高等学校教材

微积分学

（下册）

吴正昌　蔡燧林　编著

高等教育出版社

高等学校教材

微积分学

（下册）

吴正昌　蔡燧林　编著

高等教育出版社

内容提要

本书根据最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》而编写，适合高等学校工科类专业、经管类专业本科学生使用。在编写过程中，作者在抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力和运用所学知识分析解决问题能力等方面给予了重点训练。在材料处理上，作者从感性认识入手，上升到数学理论，突出重点，删去枝节，降低难度，删去纯理论证明，加强基本训练，对强化学生的数学思维很有帮助。

本书下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程等。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学. 下册 / 吴正昌. 蔡燧林编著. —北京：高等教育出版社，2008.2
ISBN 978-7-04-023111-3

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①吴…②蔡… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 004741 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 吴文信
版式设计 张 岚 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京嘉实印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 2 月第 1 版
印　　张	17.75	印　　次	2008 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	定　　价	22.40 元

物料号　23111-00

目 录

9

第九章 向量代数与空间解析几何

与平面解析几何一样，空间解析几何也是以代数方法为工具的几何学. 一方面，它为微积分学的某些概念提供了直观的几何背景；另一方面，在后面章节中将用微积分学的知识来解决几何学中的一些问题.

本章分两部分. 第一部分介绍向量和向量的代数运算，也就是向量代数. 第二部分引入空间直角坐标系，讨论在空间直角坐标下曲线和曲面的表示，着重介绍常见的平面、直线和二次曲面的方程和图形.

§9.1 向量和向量运算

一、向量

在数学、物理学和工程技术中，经常会遇到既有大小又有方向的量. 例如力，速度都是这样的量. 数学中把既有大小又有方向的量称为**向量**. 并且用有向线段来表示向量. 如图 9-1，带箭头的线段$\overrightarrow{AB}$表示向量，它的大小是线段 AB 的长度，用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示，方向从 A 到 B，A 是始点，B 是终点. 正因为向量的这个几何表示，有时也称向量为**矢量**. 有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 也称为向量$\overrightarrow{AB}$的**模**. 本书中用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等表示向量，$|\boldsymbol{a}|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

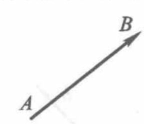


图 9-1

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且模相等，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 只要通过平行移动就能使它们重合，便有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此，在讨论向量时，只考虑它的大小和方向，而不考虑它的始点在什么地方，这样的向量称为**自由向量**. 显然当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，也有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

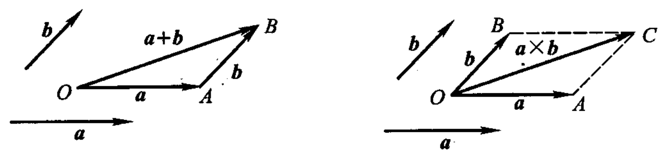
当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相反但模相等时，则用 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 表示. 显然$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**平行向量**，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

模为零的向量称为**零向量**，就用 $\boldsymbol{0}$ 表示. 规定零向量没有明确方向. 换句话说，可以认为零向量具有任意方向，这就是说零向量平行于任何向量.

二、向量的加法运算

在力学中学过用平行四边形法则求两个力的合力，下面对一般的向量也引入向量的加法运算.

已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$. 以某点 O 为始点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，称向量$\overrightarrow{OB}$是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算称为向量的**加法运算**. 这种求向量和的作图方法称为**三角形法则**，如图 9－2(1)所示.



(1) (2)

图 9－2

也可以用**平行四边形法则**求两向量的和. 已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，以任意点 O 为始点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，然后以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$，那么$\overrightarrow{OC}$就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图 9－2(2)所示.

容易证明，向量加法满足交换律和结合律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量加法满足交换律和结合律，三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和就可写为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 用三角形法则容易作出向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和，如图9－3所示.

读者容易画出用三角形法则求任意有限多个向量之和的几何作图法.

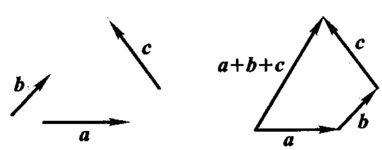


图 9－3

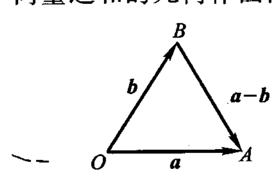


图 9－4

三、向量的减法运算

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 表示两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，这里规定

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

在图 9－4 中，若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么可以清楚地看到$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

四、向量的数乘运算

设 $\boldsymbol{a}$ 是向量,λ 是实数. 定义 λ 乘 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量,用 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模和方向规定如下:$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$;若 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量,$\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,$\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;而当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由向量 $\boldsymbol{a}$ 和实数 λ 得到向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的运算称为向量的**数乘运算**.

特别当 $\lambda=\pm1$ 时,$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

不难证明,向量的数乘运算满足结合律和分配律,对向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,实数 λ,μ,我们有

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

五、几个常用的概念

模为 1 的向量称为**单位向量**. 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,记 $\boldsymbol{a}^\circ$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ,\qquad 或者\qquad \boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

把平行于同一平面的向量称为**共面向量**,对照地,把平行向量也称为**共线向量**.

还要定义两个向量之间的夹角. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,取任意一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,不超过 π 的角 AOB 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 显然 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$. 因此两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的取值范围是 $[0,\pi]$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$ 时,称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交(垂直)**,记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 1 用向量方法证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证明 如图 9-5,$\triangle ABC$ 中,D 是 AC 的中点,E 是 BC 的中点,所以

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

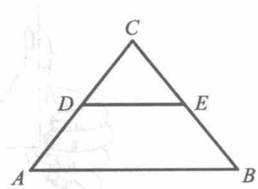


图 9-5

因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA},$$

而

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

因此$\overrightarrow{DE} /\!/ \overrightarrow{AB}$且$|\overrightarrow{DE}| = |\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}| = |\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. 这就证明了 DE 平行于 AB 且等于 AB 的一半.

例 2　若平面上四边形的对角线互相平分,证明它必是平行四边形.

证明　图 9－6 中,设平面上的四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 和 BD 相交于 O 点,当它们互相平分时有

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}.$$

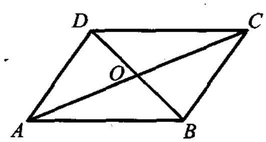


图 9－6

因此

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}.$$

这就是说$\overrightarrow{AD} /\!/ \overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$,有一组对边平行且相等的四边形 $ABCD$ 必是平行四边形.

§9.2　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

上一节从几何观点讨论了向量,暂且把所有向量构成的集合记为 E. 在 E 上已经定义了向量的加法运算及向量的数乘运算. 研究了这些运算的性质后,正如线性代数中所讲的,可以验证 E 成为了一个线性空间. 建立了空间直角坐标系后,可以更清楚地看到这一点.

如图 9－7,在空间取一点 O,过 O 点作三条互相垂直的数轴,称为坐标轴:

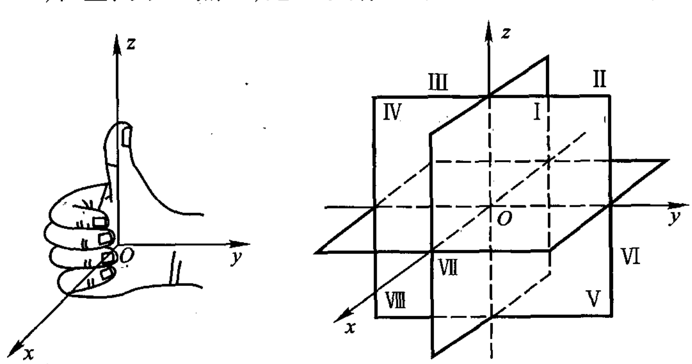


图 9－7

横轴(x 轴),纵轴(y 轴)和竖轴(z 轴),它们都以 O 为原点,且规定 x 轴,y 轴,z 轴的正向构成右手系. 所谓右手系,坐标轴的正向是这样规定的:伸展右手,右手大拇指指向 z 轴的正向,其余四指握拳旋转时,x 轴的正向转过$\frac{\pi}{2}$便与 y 轴正向重合. 这样,我们得到一空间直角坐标系,记为 $Oxyz$,O 称为坐标原点. x 轴与 y 轴确定了一平面,称为坐标平面 xOy,简称为 xy 平面,类似地有坐标平面 yOz(yz 平面)和坐标平面 zOx(zx 平面). 三坐标平面两两互相垂直,把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限,依次标为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限,其中Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限依次位于 xy 平面一,二,三,四象限的上方,而Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限依次位于 xy 平面一,二,三,四象限的下方.

设有空间一向量 $\boldsymbol{a}$,将 $\boldsymbol{a}$ 的始点置于坐标原点 O 时,$\boldsymbol{a}$ 的终点为 M,则有$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$. 如图 9-8,过 M 点作 xy 平面的垂线 MN,N 是它与 xy 平面的交点,显然

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}.$$

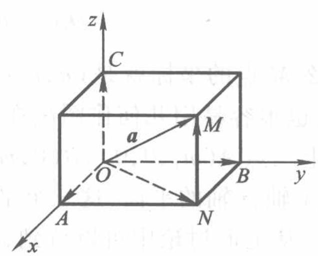


图 9-8

在 z 轴上存在一点 C,使

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{NM}.$$

因为$\overrightarrow{ON}$在 xy 平面上,所以 x 轴上存在点 A,y 轴上存在点 B,使

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

于是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

设方向与 x 轴,y 轴,z 轴正向相同的单位向量分别是 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,那么有实数 a_1,a_2,a_3,使得

$$\overrightarrow{OA}=a_1\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=a_2\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=a_3\boldsymbol{k},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

可以看到实数 a_1,a_2,a_3 由$\overrightarrow{OM}$唯一确定,从而也由向量 $\boldsymbol{a}$ 唯一确定,这样 $\boldsymbol{a}$ 就有唯一的表达式

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}. \tag{9.1}$$

上式就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的分解式,其中 a_1,a_2,a_3 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐

标. 有时也直接表示为

$$a = \{a_1, a_2, a_3\},$$

上式称为向量的坐标表示式(也可用 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 表示).

表达式(9.1)中的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为 E 的标准正交基,这表明 E 是一个三维线性空间,常记为 $\mathbf{R}^3$.

设 M 是空间一点,相应地得到向量 $\overrightarrow{OM}$,称为点 M 的向径. 若 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式为 $\{m_1,m_2,m_3\}$,也称有序数组 (m_1,m_2,m_3) 为点 M 的坐标,直接记为 $M(m_1,m_2,m_3)$,并分别把 m_1,m_2,m_3 称为点 M 的**横坐标**,**纵坐标和竖坐标**.

从图 9-8 也可看到,为求空间一点 M 的坐标,只要过 M 点作三个平面,分别垂直于 x 轴,y 轴,z 轴,依次得到三个交点 A,B,C. 若

$$\overrightarrow{OA} = a\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OB} = b\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OC} = c\boldsymbol{k},$$

那么 M 点的坐标就是 (a,b,c). 反过来,如果知道点 M 的坐标是 (m_1,m_2,m_3) 时,也很容易用几何作图法在坐标系中找到点 M. 事实上,只要找到 x 轴,y 轴,z 轴上三点 $A(m_1,0,0)$,$B(0,m_2,0)$,$C(0,0,m_3)$,过 A,B,C 三点分别作垂直于 x 轴,y 轴,z 轴的平面,这三个平面的交点就是坐标为 (m_1,m_2,m_3) 的点 M.

从上面讨论中可以看到,坐标平面和坐标轴上点的坐标各有特定的形式. 例如 z 轴上点的坐标必是 $(0,0,c)$ 形式,xy 平面上的点必是 $(a,b,0)$ 形式. 也容易知道,若点 $M(x,y,z)$ 是空间一点,则点 $N(x,y,-z)$ 是点 M 关于 xy 平面的对称点,$P(-x,-y,-z)$ 是点 M 关于坐标原点的对称点.

二、向量的代数运算

用向量的分解式,可以方便地进行向量的加法运算和数乘运算,这使 §9.1 中向量的几何运算转化为向量的代数运算. 设

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},$$

由向量运算的交换律、结合律与分配律,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \pm (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_1 \pm b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 \pm b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 \pm b_3)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a} &= \lambda(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\ &= (\lambda a_1)\boldsymbol{i} + (\lambda a_2)\boldsymbol{j} + (\lambda a_3)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

这些式子也可用向量的坐标表示,当

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad b = \{b_1, b_2, b_3\}$$

时,则有

$$a \pm b = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\},$$

$$\lambda a = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}.$$

三、向量的模　向量的方向余弦

设 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$,由图 9－8 可知

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

所以 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\boldsymbol{i} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\boldsymbol{j} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\boldsymbol{k}. \qquad (9.2)$$

为了表示向量的方向,如图9－9,把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴,y 轴,z 轴的正向的夹角分别记为 α,β,γ,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 用方向角就可以确定向量的方向,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**,由图 9－9 容易得到,

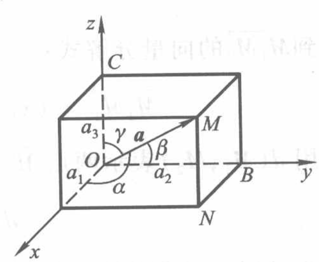


图 9－9

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

比较(9.2)式,可以看到,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量可以用 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦表示:

$$\boldsymbol{a}^\circ = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}.$$

注意到,向量的方向余弦有重要关系式:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

所以向量的方向角 α,β,γ 不是相互独立的.

四、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间的两点,如图 9-10(1),有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

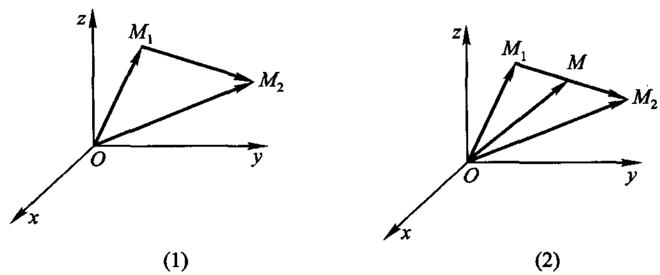


图 9-10

若用向量分解式

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

得到$\overrightarrow{M_1M_2}$的向量分解式:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

常用 $d(M_1,M_2)$表示两点 M_1,M_2 间的距离,那么

$$d(M_1,M_2)=|\overrightarrow{M_1M_2}|.$$

因此得到空间两点的距离公式:

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1 已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,求线段 M_1M_2 中点 M 的坐标.

解 如图 9-10(2),

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

因为 M 是 M_1M_2 的中点,所以

$$\overrightarrow{M_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2},\frac{z_2-z_1}{2}\right\}.$$

而

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$$

$$=\{x_1,y_1,z_1\}+\left\{\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2},\frac{z_2-z_1}{2}\right\}$$

$$=\left\{\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right\},$$

所以 M_1M_2 中点 M 的坐标是$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

例 2 如图 9－11,有一棱长为 2 的正方体. 求$\overrightarrow{OE}$方向的单位向量,$\overrightarrow{OD}$的方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{OE}=\{2,2,2\}$,所以$\overrightarrow{OE}$方向的单位向量是

$$\frac{\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OE}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}\{2,2,2\}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

D 点的坐标是(2,0,2),所以

$$\overrightarrow{OD}=\{2,0,2\}.$$

$\overrightarrow{OD}$的方向余弦是:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\beta=0,$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

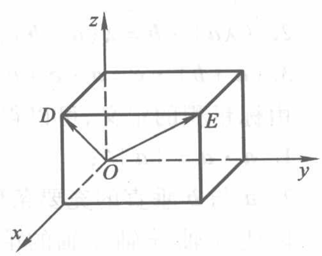


图 9－11

所以,$\overrightarrow{OD}$的方向角 $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=\frac{\pi}{4}$.

§ 9.3 标量积 向量积 混合积

一、两向量的标量积

先看一个力作功的例子. 设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于质点 M,质点 M 沿直线从 A 运动到 B,运动过程中,力 $\boldsymbol{F}$ 的大小、方向不变,$\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 θ(如图 9－12),由物理

学知识得到，力 $\boldsymbol{F}$ 作的功是：

$$W=(|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\overrightarrow{AB}|$$
$$=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

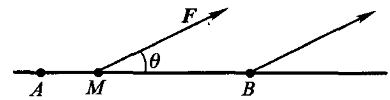


图 9－12

可见力的作功，既与 $\boldsymbol{F},\overrightarrow{AB}$ 的模有关，也与它们之间的夹角 θ 有关.

下面对一般的向量导出类似的运算.

定义 9.1 已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，其夹角为 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$，实数

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**标量积**，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>. \tag{9.3}$$

标量积又称为**点积**或**内积**. □

由标量积的定义，上述力 $\boldsymbol{F}$ 作的功可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

容易证明，标量积满足下列运算法则：

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；
2. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 是实数；
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

由标量积的定义，可以得到下面两个特殊情况的标量积：

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；
2. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

因此，x 轴，y 轴，z 轴的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 满足

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

当 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ 时，用上述结果，可以得到计算标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的公式.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i})+(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_2\boldsymbol{j})+\\&\quad(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1b_1)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+(a_2b_1)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+(a_3b_1)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+(a_1b_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad(a_2b_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+(a_3b_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+(a_1b_3)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad(a_2b_3)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+(a_3b_3)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

这就得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{9.4}$$

由标量积定义中的(9.3)式，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量时，得到

$$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

若 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，将(9.4)式代入上式可得到两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角余弦的计算公式：

$$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{9.5}$$

由(9.4)式可见，两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 垂直的充要条件现在可表示为

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{9.6}$$

设 $\boldsymbol{e}$ 是一非零向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 θ，则如图 9－13，向量 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的投影 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 可用标量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^\circ=|\boldsymbol{a}|\cos\theta,$$

其中 $\boldsymbol{e}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{e}$ 同方向的单位向量.

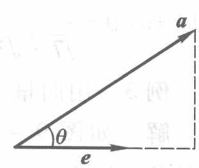


图 9－13

因此，当 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 时，显然有

$$a_1=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i},\quad a_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j},\quad a_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}.$$

这给出了向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标的另一种表达.

例 1　设力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 作用在质点 M 上，质点 M 由 $A(1,1,1)$ 沿直线运动到 $B(2,3,5)$，求此力作的功.

解　$\overrightarrow{AB}=(2-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(5-1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$

力 $\boldsymbol{F}$ 作的功

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot1+(-2)\cdot2+3\cdot4=9.$$

例 2　设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

解　记 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则有

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|},$$

而

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3,$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=7,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=3,$$

所以 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，因此向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 间的夹角是 $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

例 3 用向量方法证明三角形中的余弦定理.

解 如图 9－14，$\triangle ABC$ 中 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\angle ACB=\theta$，则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

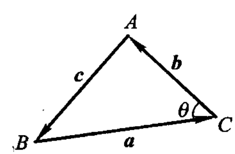


图 9－14

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

这就是余弦定理.

二、两向量的向量积

现在研究两向量间的另一种运算——向量积.

定义 9.2 两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模和方向规定如下：

（1）$\boldsymbol{c}$ 的模是 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面（设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是不共线的非零向量），$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，也即如前面指出过的那样，伸展右手，四指按从 $\boldsymbol{a}$ 的方向转过角度 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向重合的旋转方向握拳，大拇指的指向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向. □