 6.

(22)【解】 (I) 用归纳法.

当 $n = 1$ 时,命题正确. 设 $n < k$ 时,命题正确.

当 $n = k$ 时,按第一列展开,记 n 阶行列式 $|A|$ 的值为 D_n ,则有

$$\begin{aligned} D_k &= 2a \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} \\ &= 2aD_{k-1} - a^2D_{k-2} = 2a(ka^{k-1}) - a^2((k-1)a^{k-2}) = (k+1)a^k, \end{aligned}$$

所以 $|A| = (n+1)a^n$.

(II) 由克莱姆法则, $|A| \neq 0$ 方程组有惟一解. 故 $a \neq 0$ 时方程组有惟一解. 且用克莱姆法则,有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 2a & 1 & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}}{D_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

(III) 当 $a = 0$ 时, 方程组 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 有无穷多解.

其通解为 $(0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T, k$ 为任意常数.

注: 本题 (I) 关于三对角线行列式的计算通常用递推法. (96 年数四考题中出现过)

例如, 本题按第 1 列展开, 有

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2},$$

得 $D_n - aD_{n-1} = aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}).$

从而 $D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$
 $= \dots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n.$

那么 $D_n = aD_{n-1} + a^n = a(aD_{n-2} + a^{n-1}) + a^n = a^2D_{n-2} + a^n$
 $= \dots = a^{n-1}D_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n.$

(23)【证明】 (I) 由特征值特征向量定义有: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$.

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$,

用 A 乘 ① 得: $-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0}$.

① - ② 得: $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = \mathbf{0}$.

因为 α_1, α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量, α_1, α_2 线性无关,

所以 $k_1 = 0, k_3 = 0$.

①

②

③