经济数学基础

任平　主编
甘露如　周冰　朱明娣
施昭常　　　　洪友信　编

暨南大学出版社

《经济数学基础》

任　平　　　　　　　　　　　　主编
甘露如　周　冰　朱明娣
施昭常　　　　　洪友信　　　　编

暨南大学出版社

1993 广州

粤新登字 13 号

经济数学基础

任　平　主编
暨南大学出版社出版
（广州·石牌）
广东省新华书店经销
南图广告摄影公司激光排版
广东省德庆县印刷厂印刷
开本：787×1029　1/16　印张：22　字数：500 千字
1992 年 8 月第 1 版　1992 年 8 月第 1 次印刷
1993 年 8 月第 2 次印刷
印数　3001—6000 册

ISBN7—81029—167—X/O·8
定价：11.00 元

目录

第一章　函数和极限

§1.1　集合与映射

集合　在高中代数中，我们已接触到现代数学这一最重要的基本概念——集合。直观地理解集合的概念并不困难。例如，我们学校的全体师生员工组成一个集合，某工厂拥有的全部机床组成一个集合，方程 $x^2-4x+3=0$ 的根也是一个集合。一般地说，把一些确定的对象看成一个整体就形成一个集合，通常用大写拉丁字母表示。集合里的各个对象称为集合的元素，通常用小写字母表示。

为方便今后的讨论，把有关的概念和符号简述如下。

不含任何元素的集合，称为空集，记作$\varnothing$。

$a\in A$：表示 a 是集合 A 的元素。

$a\notin A$：表示 a 不是集合 A 的元素。

对于两个集合 A、B，如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，则称 B 为 A 的子集，记作

$$B\subseteq A \text{ 或 } A\supseteq B$$

也称 B 包含于 A，或 A 包含 B。

若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作

$$A=B$$

由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 同时 } x\in B\}$$

把集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起所组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

A 的补集 $\overline{A}$ 定义为不属于 A 的元素的全体构成的集合，即

$$\overline{A}=\{x|x\notin A\}$$

当然，在谈到补集，总是相对于一个全集而言。

实数集　最常见的集合是数的集合，简称数集，如自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集等等。从实用的目的出发，在今后的讨论中，如不做特殊说明，我们指的数集就是实数集 R。

实数集由有理数集和无理数集这两个子集组成。例如，$\frac{22}{7}$、3.1416 等是有理数，而园周

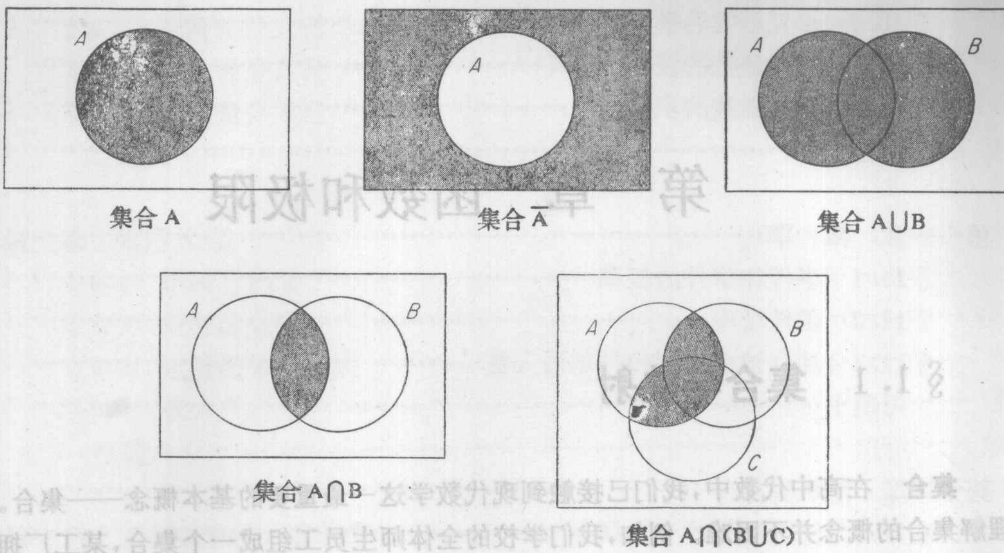


图 1.1.1 文氏图

率 π、$\sqrt{2}$ 等就是无理数。

用数轴来表示实数集是很直观的。实数可以用数轴上的点来表示，数轴上的每一个点也都表示一个实数，因此，我们将根据不同情况，交替使用数轴上的点和实数这两个概念而不做区别。

设 $a<b$ 为两个实数，把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数构成的集合记为 $[a,b]$，称为闭区间。同样，满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数记为 (a,b)，称为开区间；满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的全体实数记为 $(a,b]$，称为左开右闭区间；满足不等式 $x<b$ 的全体实数记为 $(-\infty,b)$。类似地，不难理解 $[a,b)$、$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,+\infty)$ 的意义。注意，这里，“$-\infty$”和“$+\infty$”是两个记号而不表示实数，不参加数的运算。

在高等数学的讨论中，经常要用到绝对值的概念。实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为：

若 a 为正数，$|a|$ 等于它本身；

若 a 为负数，$|a|$ 等于它的相反数，即 $-a$；

若 a 为零，$|a|$ 等于零。列式表示则为

$$|a|=\begin{cases} a, & 若 a\geqslant 0; \\ -a, & 若 a<0 \end{cases}$$

绝对值有如下重要性质：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(2) $|x-a|\leqslant r \iff a-r\leqslant x\leqslant a+r$，$r>0$ 为任意常数；

(3) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$

符号“$\Leftrightarrow$”表示自左端可推出右端，自右端也可推出左端，即箭头两端的命题是互相等价的。

一般地，对 P、Q 两个命题。若由 P 成立可推出 Q 成立，则称 P 是 Q 的充分条件，记为

$$P\Rightarrow Q$$

即 P 成立足以保证 Q 成立。这时，也称 Q 是 P 的必要条件，即 P 成立必然要有 Q 成立。若由 P 成立能推出 Q 成立，由 Q 成立能推出 P 成立，则称两者是等价的。这时，P（成立）是 Q（成立）的充分必要条件，Q（成立）自然也是 P（成立）的充分必要条件，或简称充要条件。

对给定的某一点 x_0，以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，$\delta>0$ 为常数，即与 x_0 的距离小于 δ 的点的集合称为 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$。利用绝对值的符号，$U(x_0,\delta)$ 可表示成

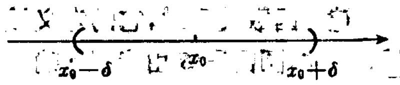


图 1.1.2

$$|x-x_0|<\delta$$

解开，则可写成

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

两者是等价的。

映射　A、B 为两个集合。如果按照某个对应法则 f，对于 A 中的任何一个元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，则把这样的对应（包括集合 A、B 及从 A 到 B 的对应法则 f）称为从集合 A 到集合 B 的映射，记作

$$f: A \to B$$

与 A 中元素 a 对应的 B 中的元素 b，称为 a 的象，a 称为 b 的原象，记作

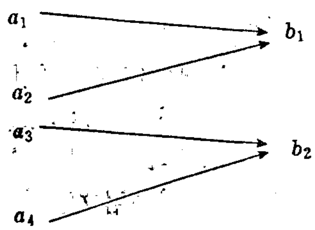
$$b=f(a)$$

例 1.1.1　A 表示某超级市场中的全部商品，每件商品都得标出价格，于是，商品定价工作就是建立从 A 到 $(0,+\infty)$ 的一个映射。

例 1.1.2　若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，则

$$f(a_1)=f(a_2)=b_1, f(a_3)=f(a_4)=b_2$$

给出了从 A 到 B 的一个映射。对应法则 f 也可用图形来直观地表示



若 f 是 A 到 B 的映射，如果对 B 里的任一元素，有且只有一个 A 里的元素 a 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的一一映射。显然，例 1.1.2 的映射不是一一的。例 1.1.1 的映射一般也不是一一的。因为，不同的商品可能有相同价格，相同的商品也往往不止一件，价格当然应是相同的。所以，商品定价不是一一映射。另一方面，数轴上的点与实数间的对应关系则是一一映射。

§1.2　函数

函数的概念　在中学代数已经学过函数的概念：如果在某变化过程中有两个变量 x、y，且对 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值和它对

应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y=f(x)$。x 称为自变量,y 称为因变量。x 的取值范围称为函数的定义域,和 x 的值对应的 y 的值称为函数值。函数值的全体称为函数的值域。由此可见,所谓函数,就是由它的定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射。函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函数值,通常就记为 $f(a)$,有时也可写成 $f(x)|_{x=a}$ 或 $y|_{x=a}$。

建立函数关系时,它的定义域往往可根据问题的实际意义来确定,称为函数的**实际定义域**。例如,园面积 S 由半径 r 确定,即 S 是 r 的函数:$S=f(r)=\pi r^2$。半径 r 只能取非负的实数,则函数 $f(r)$ 的实际定义域就是非负实数的集合 $[0,+\infty)$,不难看出,这个函数的值域也是 $[0,+\infty)$。另一方面,如果不考虑函数的实际背景,而只是从形式上的表达式考虑,则把使函数 $f(x)$ 有意义的 x 值全体,称为函数的**自然定义域**。例如,只从数式 $S=\pi r^2$ 考虑,r 取任一实数,πr^2 都有意义,则函数 $S=\pi r^2$ 的自然定义域为整个实数集。类似地,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的自然定义域就是所有的非零实数 $x\neq 0$。今后,除另加说明,我们约定所谓函数的定义域,指的就是自然定义域。

例 1.2.1 求函数 $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$ 的定义域。

解 要使 $\sqrt{\lg(x^2-3)}$ 有意义必须

$$\begin{aligned}\lg(x^2-3)&\geqslant 0\\ x^2-3&\geqslant 1\\ x^2&\geqslant 4\\ |x|&\geqslant 2\end{aligned}$$

所以函数 y 的定义域是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

例 1.2.2 求函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解 为使分子有意义,要求 $2-x>0$,即 $x<2$;为使分母有意义,要求 $x-1>0$,即 $x>1$,所以函数 y 的定义域为 $(1,2)$。

函数关系的表示方法 函数的概念由三个要素组成:对应法则、定义域与值域。其中,关键是对应法则。根据对应法则,可确定其自然定义域,值域也就随之确定,因此,函数关系的表示,归根结底是对应法则的确定。确定对应法则的方式并不唯一而可根据需要适当选择。常用的有公式法,如圆面积 $S=\pi r^2$;图示法,即用图象来给出函数关系,如温度曲线;列表法,如数的平方表、三角函数表等。有时,也可采用文字描述的方法。如把 x 的绝对值 $|x|$ 看成 x 的函数,则 § 1.1 中关于绝对值的定义就确定了这一函数。在实际工作中,常常是多种方法结合起来使用。微积分学研究的函数,主要是能以公式法表示的函数,包括要用多个式子才能表示的函数。把自变量在不同范围变化时,对应关系用两个或两个以上不同式子表示的函数,称为"分段函数"。要注意分段函数是几个公式结合起来表示一个函数,而不是表示几个函数。

例 1.2.3 把 x 的绝对值 $|x|$ 看成 x 的函数,它是一个分段函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}$$

若用图形表示,则见图 1.2.1.

注意,不能把上述函数看成两个函数

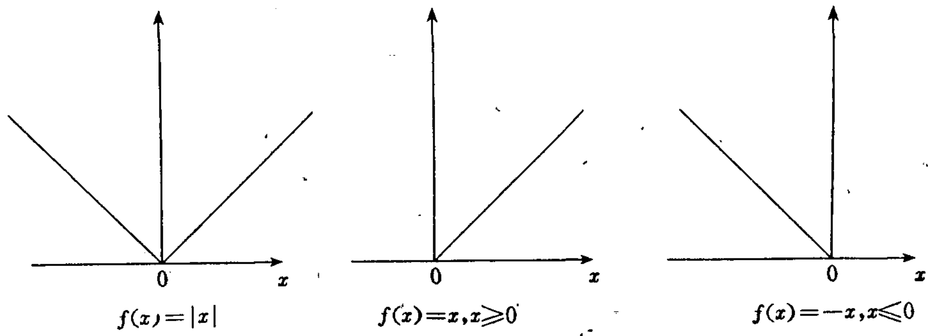


图 1.2.1

$$f_1(x) = \quad x, \quad x \geqslant 0;$$
$$f_2(x) = -x, \quad x < 0$$

也不能把 $f(x)$ 看成 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和。因为这三个函数的定义域各不相同：$f(x)$ 的定义域是实数集，$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的定义域则分别是非负半轴和负半轴。

另一方面，若令

$$g_1(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$ 的定义域都是实数集，且有

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

例 1.2.4 符号函数 实数的符号：正、负或零由实数唯一确定，也可看成它的函数。若以 1 表示"正"、-1 表示"负"，0 表示零，则可引入函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

这是一个分段函数，称为符号函数，记作 $y = sgn(x)$。它的图形由两条半直线和一个孤立点组成。图形上的"。"是形象化的记号，表示 $sgn(x)$ 当 $x=0$ 时不等于 1 或 -1，而等于 0。

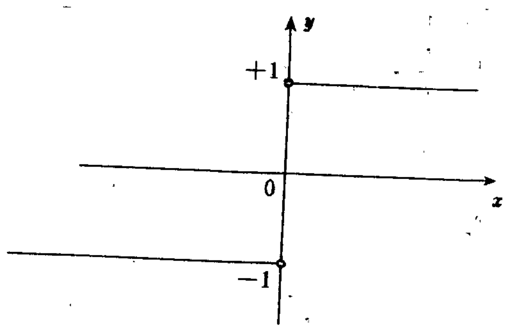


图 1.2.2

例 1.2.5 寄往外地的信件，重量在 20 克或 20 克以下者邮资为 20 分，每增加 20 克，邮资增加 20 分，增加部分不满 20 克者，按 20 克计算。于是，邮资是信件重量的函数，可以表示为

$$y=f(x)=\begin{cases}20, & 0<x\leqslant 20\\ 40, & 20<x\leqslant 40;\\ 60, & 40<x\leqslant 60;\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

函数的几何特性　从几何形状上看，函数的下列性质是基本的：

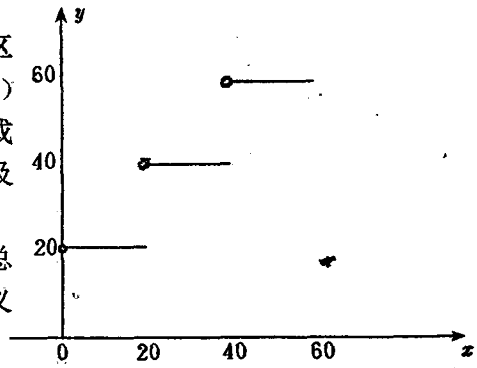


图 1.2.3

(1)单调性　对函数 $y=f(x)$ 的定义域里某个区间中任意两点 $x_1<x_2$，若总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在该区间是严格单调增加的（或严格单调减少的），简称递增的（或递减）。递增以及递减函数统称为单调函数。

若把条件放宽一些，即要求对任意的 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 是广义单调增加（或广义单调减少），简称不减（或不增）。

例如，$y=x^2$ 在负半轴上是递减的，在正半轴上是递增的。例 1.2.5 的邮资函数在整个定义域上广义增加函数，即不减的。

(2)有界性　若存在某个正常数 $L>0$ 而使对函数 $y=f(x)$ 的定义域里某个区间中的任意点 x，总有 $|f(x)|<L$，则称 $f(x)$ 在该区间是有界的。

例如，$y=x^2$ 在任一有限区间都是有界的，但在整个数轴上不是有界的，或称是无界的。

(3)奇偶性　对函数 $y=f(x)$ 的定义域里的某个区间 $(-a,a)$ 中的任意点 x，若总有 $f(x)=f(-x)$（或 $f(x)=-f(-x)$），则称 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 是偶函数（或奇函数）。

例如，$y=x^2$ 在整个定义域上是偶函数，而 $y=x^3$ 为奇函数。一般地说，若 n 为正偶数，$y=x^n$ 为偶函数；若 n 为正奇数，$y=x^n$ 为奇函数，函数的奇偶性也因此得名。

显然，函数的奇偶性只是对形如 $(-a,a)$ 的对称区间，包括整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 讨论的。

(4)周期性　若存在一个正常数 $T>0$，而对函数 $y=f(x)$ 定义域里任意点 x 总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期是 T 的周期函数。显然，若 T 为 $f(x)$ 的周期，则对所有正整数 n，nT 都是 $f(x)$ 的周期。一般所说周期函数的周期，指的是最小正周期。

最常见的周期函数是三角函数。

函数的上述几何特性，可以通过它们的图象来说明，见图 1.2.4。

由于图象表示可充分利用人的视觉，只要看一下函数的图象，就能很容易判断出这函数是否递增的、递减的或者两者都不是，以及这函数是否关于 y 轴对称或关于原点对称，或者都不是。因此，函数的图象表示确有其方便之处。但是，如果进行理论上的研究，图象表示就不如解析法。在微积分学讨论的函数，主要是用解析法，即用公式表示的函数。

复合函数　两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 可以通过中间变量 u 构造出一个新的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称它为 y 通过中间变量 u 复合成的复合函数。这种复合是有条件的，即要求 $f(u)$ 的定义域包含 $\varphi(x)$ 的值域。这样才能使对 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有意义，例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 两个函数复合而成。然而，只当 $1-x^2\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant 1$ 时才满

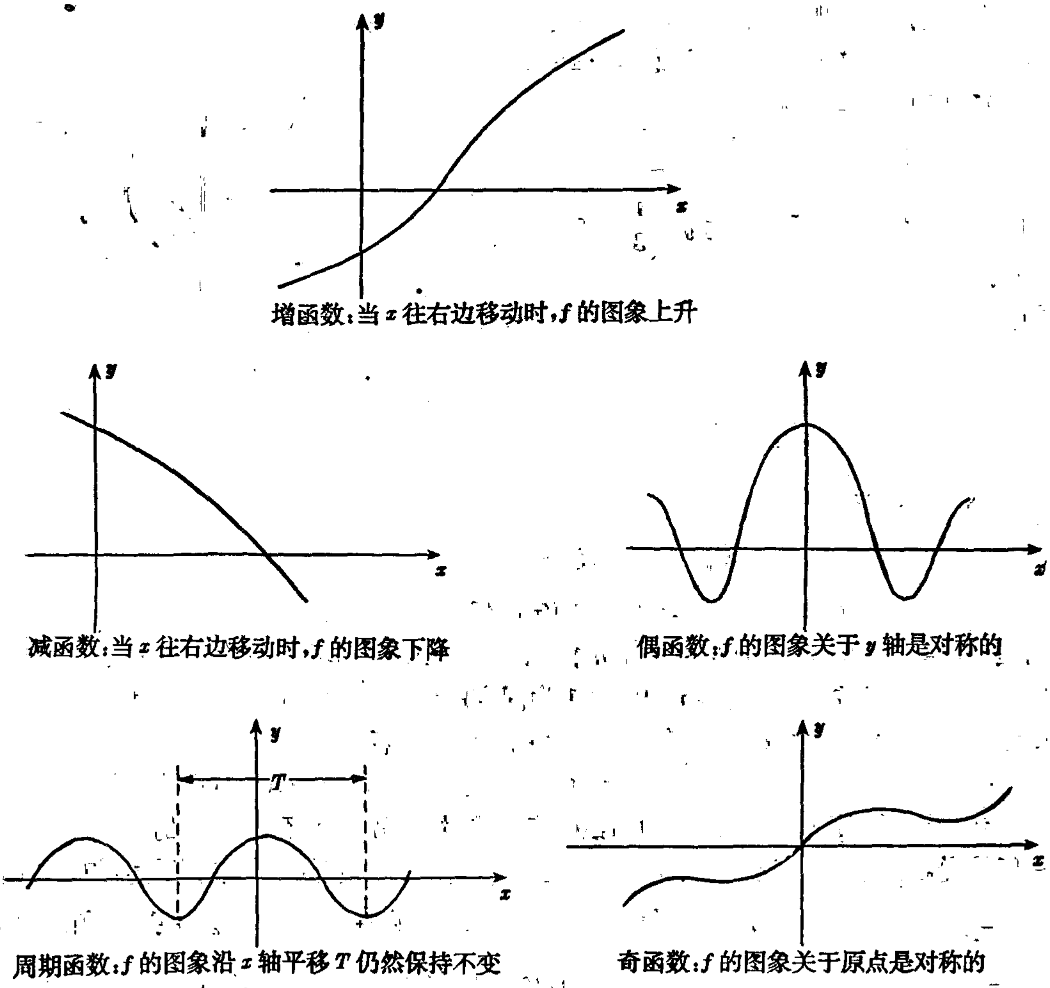


图 1.2.4　函数几何特性的图象描述

足复合的条件。

复合的概念可以推广到三个或多个函数的情况，即若 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则 $y=f(u)=f(\varphi(v))=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 是通过两个中间变量 u、v 复合成的复合函数。

复合函数的重要性在于，利用它往往可将一个较复杂的函数看成由若干个相对来说比较简单的函数复合而成，即化繁为简以便研究。这种技巧对以后的讨论是很有用的。例如，函数 $\sin 3x$ 是由 $y=\sin u$，$u=3x$ 复合而成的复合函数。类似地 $y=\sin^3 x$ 可看成由 $y=u^3$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数；$y=\ln(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=1+x^2$ 复合成的复合函数，等等。

反函数　已知函数 $y=f(x)$，若对值域中的每一元素 y，都有定义域中唯一的 x 而使 $y=f(x)$，即映射是一一的，则称它的逆映射 f^{-1} 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$。习惯上，把自变量写成 x，因变量写成 y，因此，一般地把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。根据定义，对函数 $f(x)$ 定义域里的任一 x，总有 $f^{-1}(f(x))=x$。显然，严格单调（增加或减少）函数的反函数一定存在。

如果函数关系是用解析式给出，则为求出它的反函数，只需把函数式 $y=f(x)$ 看成以 x

为未知数的方程，从中解出 $x=f^{-1}(y)$，再把符号 x、y 互换即可。

例 1.2.6　求 $y=3x-6$ 的反函数，$x\in R$。

解　由 $y=3x-6$，有

$$x=\frac{1}{3}y+2$$

则函数 $y=3x-6$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}x+2$。

由图可见，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 是对称的。

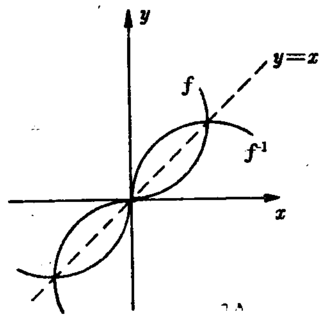


图 1.2.5　函数 f 及其反函数 f^{-1} 的图象

初等函数　在中学代数里讨论了所谓的基本初等函数，它们是

(1)常数函数　$y=c$，c 为任一常数，如 $y=0$，$y=-\sqrt{2}$，$y=\frac{\pi}{2}$ 等。

(2)幂函数　$y=x^{a}$，a 为任意实数，如 $y=x^{3}$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{4}}$ 等。

(3)指数函数　$y=a^{x}$，$a>0$，$a\neq1$ 为固定的任一常数。如 $y=2^{x}$，$y=0.1^{x}$，$y=e^{x}$，e 表示自然对数底，e≈2.71828。数 e 在经济分析中非常重要，在下一节要对它作仔细的讨论。

(4)对数函数　$y=\log_{a}x$，$a>0$，$a\neq1$ 为固定的任一常数，如 $\log_{10}x=\lg x$ 称为常用对数，$\log_{e}x=\ln x$ 称为自然对数。在高等数学应用的主要是后者。

(5)三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，常用的是前四个。

(6)反三角函数　所有的三角函数确定的映射不是定义域到值域上的一一映射，因此，一般地说，三角函数的反函数不存在。但是，若只限于考虑它的某个单调区间，如正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是严格单调增加的，则反函数存在，把它称为反正弦函数的主值，以 $\arcsin x$ 表示，它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。今后，当讨论到反三角函数时，指的都是它们的主值。因此，$y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$。值域是 $[0,\pi]$；$y=\mathrm{arctg}x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；$y=\mathrm{arcctg}x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 值域是 $(0,\pi)$。

现将基本初等函数列表说明如图 1.2.6。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所得出的并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数。在所有初等函数中，除基本初等函数外，最常用的还有多项式函数，特别是线性函数 $y=ax+b$、二次函数 $y=ax^{2}+bx+c$ 等。

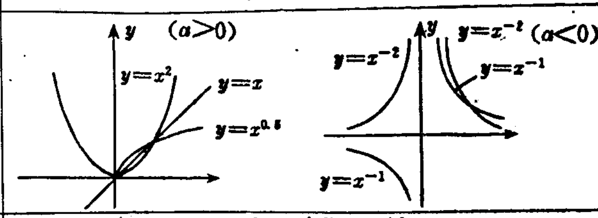
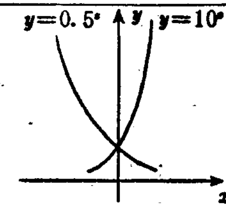
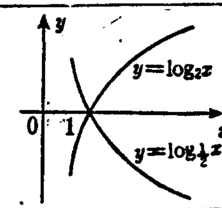
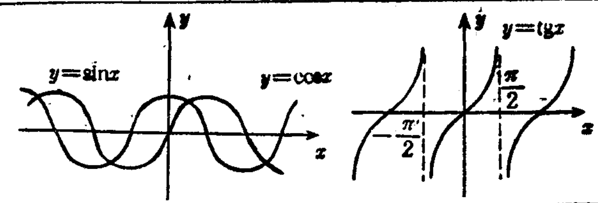
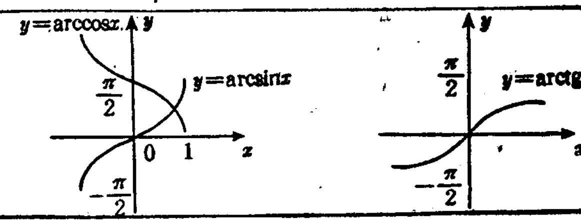
经济学中常用的函数举例　做为本节的结束，讨论一些以后将经常遇到的函数。

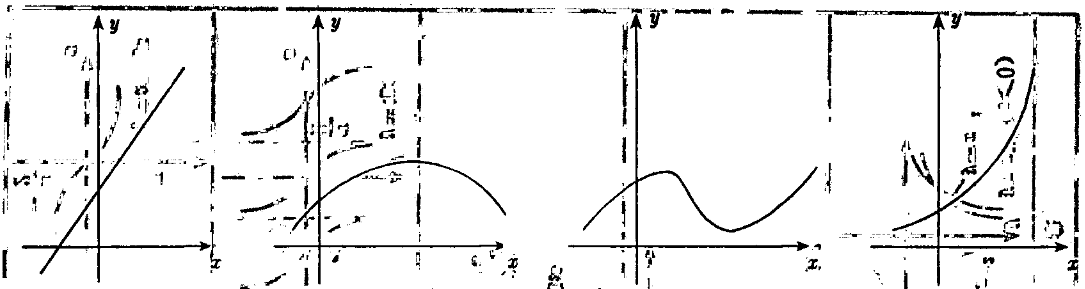
(1)总成本函数　以 x 表示产量，所需的全部生产费用是 x 的函数，以 $C(x)$ 表示，通常称为总成本函数。进一步，可把总成本分为两部分：随产量变动而变动的生产费用称为变动成本，如直接材料、直接人工费用等；当产量在一定范围内变化时不受产量变动影响的费用称为固定成本，如厂房、设备的折旧等。因此，总成本函数 $C(x)$ 可写成：

$$C(x)=C_{F}+C_{V}(x)$$

C_{F} 为固定成本，是与 x 无关的常数，$C_{V}(x)$ 是变动成本，它一般与 x 有关。

图 1. 2. 6

名　称	表达式	定　义　域	图　　象
幂函数	$y=x$，$\alpha\in R$	定义域随 α 而异	
指数函数	$y=a^x$，$a>0$，$a\neq 1$	R	
对数函数	$y=\log_a X$，$a>0$，$a\neq 1$	$(0,\ +\infty)$	
三角函数	$y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\mathrm{tg}x$ $y=\mathrm{ctg}x$	R R $x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$，$n=0$，$\pm1$，$\pm2$，… $x\neq n\pi$，$n=0$，±1，±2，…	
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\mathrm{arctg}x$ $y=\mathrm{arcctg}x$	$[-1,\ 1]$ $[-1,\ 1]$ R R	



(a)线性函数 $y=a_0+a_1x$

(b)二次函数 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$

(c)三次函数 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

(d)指数函数 $y=Ae^{kx}$，e 为自然对数底

图 1.2.7

(2)总收入函数　设单位产品售价为 p，一般说来，价格与产量有关，所以，可用 $p(x)$ 表示，于是，产量为 x 时的销售收入 $R(x)=xp(x)$，称为总收入函数。若厂商的产量在市场该产品总销售量中所占份额很小，则产量 x 的变动影响不了价格的变化，即可把价格 p 看成常数而与产量 x 无关，这时，厂商的收入函数为 $R(x)=xp$。

(3)总利润函数　对产量 x，若成本函数为 $C(x)$，收入函数为 $R(x)$，则总利润函数为

$$\pi(x)=R(x)-C(x)$$

厂商的经济效益通常就表现在利润上，因此，利润函数是厂商理论非常重要的概念。特别是，可以通过对产量、成本、利润三者内在联系的分析确定生产决策，这称为**量本利分析**。

例 1.2.7　设工厂生产某种产品，最高年产量为 10000 吨，固定成本为 200 万元，为简单起见，设单位变动成本为 0.3 万元/吨，即每生产 1 吨产品所需的变动成本为 0.3 万元，则当产量为 x 吨时，总成本函数为

$$C(x)=200+0.3x \quad (\text{万元})$$

这是一个线性函数，它的自然定义域是整个实数集。但就本例而言，x 是产量，不能为负，最高产量为 10000(吨)，因此，实际定义域为闭区间[0,10000]。

进一步，若已知每吨销售价为 0.35 万元，则产量为 x 吨时的销售收入为

$$R(x)=0.35x$$

总利润函数为

$$\begin{aligned}\pi(x)&=R(x)-C(x)\\&=0.35x-(200+0.3x)\\&=0.05x-200\end{aligned}$$

它们都是线性函数，实际定义域都是[0,10000]。

为做到盈亏平衡，即 $\pi(x)=0$，只须令

$$0.05x-200=0$$

$$x=\frac{200}{0.05}$$

$$=4000(\text{吨})$$

这就是说，年产量达到 4000 吨，就可不盈不亏。少于 4000 吨，工厂要亏损；多于 4000 吨，工厂有盈余。在量本利分析中，把实现盈亏平衡的产量称为保本点或保本产量。

这里，由于对成本函数和收入函数做了两点重要的简化假设，即单位变动成本为常数，

以 C_V 表示，从而总成本函数为

$$C(x) = C_F + C_V x$$

产品单价也是常数，从而总收入函数为

$$R(x) = px$$

则总利润函数为

$$\begin{aligned}\pi(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (p - C_V)x - C_F\end{aligned}$$

保本产量为 $\dfrac{C_F}{p-C_V}$。

于是，我们就在一系列线性假设的条件下，即总成本、总收入都是产量的线性函数的假设下，非常简洁地揭露了产量、成本、利润三者的内在联系，这正是量本利分析法的实质。

(4)需求函数　在实际场合里，能够直接用公式把函数明确地表示出来的情况是比较少的。特别是对经济科学、管理科学等领域，更是如此。在这些领域里，变量之间的关系，往往十分复杂。例如，考虑某个地区消费者对某种商品的需求量，它是由许多因素决定的，如个人收入、商品价格、其他商品价格、季节以及习惯、爱好等等。做为一个简化模型，如果除商品价格外，其他暂不涉及，即假定它们保持不变，则可把需求量只看成该商品价格 p 的函数 $Q_D = f(p)$，称为需求函数。

应该指出，需求函数以及今后我们将要讨论的许多诸如此类函数，都是"理想化"的概念。严格地说，给定一个具体的价格，相应的需求量并不是唯一确定的(函数的严格定义正是要求这一点)。因此，需求函数确定的价格与需求量之间的对应关系只是在平均意义下给出的。但是，从应用的角度看，我们不必过于注意这些繁琐的细节而影响进一步的讨论。今后，当我们谈到需求函数

$$Q_D = f(p)$$

时，总是指对于商品的每一价格，都有与之对应的唯一的商品需求量。

从理论上推导需求函数的数学表达式是很困难的，但是，根据经济学的常识，可以对它的性质做一些大致的描述：如一般地说，需求量随价格的增加而减少，因此，它应是减函数；价格和需求量都不能取负值，因此函数的图象在第一象限内，等等。

市场是由供求双方组成的，与需求函数有密切关系的是所谓的

(5)供给函数　商品是由厂商生产的。在市场经济条件下，厂商愿不愿意生产、生产多少这种商品，固然与许多因素有关，但最重要的是该商品的价格。为了简单起见，把商品的市场供给量只看成该商品价格的函数，称为商品的供给函数，表为

$$Q_S = g(p)$$

同样，我们难以从理论上推出供给函数的数学表达式。但是，它一般应是单调增加的，图象也在第一象限内。

需求函数与供给函数分别表示消费者与生产者的行为。只当供求相等，市场才处于均衡。于是，两个行为方程再加上均衡条件就构成所谓的局部均衡市场模型

$$\begin{cases} Q_D = Q_S \\ Q_D = f(p) \\ Q_S = g(p) \end{cases} \tag{1.2.1}$$