

流体力学中数值方法

第二届会议论文集

(一)

会议组织委员会编辑

西安交通大学印刷

一九八三年十月

目 录

前 言..... 1-1

第一部分：综合报告

二维不可压缩旋涡流计算方法..... 1-2

多重网格方法及流体计算中的应用..... 1-22

欧拉流体力学的多流体数值方法..... 1-41

无粘性和小粘性流动的随机叠法..... 1-63

Navier-Stokes 方程的分歧问题
及其有限元逼近..... 1-73

* Navier-stokes 方程数值解.....

* 有限元流体计算的 ~~一些方面~~.....

* 差分计算中波上下游的波动及反
扩散方法.....

第二部分：可压缩流动

流体力学计算中显式格式稳定条件的一
个简单的改进方法..... 2-1

几种差分格式的定量比较..... 2-11

关于二组人造粘性压强..... 2-18

差分格式与非物理解..... 2-25

注：* 文章的正文未及时收到。

非齐次 Burgers 方程初边值问题的

两个新的差分格式	2-35
关于平流方程初边值问题的改进的 Box 格式	2-49
反射爆炸波通过爆心后流动的数值计算	2-58
爆炸波和障碍物相互作用的数值模拟计算	2-63
轴对称喷管流场的非定常有限元计算	2-77
二组欧拉流体动力学方程的完全守恒差分格式	2-86
透平机械内部任意流面非定常粘性流原	
始变量法有限元解	2-96
解一组流体力学方程的半离散迎辽金方法	2-113
关于跨音速流的松弛迭代方法和两种自修	
正风洞的收敛性	2-122
三维两波干扰问题数方法	2-129
用 Lax — Wendroff, Rusanov, Flic 方	
法对激波遇山后绕射所作的数值模拟	2-135

· · · 第三部分: 不可压缩粘性流动

在极坐标系中二维不定常流体力学问题

的欧拉数值方法	3-1
狭缝中不可压粘性流的一种差分解法	3-8
带有柯氏力的三维定常 Navier — Stokes	
方程的有限元解法	3-17
Bingham 流有限元数值分析	3-25
用有限元法近似解 Stokes 方程	3-37

二维流体力学计算程序的试算检验	3-45
Navier-Stokes 方程的杂交有限元分析	3-53
Navier-Stokes 方程分歧解问题	3-55
不可压缩粘滞流体绕圆柱体稳定流动	
时阻力系数之计算	3-62
二维方腔环流计算的变步长超松弛法	3-72
关于三维光滑物体绕流的下潜整体	
连续分布奇点的方法	3-84
分叉管道中粘性流动的计算	3-89
反应流体力学数值模拟	8-102
不可压, 无旋流体界面扰动不稳定性	
的非线性计算	3-111
人体动脉血液流动一维模型的有限元	
数值模拟	3-117
Navier-Stokes 方程组的非协调	
有限元近似解	3-125

第四部分: 浅水流动和水波

跨临界速度运动扰动在浅水中兴起的波	4-1
柱体波浪绕射的相似单元法计算	4-11
一种计算激波的差分格式	4-20
二维长波数学模拟的研究	4-28
用边界元法解由二维物体引起的水波	
散射问题	4-89

潮波计算中的追赶法稳定性条件.....	4-47
河网 Saint-Venant 问题的最	
优控制有限元方法.....	4-53
计算三维物体不定常运动的三角元	
基本解法.....	4-58
关于三维物体不定常运动的偶极子	
基本解法及其数值求解.....	4-64
二维涡量流函数 Navier-Stokes	
方程交替方向线化隐式格式.....	4-70
感潮河网的水力计算.....	4-81

第五部分：输运及渗流问题

用差分方法解考虑了热传导的一	
维流体力学方程组.....	5- 1
解传输方程的一类差分格式.....	5-13
对井开采地热储的数值模拟.....	5-23
环量空间自然对流的数值研究.....	5-32
油、水两相渗流驱动问题的离散	
算法及其数值分析.....	5-43
单重和双重解介质二相渗流的特征线	
数值模拟及其理论分析.....	5-55
求解扩散—对流方程的一个差分方法.....	5-66
关于两相流的一个隐式方法.....	5-74

第六部分： 其 它

计算流体力学简史与展望.....	6-1
微射流的数值模拟.....	6-13
双曲型方程的一个数值边界处理.....	6-21
Hopf 方程用‘蛙跳’格式求解时 的计算稳定性.....	6-29
跨音速大攻角飞机气动特性的工程 估算方法.....	6-36
一类差分格式与守恒型方程组大范围 解的存在性.....	6-49
广义 KdV 方程的差分解法及其误差估计.....	6-57
守恒型双曲方程二阶精度 TVD 型 E-O 格式.....	6-65
解非齐次双曲型偏微分方程组的若干 数值方法.....	6-73
拟线性双曲型方程组的谱方法及误差估计.....	6-82
用指数拟合格式计算拟线性双曲线型方程.....	6-90
双曲型方程组差分格式与熵条件.....	6-98
二维流体弹塑性物质界面运动的计算.....	6-106

前 言

这一本“第二届流体力学数值方法讨论会论文集”收集的文章是我国数学、力学工作者近两年来辛勤劳动的部分成果。

流体力学数值方法讨论会是一个偏重在从数学方法角度上讨论流体力学数值解的会议。第一届讨论会于1981年在青岛举行，同样的会议准备每两年举行一次。

近年来在国内，计算流体力学的研究有很大的进展，这是由于在经济建设和国防建设中越来越多地提出、并要求解决这方面的问题，因而越来越多的同志认识到这门学科在我国的四化建设中所具有的重要性。在这样的形势下，许多科研、设计、生产单位的大批数学、力学工作者致力于流体力学计算方法的研究，并在电子计算机上作了大量的数值计算，这是十分可喜的现象。它预示着计算流体力学这门新兴的学科在我国将有巨大的发展前途。

这一届讨论会交流的文章内容十分广泛，有解非定常问题的，也有解定常问题的；有讨论粘性流的，也有讨论无粘流的；有提出新的计算格式，也有对原计算式的发展和运用；有理论分析，也有实际计算；采用的方法有差分方法，有限元法，还有特征线法等；涉及的领域有航天、能源、海洋、爆炸、生物等等。作者来自研究所、高等院校、部队等不同的岗位。堪称是一次交流的盛会。

遗憾的是有部分综合报告，由于作者工作繁忙未能及时交给我们，所以未收入本文集，我们将在以后采取适当措施进行补救。

最后，本文集的缮写、校对、印刷、装订主要由西安交通大学承担，在此向他们表示深切的谢意。

李德元

1983年9月

邬华谟

(中国科学院计算中心)

I、随着大型快速电子计算机的出现,人们对数值研究粘性流体运动的兴趣愈来愈大,建立了大量的数值方法,数值模拟了许多相当复杂的物理现象。不可压流体运动方程在气象预报,慢速流体运动的研究中起了重要的作用。在不可压流体运动中经常出现涡流,因而研究涡流的形成机理和发展过程在流体力学理论上和实验应用上都有很大意义。近二十年来在模拟涡流运动的计算方法及其理论分析方面都已取得了多方面的成果。当然,由于物理问题至少是二维的,在今天,能够被精细地刻划的涡流运动即使相当复杂还仅仅限于模型问题。

二维不可压流的运动可用 Navier-Stokes 方程来描述

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + \partial_x \varphi = \nu \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + \partial_y \varphi = \nu \nabla^2 v$$

这里 u 、 v 为速度分量, $\varphi = P/\rho$, P 、 ρ 分别为压力与密度, φ 有时也记为 P 称为压力, ν 为粘性系数。这一方程组称为原始 (Primitive) 方程, 各方程分别简称为连续方程, u ——方程, v ——方程, 由(1)可导出下面的压力方程

$$\nabla^2 \varphi = -Q \equiv -2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 + (\partial_y u)(\partial_x v)]$$

引进流函数 ψ 和函数 ζ , 方程(1)可写成

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta = \nu \nabla^2 \zeta \\ \nabla^2 \psi = -\zeta \end{cases} \quad (2)$$

$$(u, v) = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$$

$$\zeta = \partial_x v - \partial_y u$$

称为涡度方程。

有关这两类方程组在 1967 年以前的各种近似解法的评述可见 [1], 在书 [2] 中汇集了 1971 年之前的解法。我们在本文将介绍几类比较重要的差分算法和七十年代发展起来的几种涡方法。

I. 原始方程的差分格式

今后, 我们用 f_F^h, q 记 $f(n\Delta t, P\Delta x, q\Delta y)$ 有时也记 $f = f^n$
 $\hat{f} = f^{n+1}$, 记号 $f_{\hat{x}}, f_x, f_{\bar{x}}$ 分别表示函数 f 在 x 方向的中心、向前、向后差商, t, y 方向的记号也类似, $\Delta f = f_{x\bar{x}} + f_{y\bar{y}}$ 指 Laplace 算子的五点差分近似。

1. 标记格网法 (MAC) [3]. (1) 的差分记为

$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{u}_{\hat{x}} + \hat{v}_{\hat{y}} = 0 \\ u_t + (u^2)_{\hat{x}} + (uv)_{\hat{y}} + \phi_{\hat{x}} = v\Delta u \\ v_t + (uv)_{\hat{x}} + (v^2)_{\hat{y}} + \phi_{\hat{y}} = v\Delta v \end{cases}$$

由此三个差分方程可得到

$$\frac{\hat{D} - D}{\Delta t} = -Q - \Delta\phi + v\Delta D$$

所以

$$\Delta\phi = -Q + \frac{D}{\Delta t} + v\Delta D$$

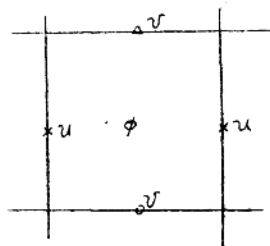


图 1

由此解出压力 ϕ 。物面边界条件的处理是比较麻烦的, 在 MAC 方法中用了 $\vec{u}$ 的对称性, 在物体内部设了虚点, 利用动量方程在物面上的投影给出 ϕ 的条件不是很自然的, 引起边界上 $D = 0$ 与 $\vec{u}$ 的对

称性不相协调的问题, MAC方法是求解原始方程组的重要方法, 计算了许多流动现象(图2为开闸现象的计算)。

2、正交分解法(orthogonal decomposition)[4、5]
Chorin应用了 $L_2(\Omega)$ 空间的正交分解定理[7]

$$L_2(\Omega) = G(\Omega) \oplus D(\Omega)$$

这里 $G(\Omega)$ 是由 Ω 内单值函数 ϕ 的梯度函数所组成, $D(\Omega)$ 是在 Ω 内具紧支集的散度为零的向量集合。

运动方程可写成

$$\partial_t \vec{v} + \nabla P = F\vec{v} \equiv -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

由连续方程可知

$$\nabla \cdot \partial_t \vec{v} = 0$$

所以 $\partial_t \vec{v} \in D(\Omega)$, 即 $\partial_t \vec{v}$ 是 $F\vec{v}$ 在 $D(\Omega)$ 上的投影:

$$\partial_t \vec{u} = \mathcal{P}(F\vec{v})$$

原始方程的求解过程很简单: $\partial_t \vec{v}$ 离散化为 $\vec{v}_t$, 在 $(n+1)\Delta t$ 时间层上计算 $F\vec{v}$ 如下:

$$\vec{v}^{(n+\frac{1}{2})} = \vec{v} + \Delta t Q_1(v) v^{(n+\frac{1}{2})}$$

$$\vec{v}^{(n+\frac{3}{2})} = \vec{v}^{(n+\frac{1}{2})} + \Delta t Q_2(v) v^{(n+\frac{3}{2})}$$

$$F\vec{v} = (\vec{v}^{(n+\frac{3}{2})} - v) / \Delta t$$

这里

$$Q_1(v)w = -uw\hat{x} + \bar{w}x\bar{x}$$

$$Q_2(v)w = -vw\hat{y} + w\bar{y}\bar{y}$$

利用 $F\vec{u}$ 求出投影 $\mathcal{P}(F\vec{v})$ 如下:

任取 $\phi^{(0)}$, 建立下述迭代过程

$$w^{(m+1)} = F\vec{v} - G\phi^{(m)}$$

$$\phi^{(m+1)} = \phi^{(m)} - \theta Dw^{(m+1)}$$

$$0 < \theta < h^2/2e, \quad m = 0, 1, \dots$$

其中 G 为梯度算子 (用中心差商), $Dw = w_x^{(x)} + w_y^{(y)}$ 为散度算子, 迭代是收敛的, 若取 $h = \min(\Delta x, \Delta y)$, $w^{(m)} \rightarrow$

$$\phi(F\vec{v}).$$

最后得到

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^n + \Delta t \phi(F\vec{v})$$

Chorin 的正交分解算法思想是尔后许多分裂解法的算法和理论分析的基础。

3、简化 MAC 法 (SMAC) [6]。是 MAC 方法的改进与简化, 在方法中应用了 Chorin 的正交分解思想 (显式)。

$$\frac{\tilde{u}-u}{\Delta t} + \partial_x(u^2) + \partial_y(uv) = v\partial_y(\partial_y u - \partial_x v) - \partial_x \tilde{\phi}$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\Delta t} + \partial_x(uv) + \partial_y(v^2) = -v\partial_x(\partial_y u - \partial_x v) - \partial_y \tilde{\phi}$$

函数 $\tilde{\phi}$ 任意, 往往取为零, 在物面边界上 $\tilde{u} = \tilde{u}$ 为了使求得的速度满足连续方程 $D = 0$, 将 $\tilde{u}$ 修正为

$$u^{n+1} = \tilde{u} - \tilde{\phi}_x \quad v^{n+1} = \tilde{v} - \tilde{\phi}_y$$

使 $D^{n+1} = u_x^{n+1} + v_y^{n+1} = 0$, 于是得到 $\tilde{\phi}$ 的五点格式, $\tilde{\phi}$ 的边

界条件比较自由, 比如在物面壁上的保证 $\tilde{u} = 0$, 用 $\tilde{\phi}_x = 0$, 从而避开了使用运动方程在物面上取投影的不自然作法。

用 SMAC 方法也计算了大量的物理现象 (图 3 是水滴溅落现象)

4、6——分裂法 (6-splitting) (8)、Бендерко-Бекун 等人应用了 MAC 的方程, SMAC 的分裂算法, 在压力方程中采用了 (9) 的边界处理, 使边界条件都成为齐次的, 解决了引进过网格点后引起的边界上连续方程与流动对称性的矛盾。在 (8) 中压力方程系用超松弛法求解, 计算了圆柱绕流。在 (10) 在三维裂纹中粘性流计算中改进了 6-分裂法, 并应用了多重网格迭代法求解压力方程。近年, 多重网格法已用来求解整个原始方程 (11), 计算了空穴流动问题。

5、发展型化 (人工压缩法) (12, 13, 14, 15) 原始方程

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

不是发展型的, 引入带小参数的时间导数项将它修改为发展型方程是自然的, 一般形式为

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \varepsilon_1 L_1(\vec{v}, P) = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\varepsilon_2 \partial_t (L_2(\vec{v}, P)) + \nabla \cdot \vec{v} + \varepsilon_3 L_3(\vec{v}, P) = 0$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为小参数, L_i 算子可取为: $L_1 = L_3 = 0, L_2 = P$ 或 $P + \vec{v}^2/2$; 或者 $L_1 = G, L_2 = P, L_3 = -\Delta P$; 等等。这一新方程组可用各种适用于发展型方程的近似算法进行计算。

6、平均守恒格式 这是首先由气象工作者为了克服非线性计算不稳定性而提出的 (16, 17, 18) 以 Burgers 方程

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u \text{ 为例。差分格式}$$

$$u_t + \frac{1}{2}(u \bar{u} \hat{x} + (u \bar{u}) \hat{x}) = \nu \bar{u} \bar{x} \bar{x}, \bar{u} = (\hat{u} + u)/2, \text{ 就是一种}$$

平均守恒格式，容易证明

$$(|u|^2)_t \leq 0 \quad (v \geq 0)$$

其相应于原始方程组的平均守恒格式如下〔17〕：

$$\text{记} \quad d(\eta, \omega) = \frac{1}{2} \sum_j \omega_j \eta \hat{x}_j + (\omega_j \eta) \hat{x}_j$$

$$D(\omega) = \sum \omega \hat{x}_j^{(j)}, G(P) = (P \hat{x}_1, \dots, P \hat{x}_n)^T$$

差分格式为

$$u_t + d(\bar{u}, u) - v \Delta \bar{u} + G(\bar{P}) = 0$$

$$\beta_1 P_t - \beta_2 \Delta \bar{P} + D(\bar{u}) = 0$$

可证明，当 β_1, β_2 以适当方式趋于零 $u \rightarrow \bar{u}$ 。所论格式是隐式的，需要迭代求解。

7. 有限元法，这方面已有许多文献研究其数学基础和其应用，获得了 Navier-Stokes 方程在 v 足够大时近似解的收敛性和误差估计（如专著〔19〕）。通常的有限元法应用于不可压流体计算，在 v 很小时效果不好，故多用迎风 (upwind) 有限元法〔20, 21〕，这里介绍一种有限元与差分格式相结合的算法〔22〕。

原始方程组差分化为

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (u^n \cdot \nabla) u^n - v \Delta u^{n+1} + \nabla P^{n+1} = f^n \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \end{cases}$$

由此得到线性方程组

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - v \Delta u^{n+1} + \nabla P^{n+1} = f^n + \frac{u^n}{\Delta t} \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \end{cases}$$

称为 Stokes 问题, 对于它的求解, 已有很多有效的有限元算法 [23, 24], 至于对流项 $(u^n \cdot \nabla) u^n$ 的计算系用迎风差分, 效果比较好。当采用中心差分, 在 ν 小时会出现波动。此方法被用来计算大 Re 数流动 (图 4 是空穴射流问题)。

II. 涡度方程的差分解法

涡度方程组为

$$\partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta = \nu \nabla^2 \zeta$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta$$

第二个方程通常用松弛法或交替方向法求解, 而第一个方程的差分格式与一维对流扩散方程

$$\partial_t \zeta + a \partial_x \zeta = \nu \partial_x^2 \zeta$$

的差分格式关系密切, 它的求解格式可参看 [2, 25]。最常用的有显式迎风格式、Dufort-Frankel 格式, 预估校正格式和 Crank-Nicolson 格式等, 其平方守恒格式可见 [26]。

显式的二维格式可由一维格式直接推广, 隐式格式往往采用 ADI 或 Splitting 技巧。涡度方程的平均守恒格式有 Arakawa 格式 [16], 它是最常用的显式格式, 守恒性质也很好。全隐平方守恒格式可见 [27]。

在 I、II 中提到的差分格式基本上是 Euler 型方法, 下面我们介绍 Lagrange 型的所谓滑方法。

IV. 涡方法 (Vortex methods)

早在1931年Rosenhead就用了这一方法〔28〕, 但真正懂得方法的实质和方法得到很大的发展还是近十年的事情, 参看评述文章〔29, 30〕. 方法的思想是将流场离散化, 利用该函数 ϕ 的泊松公式求得的旋度 $\vec{u}(x, y, t)$ 来构造质点的运动速度

$\vec{u}(x, y, t)$; 用

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

来跟踪质点.

我们在这里着重介绍点涡法 (Rosenhead, 1931), 涡团法 (Chorin, 1973), 格网中涡度法 (Christiansen, Zabusky, 1973) 及团运动态法 (Zabusky, 1978).

流函数 ϕ 满足方程

$$\nabla^2 \phi = -\zeta$$

于是

$$\phi(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \log \rho \cdot \zeta(\xi, \eta, t) d\xi d\eta,$$

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

由此得到

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{(y-\eta)\zeta(\xi, \eta, t)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta$$

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(x-\xi)\zeta(\xi, \eta, t)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta$$

记 $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{e}_z$ 指 z 方向单位向量, $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$, $d\vec{\xi} = d\xi d\eta$, 则有

$$\vec{u}(\vec{\xi}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{(\vec{x}-\vec{\xi}) \times \vec{e}_z \cdot \zeta(\vec{\xi}, t)}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2} d\vec{\xi}$$

上述积分数值处理的优劣直接影响涡方法的质量。

1. 点涡法 (Point vortex method) (28)

涡度场离散化为 N 个点涡 ξ_i , 位于 $\vec{x} = \vec{x}_i$ 旋度

$$\Gamma_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$\zeta(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$

所以有

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \Gamma_j \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j) \times \vec{e}_z}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^2}$$

点涡的运动方程为

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \Gamma_j \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{e}_z}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2} \quad i = 1, \dots, N$$

Rosenhead 本人只用了少量的点涡手算于涡片 (vortex sheet) 的运动。尔后人们增大 N 发现方法不收敛。原因是涡片不稳定状态, 随着点涡的运动, 某些点涡间的距离会趋于零。若记

$$e(t) = \min_{i \neq j} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$$

上述点涡的运动方程组

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$$

的刚度很厉害 $|J(f)| \approx 1/\varepsilon^2$, 点涡方法已作了许多修改和发展。

2. 涡团法 (vortex-blob method)

点涡方法中用的点涡太奇异了 (涡点的速度为 ∞)，Chorin 将涡场表示为

$$\zeta(\vec{x}, t) = \sum \Gamma_j \gamma(\vec{x} - \vec{x}_j), \quad \int \gamma(\eta) d\eta = 1$$

γ 是 δ 函数的一种近似，Chorin 取 $\gamma(\vec{x})$ 如下：

$$\gamma(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\delta} \frac{1}{|\vec{x}|} & , \quad |\vec{x}| \leq \delta \\ 0 & , \quad |\vec{x}| > \delta \end{cases}$$

δ 为固定的常数。这时流函数 ψ 可表示为

$$\psi(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{|\vec{x}|^2}{2\pi\delta} & , \quad |\vec{x}| \leq \delta \\ -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \log \frac{\delta}{|\vec{x}|} \right) & , \quad |\vec{x}| > \delta \end{cases}$$

这种涡团法亦称为圆涡团法，用 ψ 算出 $\vec{u}$ ，再用 Euler 法解点 $\vec{x}_i$ 的运动方程，得到

$$\vec{x}_i^{n+1} = \vec{x}_i^n + \vec{u}(\vec{x}_i^n, t_n) \Delta t$$

涡团法的第二步是处理扩散效应，它可以用涡团中心的随机游动来模拟，即

$$\vec{x}_i^{n+1} = \vec{x}_i^{n+1} + \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$$

η_1, η_2 是均值为零，方差为 $2\Delta t \cdot \nu$ 的正态分布随机数。完整的计算公式是

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t \cdot u(\vec{x}_i^n, t_n) + \eta_1$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \Delta t \cdot v(\vec{x}_i^n, t_n) + \eta_2$$

粘性边界条件用流场对称或附加场往来处理。

在涡团法的计算中没有引入通常差分格式的格式粘性项，有利