

王俊玲 著

时滞线性参数变化系统的 稳定性分析与增益调度控制



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统地介绍了时滞线性参数变化系统的稳定性分析和增益调度控制方法,力图概括国内外最新研究成果。主要内容包括:时滞相关和参数相关稳定性分析、状态反馈和基于观测器的输出反馈镇定、增益调度控制、全阶和降阶增益调度滤波器的设计和模型降阶方法。

本书系统性强、覆盖面广,可作为高等院校控制理论与控制工程以及相关专业的研究生教材,也可供研究线性参数变化系统理论的科技工作者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

时滞线性参数变化系统的稳定性分析与增益调度控制/王俊玲著. —北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-021249-8

I. 时… II. 王… III. 时滞系统-参数-稳定性(数学)-分析 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 028346 号

责任编辑:王志欣 孙 芳 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:刘士平 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽 源 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 6 月第一次印刷 印张:14

印数:1—2 500

字数:272 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

随着科学技术的进步,对控制系统性能的要求也越来越高,特别是高技术领域,如机器人、飞行器、大型柔性结构等,对控制系统的精确度也提出了更高的要求,这种工程实践的迫切需要是促进非线性系统和鲁棒控制理论迅速发展的主要因素之一。几乎所有的实际系统本质上都具有非线性和时变特性,而线性参数变化系统可以描述非线性和时变特性。用鲁棒控制理论来解决非线性问题,设计随参数变化的控制器,调节参数可以反映系统的非线性和时变特性,其控制思路是运用一些成熟的线性化方法将非线性系统在多个参数化工作点作线性化,并设计多个控制器,根据给定的参数变化轨迹切换所设计的增益调度控制器。近年来,线性参数变化系统理论的应用领域不断拓宽,从航空、航天、机器人到工业过程控制领域等都有广泛的应用,已成为解决非线性问题的最有效的方法之一。

在工业过程控制系统中,当物质和能量沿着特定的传输介质传输时,就会出现滞后,时滞是物质和能量运动过程中固有的特性,时滞现象是极其普遍的,如核反应堆、通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系统、电力系统等都是典型的时滞系统。时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难,同时,时滞的存在也往往是系统不稳定、振荡或系统性能变差的根源之一。

本书基于参数依赖 Lyapunov 方法,针对状态时滞线性参数变化系统,系统地介绍了稳定性分析方法、镇定控制、增益调度控制、滤波以及模型降阶问题,着重反映时滞线性参数变化系统的最新研究成果和发展动态。本书的内容取材于作者在一些期刊和国际会议上公开发表的学术论文,同时融合了国内外学者在该领域的部分优秀研究成果。

本书的研究成果得到了国家自然科学基金(项目编号:60504008)的部分资助、黑龙江省博士后基金(项目编号:LBH-Z05048)和哈尔滨工程大学基础研究基金(项目编号:HEUFT05004)的资助,在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

2008 年 1 月 1 日

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
第 2 章 LPV 系统概述	4
2.1 LPV 系统模型	4
2.2 Lyapunov 稳定性	6
2.3 参数 LMI	9
第 3 章 时滞 LPV 系统的稳定性	11
3.1 时滞 LPV 连续系统的稳定性	11
3.1.1 LPV 连续系统的时滞无关稳定性	11
3.1.2 LPV 连续系统的时滞相关稳定性	17
3.2 时滞 LPV 离散系统的稳定性	31
3.2.1 时滞 LPV 离散系统的时滞无关稳定性	31
3.2.2 时滞 LPV 离散系统的时滞相关稳定性	37
第 4 章 时滞 LPV 系统的镇定	48
4.1 时滞 LPV 系统的状态反馈镇定	48
4.1.1 时滞 LPV 连续系统的状态反馈镇定	48
4.1.2 时滞 LPV 离散系统的状态反馈镇定	60
4.2 基于观测器的输出反馈镇定	65
4.2.1 连续系统基于观测器的增益调度镇定	66
4.2.2 离散系统基于观测器的增益调度镇定	71
第 5 章 时滞 LPV 系统的增益调度控制	78
5.1 时滞 LPV 系统的 H_∞ 状态反馈控制	78
5.1.1 时滞 LPV 连续系统的 H_∞ 状态反馈控制	78
5.1.2 时滞 LPV 离散系统的 H_∞ 状态反馈控制	94
5.2 时滞 LPV 系统的 L_2 - L_∞ 状态反馈控制	100
5.2.1 时滞 LPV 连续系统的 L_2 - L_∞ 控制	100
5.2.2 时滞 LPV 离散系统的 L_2 - L_∞ 控制	104
5.3 时滞 LPV 系统的动态输出反馈控制	108
5.4 基于状态观测器的 H_∞ 控制	113
5.4.1 连续系统基于观测器的 H_∞ 控制	113

5.4.2 离散系统基于观测器的 H_∞ 控制	125
第 6 章 时滞 LPV 系统的 H_∞ 滤波	137
6.1 时滞 LPV 连续系统的鲁棒 H_∞ 滤波	137
6.1.1 具有参数相关时滞的 LPV 系统的鲁棒 H_∞ 滤波	137
6.1.2 LPV 连续系统的时滞相关鲁棒 H_∞ 滤波	147
6.2 时滞 LPV 离散系统的鲁棒 H_∞ 滤波	154
6.2.1 与时滞变化范围相关的鲁棒 H_∞ 滤波	155
6.2.2 与时滞上限和时滞变化范围都相关的鲁棒 H_∞ 滤波	161
第 7 章 时滞 LPV 系统的 H_∞ 模型降阶	171
7.1 连续系统的 H_∞ 模型降阶	171
7.1.1 问题描述	171
7.1.2 主要结果	173
7.2 离散系统的 H_∞ 模型降阶	174
7.2.1 问题描述	174
7.2.2 主要结果	175
7.3 应用举例	178
第 8 章 时滞中立型 LPV 系统分析	186
8.1 稳定性分析	186
8.1.1 具有参数相关时滞的中立型 LPV 系统的稳定性	186
8.1.2 具有混合时变时滞的中立型 LPV 系统的稳定性	189
8.1.3 算例	193
8.2 时变时滞中立型 LPV 系统的 H_∞ 控制	194
8.3 时变时滞中立型 LPV 系统的保性能控制	201
8.4 时滞中立型 LPV 系统的 H_∞ 滤波	205
8.4.1 参数相关时滞中立型 LPV 系统的 H_∞ 滤波	205
8.4.2 时变时滞中立型 LPV 系统的 H_∞ 滤波	209
8.4.3 算例	211
参考文献	214

第 1 章 绪 论

众所周知,实际的物理系统本身存在着非线性和时变特性。当系统的实际工作点与平衡点接近时,用线性系统描述实际系统是可能的,而当实际工作点偏离平衡点范围较大时,系统的动态特性就不能用线性模型来描述了。解决问题的方法之一是引入不确定性,将线性控制理论扩展到鲁棒控制理论,然而,设计过程中不确定性的引入将导致所设计控制器的性能指标下降。增益调度控制是解决非线性系统控制问题的有效方法之一,它是通过一些成熟的线性化方法将非线性系统在多个参数化工作点作线性化,设计多个控制器,根据用户定义的参数变化轨迹切换所设计的控制器来实现增益调度控制。增益调度控制技术已经广泛地应用在飞机控制、导弹自动飞行、发动机控制、机器人控制、过程控制等各个领域^[1~5],随着这一技术的迅速发展,加速了对线性参数变化(linear parameter-varying, LPV)系统的大量研究。

LPV 系统理论最早是由 Shamma 在 1988 年提出来的^[6],其动态特性依赖于实时可测的调节参数^[7]。因其中的调节参数可以反映系统的非线性特性,LPV 系统可用于描述非线性系统,运用线性化方法设计增益调度控制器,从而使控制器的增益随参数的变化而变化。大体上来说,用 LPV 系统设计增益调度控制器有以下四个步骤^[8]。

第一步:计算系统的 LPV 系统模型。用 LPV 系统模型描述非线性系统有两种方法,即线性化方法和二次 LPV 系统方法。其中,最常用的线性化方法是在一组工作点上做雅可比线性化,产生一组参数化线性模型;二次 LPV 系统方法则是将非线性作为时变调节参数。

第二步:用线性系统控制方法设计 LPV 系统的控制器,对应每一个参数化线性模型产生一个线性控制器或随参数变化控制器。传统的设计方法是对应参数每个固定点,使闭环系统满足规定的性能指标,而近年来的设计目标是保证在整个参数变化轨迹上满足性能指标要求。

第三步:所设计的线性控制器或随参数变化控制器实现增益调度,实现在整个参数变化轨迹上的增益调度控制器的切换,其中,增益调度控制器的增益是随调节参数的变化而变化的。

第四步:性能评价。在增益调度控制器的作用下,分析闭环系统的稳定性和所能达到的性能指标。

因而,用 LPV 系统理论可以设计增益调度控制器,这在许多非线性系统的控

制过程中得到非常广泛的应用,早期多用于军事领域,近年来其应用领域不断拓宽,从航空、航天、机器人到工业过程控制领域等都有广泛的应用,成为非线性控制方法中最有效的方法之一。

在工程实际中,时滞现象是极其普遍的,通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系统、电力系统等都是典型的时滞系统。时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难,同时,时滞的存在也往往是系统不稳定和系统性能变差的根源之一。忽略系统中固有的时滞现象设计出的控制器或滤波器在实际应用中会出现不稳定或性能下降。近年来,国内外学者在时滞系统的分析和综合上做了较多的研究工作,使得时滞系统的分析与综合成为控制理论和控制工程领域中研究的一个热点问题,主要有以下两方面的原因:①实际的工程背景需要有更精确的数学模型去模拟复杂的工程问题,而具有时滞的数学模型是对实际系统一种更为精确的描述;②数学,尤其是线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)的发展为具有时滞的系统提供了强有力的研究手段。

目前,针对时滞系统研究所取得的成果还具有很大的局限性和保守性,主要表现在:时滞系统研究中所得结论大多为充分条件,根据所采用的稳定条件是否依赖于时滞的大小可以将研究成果分为时滞无关和时滞相关两类。时滞无关的研究方法设计出的控制器或滤波器不考虑时滞的大小,因而当系统中的时滞较小时,这种方法具有较大的保守性。与时滞相关的研究是近年来的热点,主要通过将系统模型进行变换和定义新的 Lyapunov-Krasovskii 函数等方法推导得出,但目前所取得的研究成果仍具有一定的保守性,其模型转换方法主要有以下四种类型。

(1) 一阶模型转换^[9]。转换后的系统中引入了附加的特征值,使其与原始系统不等价。

(2) 中立型转换^[10]。用这种方法得到的系统与原始系统不等价,这种方法还采用了一个保守的不等式,即 $-2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $X > 0$ 来决定系统的稳定性。

(3) 模型转换产生的不等式与原始系统等价,其保守性有一定的降低。这种方法在 Lyapunov 函数的求导过程数中使用了 Leibniz-Newton 公式,简单地用 $x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds$ 来代替 $x(t-\tau)$,并通过引入附加矩阵来降低保守性,如 Park 引入了一个附加矩阵 M 得到了一个保守性较小的不等式,即 $-2a^T b \leq (a + Mb)^T X (a + Mb) + b^T X^{-1} b + 2b^T Mb$, Moon 等^[11]将上述不等式推广为保守性更小的形式,即

$$-2a^T b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - I \\ Y^T - I & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$$

(4) 广义模型转换方法。是由 Fridman 和 Shaked 在 Park 不等式基础上提出来的,这种方法产生了较低保守性的时滞相关稳定性准则^[12~14]。

与非时滞 LPV 系统研究上所取得的成果相比,时滞 LPV 系统的研究成果较少,近年来出现了一些讨论时滞 LPV 系统的文章,然而这方面的工作还有很大的局限性。

本书针对时滞 LPV 系统,将增益调度控制技术与先进的鲁棒控制方法相结合,提出了一些新颖的系统化设计方法,为时滞 LPV 系统理论的研究与工程应用打下了坚实的基础。

全书的主要内容如下。

第 1 章是绪论,主要阐述本书思想。

第 2 章概述 LPV 系统。介绍 LPV 系统数学模型和主要研究方法,给出 Lyapunov 稳定性的定义和参数依赖 Lyapunov 函数,简述参数相关 LMI 的有关知识。

第 3 章主要讨论时滞 LPV 系统的稳定性。基于不同的参数依赖 Lyapunov-Krasovskii 函数,得到多个时滞无关和时滞相关稳定性条件,为后续章节奠定了理论基础。

第 4 章讨论时滞 LPV 系统的镇定问题,主要给出两个方面的内容,即状态反馈增益调度镇定和基于观测器的输出反馈增益调度镇定。

第 5 章讨论时滞 LPV 系统的控制问题,包括 H_∞ 控制和 L_2 - L_∞ 控制。在两种性能指标的控制中,针对具有参数相关时滞的 LPV 系统,分别设计了状态反馈、输出反馈和基于状态观测器的输出反馈增益调度控制器,在保证闭环系统参数渐近稳定的同时,要求系统满足性能指标的要求。

第 6 章讨论时滞 LPV 系统的滤波问题,就连续和离散两种情形,分别研究了时滞无关和时滞相关增益调度 H_∞ 滤波器的设计方法,所设计的全阶和降阶 H_∞ 滤波器能够保证相对于所有能量有界的外界扰动信号,滤波误差系统的 H_∞ 性能指标小于一定值。

第 7 章讨论时滞 LPV 系统的模型降阶问题,基于参数依赖 Lyapunov 稳定思想,用矩阵的全等变换和变量替换方法,提出了状态时滞 LPV 连续系统和离散系统满足 H_∞ 误差性能要求的低阶模型的构造方法。

第 8 章对时滞中立型 LPV 系统进行了探索性的研究。在前面内容的基础上,进一步分析了时滞中立型 LPV 系统的时滞无关和时滞相关稳定性,进而讨论了 H_∞ 控制、保性能控制和滤波问题,分别设计了增益调度控制器和滤波器。

第 2 章 LPV 系统概述

本章介绍 LPV 系统的数学模型和系统稳定性的一些基本概念和结论,为后续章节的讨论作准备。

2.1 LPV 系统模型

一个 LPV 连续时间系统通常可以描述为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B_1(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t) \\ z(t) &= C_1(\rho(t))x(t) + D_{11}(\rho(t))w(t) + D_{12}(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= C_2(\rho(t))x(t) + D_{21}(\rho(t))w(t) + D_{22}(\rho(t))u(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

式中, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $z(t) \in \mathbf{R}^r$ 为控制输出; $y(t) \in \mathbf{R}^p$ 为测量输出; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入; $w(t) \in \mathbf{R}^q$ 为扰动输入。假定系统状态矩阵 $A(\cdot)$ 、 $B_1(\cdot)$ 、 $B_2(\cdot)$ 、 $C_1(\cdot)$ 、 $C_2(\cdot)$ 、 $D_{11}(\cdot)$ 、 $D_{12}(\cdot)$ 、 $D_{21}(\cdot)$ 和 $D_{22}(\cdot)$ 为时变参数 $\rho(t) \in \mathbf{F}_\rho$ 的函数, $\mathbf{F}_\rho$ 是参数变化轨迹的集合, 其定义如下:

$$\mathbf{F}_\rho^v = \{\rho \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^s) : \rho(t) \in \mathbf{F}, \|\dot{\rho}_i(t)\| \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s, \forall t \in \mathbf{R}^+\}$$

式中, $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{R}^s$ 的一个子集, $\{v_i\}_{i=1}^s$ 是非负的, 即参数有界且参数的变化率有界。通常称式(2.1)中的第一式为系统的状态方程, 第二式为系统的控制输出方程, 第三式为系统的测量输出方程。

一般地, 可假定系统状态矩阵在某个已知的有界集中变化。如果模型中的系数矩阵仿射依赖于参数向量 $\rho(t)$, 即

$$\begin{aligned}A(\rho(t)) &= A_0 + \rho_1(t)A_1 + \dots + \rho_s(t)A_s \\ B_1(\rho(t)) &= B_{10} + \rho_1(t)B_{11} + \dots + \rho_s(t)B_{1s} \\ B_2(\rho(t)) &= B_{20} + \rho_1(t)B_{21} + \dots + \rho_s(t)B_{2s} \\ C_1(\rho(t)) &= C_{10} + \rho_1(t)C_{11} + \dots + \rho_s(t)C_{1s} \\ C_2(\rho(t)) &= C_{20} + \rho_1(t)C_{21} + \dots + \rho_s(t)C_{2s} \\ D_{11}(\rho(t)) &= D_{110} + \rho_1(t)D_{111} + \dots + \rho_s(t)D_{11s} \\ D_{12}(\rho(t)) &= D_{120} + \rho_1(t)D_{121} + \dots + \rho_s(t)D_{12s} \\ D_{21}(\rho(t)) &= D_{210} + \rho_1(t)D_{211} + \dots + \rho_s(t)D_{21s} \\ D_{22}(\rho(t)) &= D_{220} + \rho_1(t)D_{221} + \dots + \rho_s(t)D_{22s}\end{aligned}$$

式中, A_i 、 B_{ji} 、 C_{ji} 、 D_{lji} ($i=0, \dots, s, j=1, 2, l=1, 2$) 是已知的常数矩阵, 具有这样系

数矩阵的模型称为仿射 LPV 模型。如果令

$$S(\rho(t)) = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2(\rho(t)) \\ C_1(\rho(t)) & D_{11}(\rho(t)) & D_{12}(\rho(t)) \\ C_2(\rho(t)) & D_{21}(\rho(t)) & D_{22}(\rho(t)) \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix}$$

则仿射 LPV 模型的系统矩阵可以表示为

$$S(\rho(t)) = S_0 + \rho_1(t)S_1 + \cdots + \rho_s(t)S_s$$

也就是说,用 $S_0, \dots, S_s$ 可以刻画所要描述的仿射 LPV 模型。

类似地,若系统矩阵 $S(\rho(t))$ 可以在以下给定的矩阵多胞模型中取值,即

$$S(\rho(t)) \in \text{Co}\{S_1, \dots, S_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

式中, $S_1, \dots, S_k$ 为已知的矩阵,即

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_{11} & B_{21} \\ C_{11} & D_{111} & D_{121} \\ C_{21} & D_{211} & D_{221} \end{bmatrix}, \dots, S_k = \begin{bmatrix} A_k & B_{1k} & B_{2k} \\ C_{1k} & D_{11k} & D_{12k} \\ C_{2k} & D_{21k} & D_{22k} \end{bmatrix}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是不确定参数,此时得到的模型称为多胞 LPV 模型。注意到,模型中包含不确定参数,有时也将其称为不确定性多胞 LPV 模型。

在鲁棒控制方法中,常常考虑将不确定性系统描述为不确定性线性分式模型,而 LPV 系统同样可以描述为基于线性分式变换的 LPV 模型。将 LPV 模型限制为能转换成包含时变参数 $\rho(t)$ 的反馈环的线性时不变模型,这样的模型被称为线性分式模型^[15],其中,连续系统的描述如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \alpha(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \beta(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

反馈为

$$\beta(t) = \rho(t)\alpha(t) \quad (2.3)$$

式中,

$$\rho(t) = \text{blockdiag}(\rho_1(t)I_{r_1}, \rho_2(t)I_{r_2}, \dots, \rho_s(t)I_{r_s}) \quad (2.4)$$

$\rho_i(t)$ 代表第 i 个时变参数; I_{r_i} 表示 $r_i \times r_i$ 维的单位阵。假定

$$|\rho_i(t)| \leq 1/\gamma \quad (2.5)$$

式中, γ 为正常数。图 2-1 给出了其典型模型的方块图。当 LPV 系统的状态空间矩阵为依赖于参数的有理函数或凸多面体时,系统可以转换成线性分式模型结构,但是,随着参数方块的大量增加,可能

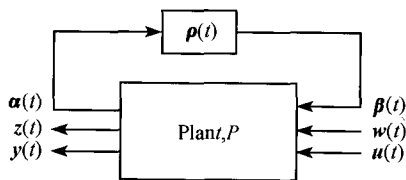


图 2-1 参数相关线性分式变换(LFT)系统

导致系统阶数的剧增,进而使控制器的维数增加,加大设计问题的计算难度。

2.2 Lyapunov 稳定性

稳定性是系统的重要特性,研究 LPV 系统稳定性问题的一种有效方法是应用 Lyapunov 稳定性理论。在研究 LPV 系统的 Lyapunov 稳定性问题时,通常考虑没有外输入作用时的 LPV 系统,即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) \quad (2.6)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $\mathbf{A}(\cdot)$ 为时变参数 $\boldsymbol{\rho}(t)$ 的函数。要研究的问题是:给出系统(2.6)的稳定性条件,在系统满足稳定性条件的情况下,对参数的整个变化轨迹,系统(2.6)都是渐近稳定的。

定义 2.2.1 对系统(2.6),如果存在一个对称正定矩阵 $\mathbf{P}$,使得对所有的参数变化轨迹满足

$$\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t)) < 0 \quad (2.7)$$

则称系统(2.6)是二次稳定的。

从定义中可以看出,不等式(2.7)可以保证系统(2.6)的一个二次型 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ 满足

$$\dot{V} = \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} < 0 \quad (2.8)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论,可得系统(2.6)是渐近稳定的。注意到,二次稳定性要求对所有的参数变化轨迹存在一个公共的 Lyapunov 函数矩阵 $\mathbf{P}$,显然这样的要求是很高的,二次稳定性具有较大的保守性。特别对于慢时变的参数变化系统来说,二次稳定性的保守性尤为突出。如果用一个参数依赖 Lyapunov 矩阵来代替二次稳定性中的公共 Lyapunov 矩阵,进而得到稳定性条件,将有利于降低二次稳定性概念中由于采用单一的 Lyapunov 矩阵而引入的保守性。

定义 2.2.2 对系统(2.6),如果存在一个依赖于参数的连续可微对称正定矩阵 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}(t))$,使得对所有的参数变化轨迹满足

$$\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}(t)) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t)) + \dot{\mathbf{P}} < 0 \quad (2.9)$$

则称系统(2.6)是参数依赖二次稳定的。

参数依赖二次稳定性条件(2.9)可以保证系统(2.6)的一个参数依赖二次型 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t)$ 满足式(2.8),因而,系统(2.6)是渐近稳定的。与二次稳定性相比,参数依赖二次稳定性具有较小的保守性。在定义 2.2.2 的基础上,给出下面的参数二次稳定性准则。

引理 2.2.1 对系统(2.6),如果存在连续可微对称正定矩阵 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}(t))$ 和矩阵 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\rho}(t))$ 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -G^T(\rho(t)) - G(\rho(t)) & G^T(\rho(t))A(\rho(t)) + P(\rho(t)) & G^T(\rho(t)) \\ * & -P(\rho(t)) + \dot{P} & 0 \\ * & * & -P(\rho(t)) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.10)$$

则系统(2.6)参数依赖二次稳定。

用矩阵 $\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 对不等式(2.10)作全等变换,即得式(2.9),故稳定性条件(2.10)可以保证系统(2.6)的参数依赖二次稳定性。注意到,条件(2.10)中引入了一个约束条件 $-P(\rho(t)) + \dot{P} < 0$,引理 2.2.1 是参数依赖稳定性的一个充分条件。通过引入附加矩阵 $G(\rho(t))$,稳定性条件中不再出现正定矩阵 $P(\rho(t))$ 和系统矩阵 $A(\rho(t))$ 的乘积项。

注意到,上述的稳定性条件(2.7)、(2.9)和(2.10)都要求对整个参数变化轨迹成立,这就意味着要用无限个 LMI 的可行性来判断系统的稳定性,给求解带来了很大的困难,可以用网格将整个参数变化区域进行划分,在网格点上求解 LMI 来近似整个参数变化轨迹上的求解。然而,网格划分的精细程度直接影响稳定性判断的结果,而网格的增加又会增加数值计算的负担。若将 LPV 系统描述成以下两种特定的模型结构,则可以通过求解有限个 LMI 来分析系统的稳定性。下面分别给出这两种 LPV 模型稳定性验证的有效方法。

(1) 仿射 LPV 模型。

若系统(2.6)可以描述成仿射 LPV 系统,即矩阵 $A(\rho(t))$ 具有以下形式:

$$A(\rho(t)) = A_0 + \rho_1(t)A_1 + \cdots + \rho_s(t)A_s \quad (2.11)$$

式中, $A_0, \dots, A_s$ 为已知的常数矩阵。假定时变参数 $\rho_i(t)$ 有界,且满足 $\rho_i(t) \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i], i=1, \dots, s$ 。

定义顶点集

$$F_\rho = \{\rho = [\rho_1, \dots, \rho_s]: \rho_i = \underline{\rho}_i \text{ or } \bar{\rho}_i, \|\dot{\rho}_i(t)\| \leq v_i, i=1, \dots, s\}$$

则可以看出,时变参数的整个变化轨迹是集合 F_ρ 的一个凸胞,即由 F_ρ 中点的凸组合的全体所构成的集合。

引理 2.2.2 具有系统矩阵(2.11)的系统(2.6)是二次稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 P ,使得对所有的参数 $\rho \in F_\rho$,矩阵不等式(2.7)成立。

引理 2.2.3 具有系统矩阵(2.11)的系统(2.6)是参数依赖二次稳定的充分必要条件是存在一个依赖于参数的连续可微对称正定矩阵 $P(\rho(t))$,使得对所有的参数 $\rho \in F_\rho$,矩阵不等式(2.9)成立。

假定依赖于参数的矩阵也具有仿射的形式,即

$$P(\rho(t)) = P_0 + \rho_1(t)P_1 + \cdots + \rho_s(t)P_s \quad (2.12)$$

式中,矩阵 $P_0, P_1, \dots, P_s$ 为对称矩阵,则引理 2.2.3 可以进一步描述为以下引理。

引理 2.2.4^[16] 具有系统矩阵(2.11)的系统(2.6)是参数依赖仿射二次稳定的充分必要条件是存在矩阵 $P_i, i=0, \dots, s$,使得对所有的参数 $\rho \in F_\rho$,矩阵不等式

$$P(\rho(t)) = P_0 + \rho_1(t)P_1 + \dots + \rho_s(t)P_s > 0 \quad (2.13)$$

$$A^T(\rho(t))P(\rho(t)) + P(\rho(t))A(\rho(t)) + P(\dot{\rho}(t)) - P_0 < 0$$

成立。

应用引理 2.2.2~引理 2.2.4,可以得到仿射 LPV 系统的二次稳定性和参数依赖二次稳定性,并且系统的稳定性是由有限个 LMI 的可行性来判断的。

(2) 多胞 LPV 模型。

对多胞 LPV 模型,即系统矩阵满足

$$A(\rho(t)) = \alpha_1(t)A_1 + \dots + \alpha_k(t)A_k \quad (2.14)$$

式中,对所有的 $t \in \mathbf{R}^+$,有 $\alpha_i(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) = 1$,而 $A_1, \dots, A_k$ 为已知的矩阵。对于多胞 LPV 系统的稳定性,有以下结论。

引理 2.2.5^[17] 具有系统矩阵(2.14)的系统(2.6)是二次稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 P ,使得对 $i=1, \dots, k$,矩阵不等式

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (2.15)$$

成立。

引理 2.2.6 具有系统矩阵(2.14)的系统(2.6)是参数依赖二次稳定的充分必要条件是存在一个依赖于参数的连续可微对称正定矩阵 $P(\rho(t))$,使得对整个的参数变化轨迹,矩阵不等式

$$A_i^T P(\rho(t)) + P(\rho(t))A_i + \dot{P}(\rho(t)) < 0 \quad (2.16)$$

成立。

多胞 LPV 系统的参数依赖二次稳定性条件对应的是无限个 LMI,假定依赖于参数的 Lyapunov 矩阵和时变参数向量的一阶导数也具有多胞的形式,即

$$P(\rho(t)) = \alpha_1(t)P_1 + \dots + \alpha_k(t)P_k \quad (2.17)$$

$$\dot{\rho}(t) = \beta_1(t)\mu_1 + \dots + \beta_k(t)\mu_k$$

式中, $P_1, \dots, P_k$ 为对称矩阵,对所有的 $t \in \mathbf{R}^+$,满足 $\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0$ 和 $\sum_{j=1}^k \beta_j(t) = 1, \beta_j(t) \geq 0, \mu_j$ 为一个已知的行向量,有

$$\dot{P}(\rho(t)) = P(\dot{\rho}(t)) = \sum_{j=1}^k \beta_j(t)P(\mu_j) \quad (2.18)$$

应用引理 2.2.1,令 $G \equiv G(\rho(t))$,有下面的参数依赖稳定性准则。

引理 2.2.7 对具有系统矩阵(2.14)的系统(2.6),如果存在正定矩阵 $P_i, i=$

$1, \dots, k$, 矩阵 G 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -G^T - G & G^T A_i + P_i & G^T \\ * & -P_i + P(\mu_i) & 0 \\ * & * & -P_i \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.19)$$

则系统参数依赖二次稳定。

从上述的稳定性准则可以看出, Lyapunov 矩阵结构形式和系统模型的不同选择可以得到不同的稳定性条件。仿射 LPV 模型和多胞 LPV 模型有着密切的关系, 并且仿射 LPV 模型可以转化成多胞 LPV 模型。本书的后续章节将着重介绍参数依赖 Lyapunov 方法。

2.3 参数 LMI

与鲁棒线性系统理论一样, 可以用 LMI 将 LPV 系统的许多问题转化成凸优化问题来求解, 其表达形式如下:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.20)$$

式中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 为未知变量; $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{m \times m} (i=0, 1, \dots, m)$ 为给定的对称矩阵。不等式 (2.20) 表示 $F(x)$ 是正定的, 即对于任意的非零向量 $u \in \mathbf{R}^n$, 有不等式 $u^T F(x) u > 0$ 成立, 或者说 $F(x)$ 的最小特征值是正数。

在许多系统与控制问题中, 问题的变量是以矩阵的形式出现的, 如 Lyapunov 稳定问题就是要存在矩阵 $P > 0$, 保证不等式 $F(P) = -(A^T P + P A) > 0$, 在这种情况下, 必须检查 $F(P)$ 是否能够转化为 LMI。所有满足 LMI (2.20) 的变量 x 的全体构成了一个凸集, LMI (2.20) 是关于变量 x 的一个凸约束, 因此, 可以转化为凸优化问题来求解, 内点法、椭球法等是求解 LMI 的有效方法。控制系统理论研究中经常遇到二次矩阵不等式, 通过下面的 Schur 引理可以将其转化为 LMI。

引理 2.3.1 (Schur 补引理)^[18] 假定矩阵 $F(P)$ 的分块表示为

$$F(P) = \begin{bmatrix} F_{11}(P) & F_{12}(P) \\ F_{21}(P) & F_{22}(P) \end{bmatrix}$$

则以下三个结论是等价的:

- (1) $F(P) > 0$ 。
- (2) $F_{11}(P) > 0, F_{22}(P) - F_{21}(P) F_{11}^{-1}(P) F_{12}(P) > 0$ 。
- (3) $F_{22}(P) > 0, F_{11}(P) - F_{12}(P) F_{22}^{-1}(P) F_{21}(P) > 0$ 。

目前, 已经出现许多求解 LMI 的优秀软件, 如最常用的 Matlab 的 LMI 工具箱等, 推动了 LMI 方法在控制领域中的应用。

鲁棒增益调度和具有参数不确定性的鲁棒控制的综合问题可以转化成参数

LMI, 参数 LMI 是与参数向量相关的 LMI, 其描述如下:

$$F(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{x}) = F_0(\boldsymbol{\rho}(t)) + \sum_{i=1}^m F_i(\boldsymbol{\rho}(t))x_i > 0, \quad \forall \boldsymbol{\rho}(t) \in \Theta \quad (2.21)$$

$$\Theta = \{\boldsymbol{\rho}(t) \in \mathbf{R}^s: \underline{\rho}_i \leq \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s\} \quad (2.22)$$

式中, $\boldsymbol{\rho}(t)$ 是时变参数, 对应它的每一个值, 不等式 (2.21) 代表一个 LMI, 因此, 不等式 (2.21) 代表了无限个 LMI, 这就意味着参数 LMI 难以数值求解。

对于 LPV 系统, 如何求解无限个 LMI? 对此, 国内外学者作了大量的研究, 解决问题的方法主要有两大类: 其一是采用一些特定的模型来描述 LPV 系统, 可以得到有限个 LMI, 其中, 有代表性的模型如参数仿射模型、多胞模型、多项式模型等; 其二是采用近似基函数和网格方法^[16], 即选择近似基函数 $\{f_j(\boldsymbol{\rho}(t))\}_{j=1}^{n_f}$ 使得

$$F_i(\boldsymbol{\rho}(t)) = \sum_{j=1}^{n_f} f_j(\boldsymbol{\rho}(t)) F_{ij} \quad (2.23)$$

并将参数变化空间划分为有限个网格, 从而将无限个 LMI 转化为可以用凸优化技术求解的有限个 LMI, 也就是说, 对应网格上的每一组参数, 有下面的参数 LMI:

$$F(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_f} f_j(\boldsymbol{\rho}(t)) F_{0j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_f} f_j(\boldsymbol{\rho}(t)) F_{ij} x_i > 0, \quad \forall \boldsymbol{\rho}(t) \in \Theta \quad (2.24)$$

近年来, 基于参数 LMI 方法, 许多学者已经成功地研究了 LPV 系统的分析与综合问题。本书将利用参数 LMI 方法、近似基函数和网格技术进行时滞 LPV 系统的稳定性分析、控制与滤波等问题的研究。

第3章 时滞 LPV 系统的稳定性

广泛存在于各种工程系统中的时滞现象常常是造成系统不稳定或性能变差的主要因素之一。因此,对时滞系统的研究具有重要的理论意义和广泛的应用前景。鉴于参数依赖 Lyapunov 稳定思想在系统的分析和综合中可以得到具有较低保守性的结果,近年来,这种思想也被应用于时滞 LPV 系统的稳定性分析中。

对实际工程中的动态系统来讲,稳定性是最基本的要求。在时滞 LPV 系统中,根据时滞是否随参数变化,可将时滞 LPV 系统划分为具有参数相关时滞和具有参数无关时滞的 LPV 系统两大类,而根据稳定性条件是否与时滞的大小有关,可以得到时滞相关稳定性条件和时滞无关稳定性条件。

本章基于文献[19]~[25],着重讨论状态时滞 LPV 系统的稳定性,针对连续系统和离散系统,基于不同形式的依赖于参数的 Lyapunov-Krasovskii 函数,给出相应的参数相关和时滞相关稳定性准则,进而通过引入附加矩阵,得到更易于系统分析与综合的稳定性条件,用参数 LMI 方法,将所得的充分条件转化为凸优化问题。为书写方便,在后续内容中将参数依赖二次稳定简称为参数二次稳定。

3.1 时滞 LPV 连续系统的稳定性

本节将分别考虑时滞 LPV 连续系统的时滞无关和时滞相关稳定性。

3.1.1 LPV 连续系统的时滞无关稳定性

首先考虑具有参数依赖时滞的 LPV 系统,如下:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t-h(\rho(t))) \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-h(\rho(0)), 0]\end{aligned}\quad (3.1)$$

式中, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量。假定系统状态矩阵 $A(\cdot)$ 、 $A_h(\cdot)$ 和滞后 $h(\cdot)$ 为时变参数 $\rho(\cdot) \in \mathbf{F}_p$ 的函数,其中, $\mathbf{F}_p$ 为容许参数的轨迹集合,定义如下:

$$\mathbf{F}_p := \{\rho \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^s) : \rho(t) \in \mathbf{F}, |\dot{\rho}_i(t)| \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s, \forall t \in \mathbf{R}^+\}$$

这里, $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{R}^s$ 的一个子集, $\{v_i\}_{i=1}^s$ 是非负的。而时变时滞 $h(t)$ 满足

$$0 < h(t) \leq \bar{h} < \infty, \quad \dot{h}(t) \leq \bar{h}_d < 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

假定参数 $\rho_i(t)$ 和其变化率实时可测,系统(3.1)的参数二次稳定的充分条件如下。

引理 3.1.1^[19] 对系统(3.1),如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P(\rho(t))$ 和对称正定矩阵 Q ,使得

$$\begin{bmatrix} A^T(\rho(t))P(\rho(t)) + P(\rho(t))A(\rho(t)) + \sum_{i=1}^s \left(\tau_i \frac{\partial P}{\partial \rho_i} \right) + Q & P(\rho(t))A_h(\rho(t)) \\ * & - \left[1 - \sum_{i=1}^s \left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \right) \right] Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3)$$

对所有参数变化轨迹成立,则系统(3.1)参数二次稳定。

引理 3.1.2^[20] 对系统(3.1),如果存在对称正定矩阵 P 和 $Q(\rho(t))$,使得

$$\begin{bmatrix} A^T(\rho(t))P + PA(\rho(t)) + Q(\rho(t)) & PA_h(\rho(t)) \\ * & - \left[1 - \sum_{i=1}^s \left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \right) \right] Q(\rho(t-h(\rho(t)))) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.4)$$

对所有参数变化轨迹成立,则系统(3.1)参数二次稳定。

引理 3.1.3^[20] 对系统(3.1),如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P(\rho(t))$ 和对称正定矩阵 $Q(\rho(t))$,使得

$$\begin{bmatrix} \Lambda & P(\rho(t))A_h(\rho(t)) \\ * & - \left[1 - \sum_{i=1}^s \left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \right) \right] Q(\rho(t-h(\rho(t)))) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

对所有参数变化轨迹成立,则系统(3.1)参数二次稳定。式中,

$$\Lambda = A^T(\rho(t))P(\rho(t)) + P(\rho(t))A(\rho(t)) + \sum_{i=1}^s \left(\tau_i \frac{\partial P}{\partial \rho_i} \right) + Q(\rho(t))$$

上述三个引理略有不同,这是因为所采用的 Lyapunov-Krasovskii 函数不同,三者分别为

$$V_1(x(t), \rho(t)) = x^T(t)P(\rho(t))x(t) + \int_{t-h(\rho(t))}^t x^T(s)Qx(s)ds$$

$$V_2(x(t), \rho(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h(\rho(t))}^t x^T(s)Q(\rho(s))x(s)ds$$

$$V_3(x(t), \rho(t)) = x^T(t)P(\rho(t))x(t) + \int_{t-h(\rho(t))}^t x^T(s)Q(\rho(s))x(s)ds$$

式中, $P(\rho(t)) > 0$, $Q(\rho(s)) > 0$, $P > 0$, $Q > 0$, 三者相比较,引理 3.1.3 在二次型和积分项中都引入了依赖于参数的正定矩阵,因而保守性较低。参数二次稳定性与传统的二次稳定性相比,保守性有明显的降低。

定理 3.1.1 对系统(3.1),如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P(\rho(t))$,对称正定矩阵 $Q(\rho(t))$,矩阵 $F(\rho(t))$ 、 $G(\rho(t))$,对所有参数变化轨迹不等式