现代数学基础丛书 118

拓扑动力系统概论

叶向东 黄文 邵松 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书不仅系统介绍了拓扑动力系统的基本概念和结果，而且包含了近年来本领域的最新进展. 全书共有拓扑动力系统基础、遍历论基础、等度连续性与 Ellis 半群理论、族与弱不交、熵、熵与局部化、序列熵与局部化、传递系统的分类、不交性以及混沌等 10 章内容. 本书强调拓扑动力系统与遍历理论的关联、回复时间集与局部化思想的体现、代数方法在拓扑动力系统中的作用以及拓扑动力系统在诸如组合数论等其他数学分支上的应用等. 内容由浅入深，难易兼顾，充分反映最新成果，并配有大量例子与习题.

本书可作为高等院校数学系高年级本科生和研究生教材或教学参考书，也可供一般数学工作者、物理工作者和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑动力系统概论/叶向东，黄文，邵松著. —北京：科学出版社，2008
(现代数学基础丛书；118)
ISBN 978-7-03-020569-8
I. 拓… II. ①叶… ②黄… ③邵… III. 拓扑-动力系统 IV. O189
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 009723 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 3 月第一次印刷 印张：21
印数：1—3 000 字数：391 000

定价：56.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003年8月

引　言

动力系统的研究可以追溯到牛顿 —— 创立微积分、建立三大运动定律以及万有引力定律的非凡科学家. 在牛顿的体系中, 以时间为参变量的微分方程占据了主导地位. 牛顿的经典著作《自然哲学的数学原理》在接下来的两个世纪中成为人们研究天体问题的典范, 人们甚至乐观地认为可以像牛顿顺利解决二体问题那样, 通过求出微分方程的显式解来处理任何天体问题. 遗憾的是, 这种愿望从未实现.

到了 19 世纪末, 情况发生了一个质的转折. 著名的法国数学家 Poincaré 出版了《天体力学的新方法》. 一个重要的转变在于他将相空间的几何 —— 系统参数向量所有可能值的空间引入分析过程, 将人们的注意力从方程的单个解转移到所有可能的解曲线及其相互关系上来. 这种方法对单个解不能提供太多信息, 却能得到一些甚至大部分解曲线的信息. 运用颇具遍历论味道的方法, Poincaré 说明了对所有有界 Hamilton 系统, "大部分" 解曲线在 Poisson 意义下是稳定的.

随着 Poincaré 定性分析方法的引入, 动力系统研究的焦点从以微分方程定义系统的模式转到相空间与作用群上. Birkhoff 的工作无疑使这种转变更加明朗化. 在其著作《动力系统》(1927) 中, 他以一般度量空间上的群作用作为动力系统研究众多动力学性质. 特别地, 他在这个一般范畴下重建了前面提到的 Poincaré 的结论.

最终两个重要的分支从研究中衍生出来: 拓扑动力系统和遍历理论. 本书主要研究拓扑动力系统, 其底空间一般假设为紧致度量空间, 以半群 $\mathbb{Z}_+$ 作用于其上. 而在遍历理论中, 一般取 Lebesgue 空间为底空间. 拓扑动力系统的研究与诸如遍历理论、拓扑群、一般拓扑、组合、数论、代数、泛函分析等其他数学分支密切联系在一起.

与拓扑动力系统联系最为紧密的莫过于遍历理论, 这两套理论有着惊人的平行性. 一方面, 拓扑动力系统可以自然地视为一个保测系统 (因为对于许多作用群, 系统存在不变测度); 另一方面, 任何遍历系统有其拓扑表示. 在这两套理论中有着许多相对应的概念, 例如, 遍历-极小性、离散谱-等度连续、测度熵-拓扑熵等. 这些因素导致了这两套理论中的许多结论有着极为相似的陈述, 但是各自的证明方法却可能完全不一样, 而且大多没有互通之处. 在本书中, 我们将十分注重两套理论的相似性, 也强调它们在组合数论中的应用.

运用回复时间集以及局部化的思想来研究拓扑动力系统, 是近年来研究工作中的两个特点. 运用回复时间集来研究动力系统起源于 Gottschalk, Furstenberg 等人的工作. 例如, Gottschalk 证明了紧致度量空间中的一个点为几乎周期的当且仅当

这个点回复到自己任何邻域的时间集为 syndetic 的; Furstenberg 证明了一个拓扑动力系统为弱混合的当且仅当任何非空开集到另一个非空开集的碰撞时间集为 thick 的等. Akin 在他们的基础上发展了上述思想, 形成了族 (满足一定条件的 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族) 的初步理论. 近年来, 族的理论被 Glasner, Weiss 及本书作者等进一步拓展.

局部性质的研究在拓扑动力系统一般性理论中很早就有体现, 例如 proximal 对、distal 对等. 这些局部性质也最终反映了系统的全局性质, 例如, 一个拓扑动力系统为等度连续的当且仅当其局部 proximal 关系为对角线, 它为 distal 的当且仅当其 proximal 关系为对角线. 最近, 为得到遍历理论中 Kolmogorov 系统的拓扑对应, Blanchard 等人局部化了拓扑熵、测度熵等概念. 事实证明, 这种做法非常有效. 例如, 利用这种思想人们证明了极大零熵因子的存在性、局部变分不等式等结论. 稍后, 这些概念从熵对推广到熵串 (Huang-Ye, 2006)、熵集 (Dou etc., 2006a)、熵点 (Ye-Zhang, 2007), 经典的熵的变分原理也推广到了局部形式 (Glasner-Weiss, 2004).

在拓扑动力系统方面有着许多优秀的专著, 如文献 (Gottschalk-Hedlund, 1955; Ellis, 1969; Bronstein, 1979; Veech, 1977; Furstenberg, 1981; Woude, 1982; Auslander, 1988; Vries, 1993; Akin, 1997; Weiss, 2000b; Glasner, 1976, 2003). 本书不同于上述书籍的地方在于, 我们主要立足于以下三个方面的思想: 遍历理论与拓扑动力系统概念和结果的相似性、系统回复时间集与系统的动力学性质紧密相连以及动力学性质的局部化与全局性质紧密相连. 另外, 本书还包含了最近几年拓扑动力系统一些新的重要研究成果. 除了上面提到的三个侧重点外, 我们也注意体现一些经典方法 (如 Ellis 半群理论) 的应用, 以及强调拓扑动力系统与其他数学分支的关联. 另外, 读者不难发现 Furstenberg 及其学派的思想对本书的影响, 其获 Wolf 奖的重要工作之一 —— 极小 distal 流的结构定理和 Szemerédi 定理的遍历理论的证明也在本书中作了简单介绍.

本书共分 10 章. 在第 1, 2 章给出拓扑动力系统和遍历理论的一些基本概念及定理. 在此过程中, 我们强调二者结论的相似性. 与此同时, 我们尽可能多地给出本书中所涉及的概念, 以便在后文中详细论述时, 读者不会太陌生. 特别地, 我们介绍了许多族及其与动力学性质的联系. 另外, 我们还分别介绍了拓扑动力系统以及遍历理论中的多重回复定理, 并运用它们给出著名的 van der Waerden 定理和 Szemerédi 定理的证明, 用以体现动力系统在组合数论中的应用.

第 3 章研究动力学性状相对简单的系统: 等度连续系统、distal 系统以及相关推广, 其中对几乎等度连续系统进行了颇为细致的讨论, 给出它与初值敏感和单生群之间的联系. 另外, 在研究等度连续系统的同时也讨论了各种 distal 性质, 其中拓扑动力系统的代数方法 ——Ellis 半群理论发挥了重要作用. 最后, 我们证明了著名的极小 distal 流的 Furstenberg 结构定理, 以此指出 distal 系统与等度连续系统的关系, 并引出一般极小流结构定理的陈述.

第 4 章系统研究族及其性质. 首先, 系统地介绍了族的概念, 更为深入地讨论其与动力系统性质的联系. 然后, 将传递与混合的概念推广到族传递与族混合, 并且讨论它们的基本性质. 本章还将证明关于族的动力系统实现的重要定理: Weiss-Akin-Glasner 定理. 最后, 在族传递的范畴下讨论了对偶问题.

接下来的三章将介绍拓扑动力系统和遍历理论中的熵理论. 首先, 第 5 章介绍熵的基本概念以及基本性质, 也细致讨论了 Pinsker σ 代数以及 Kolmogorov 系统等理论. 这些是经典熵理论的基本组成部分.

第 6 章给出熵的局部化理论. 首先, 运用局部化思想讨论拓扑 Kolmogorov 系统. 而后给出了 Glasner 和 Weiss 最近关于熵的局部变分原理的证明 (Glasner-Weiss, 2004). 最后讨论拓扑和测度熵串等概念, 给出二者之间的变分关系.

第 7 章系统讨论序列熵的性质与应用. 首先证明了 Kushnirenko 定理, 即保测系统具有离散谱当且仅当对任意无限序列, 其序列熵为零. 然后分别在拓扑动力系统和遍历论中, 运用序列熵刻画各种混合性. 这里再次展现了两个分支的结论表述的相似性. 最后, 将序列熵局部化, 给出序列熵对的概念, 结合极小流结构定理给出拓扑 null 系统的结构. 由于这一章用 Koopman-von Neumann 定理讨论了谱性质, 所以在本章附录中给出这个定理的证明.

有了前面的准备, 接下来的三章分别讨论传递系统的分类、不交性以及混沌这三个拓扑动力系统的重要主题. 第 8 章考虑传递系统分类问题. 首先, 引入沿序列的复杂性函数给出诸如满扩散、极端扩散、强扩散、扩散、弱扩散的刻画. 然后结合弱不交以及回复时间集 (运用族的方法) 对传递系统的分类问题进行讨论. 最后, 给出具体的例子以区分若干不同的概念.

第 9 章研究不交性. 首先给出基本的概念和性质, 并在此基础上证明了若干重要的不交性定理. 然后讨论不交性和弱不交性之间的联系, 细致地研究了与所有极小系统不交的系统的性质. 最后给出在极小系统中不交的代数刻画并讨论了伪因子.

最后一章讨论混沌. 从 20 世纪 60 年代以来, 确定论的科学观开始动摇, 人们开始探索科学上那些不可预测的现象, 使混沌科学得到飞速发展. 1975 年, Li 与 Yorke 发表了《周期三蕴含混沌》的文章, 在数学中第一次引入了“混沌”这个名词 (Li-Yorke, 1975). 之后, 不同领域的科学家基于自己对混沌的理解, 给出了许多混沌的不同定义. 我们将讨论 Li 与 Yorke 混沌、Devaney 混沌、正熵以及混合性之间的相互关系, 证明 Devaney 混沌、正熵以及混合性都蕴含 Li 与 Yorke 混沌.

本书可作为动力系统方向的研究生教材, 也可作为对拓扑动力系统和遍历理论感兴趣的数学工作者的参考书. 本书的内容可用于拓扑动力系统和遍历理论研究生课程的教学. 在本书中, 我们尽可能使内容自封闭, 但在选材上受限于作者的兴趣、能力以及书的篇幅, 无法面面俱到. 正因为如此, 动力系统的重要研究领域, 例如微分动力系统、Hamilton 系统、随机动力系统、微分方程的定性理论以及在本

书中没有用到的遍历理论和 Ellis 半群知识等都不在本书的讨论范围. 另外, 拓扑动力系统中像可扩性、吸引子、不动点理论、伪轨跟踪 (POTP)、一维动力系统、剩余 (residual) 熵、轨道等价、刚性、与分形几何的联系、相对情况的研究、一般的群作用等重要内容也无法在本书中涉及. 同时, 由于相关研究方向正在快速发展之中, 我们也无法收入一些预印本中的重要工作. 有兴趣的读者可在相关章节的注记中找到简单的介绍.

本书的第 1, 2 章是拓扑动力系统和遍历理论的基础知识, 读者在阅读中不会遇到困难. 对于不太熟悉 Ellis 半群的读者, 可以跳过第 3 章、第 6 章和第 9 章的部分内容, 不会影响到对全书内容的把握. 对于不太熟悉遍历理论的读者, 在阅读中遇到的困难是第 5 章的部分内容以及第 6 章和第 7 章的大部分内容, 对动力系统局部性质的理解可能会有些影响.

本书是作者在中国科学技术大学数学系多年从事拓扑动力系统和遍历理论的研究生课程和讨论班教学的基础上形成的, 其中部分章节曾用于 2004 年 5 月中国科学院晨兴数学中心面向研究生的十余次报告. 本书的第 1, 2, 8 章由叶向东执笔, 第 5~7 章由黄文执笔, 第 3, 4, 10 章由邵松执笔, 第 9 章由叶向东和邵松共同执笔. 初稿完成后, 作者进行了近两年的修改并在中国科学技术大学数学系的研究生课上进行了试讲. 尽管如此, 书中肯定还存在许多不足和笔误, 希望读者不吝指教. 作者衷心感谢张景中、杨路和熊金城先生共同为中国科学技术大学的动力系统研究打下的基础. 我们感谢中国科学技术大学动力系统研讨班的董攀登、窦斗、方春、胡洎、李思敏、鲁平、吕杰、匡锐、史恩慧、孙太祥、苏勇、叶盛、张国华、张鹏飞、张瑞丰、张伟和张玉成等人的积极参加, 以及对书稿的改进提出的有益意见, 尤其是张国华和张鹏飞同学仔细地阅读了本书的若干章节, 指出其中的笔误并提出修改意见. 同时, 非常感谢科学出版社对我们的大力支持.

最后, 衷心感谢家人、朋友、同事对我们长期的支持.

路漫漫其修远兮, 吾将上下而求索.

作　者

2007 年 1 月 30 日

于中国科学技术大学数学系

符号约定

本书用 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 分别表示自然数、整数、实数、复数集合. 而记 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{Z}_-$ 为非负整数全体和非正整数全体, $\mathbb{R}_+$ 及 $\mathbb{R}_-$ 为非负实数和非正实数全体.

以 $\varnothing$ 记空集. 设 A,B 为集合 X 的子集, 定义差集 $B\setminus A$ 为 $\{x\in X: x\in B, x\notin A\}$, 而定义对称差集 $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. 记 A 的补集为 A^c. 对于集合 A, 记它的势为 $|A|$ 或 $\mathrm{Card}A$.

设 X 为拓扑空间, A 为 X 子集. A 的闭包记为 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$, A 的内点集记为 $\mathring{A}$ 或 $\mathrm{int}(A)$. 如果 d 为 X 的度量, 对 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, 令 $B_\varepsilon(x)=B(x,\varepsilon)=\{y\in X: d(y,x)<\varepsilon\}$. 对于子集 A 的直径用符号 $\mathrm{diam}A$ 表示.

设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族拓扑空间, 其中 I 为指标集. 记这族空间的乘积空间为 $\prod_{i\in I}X_i$, 尤其 $I=\mathbb{N}$ 时记为 $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$. 用 $p_n:\prod_{i\in I}X_i\longrightarrow X_n$ 表示到 X_n 的投射. 如果对任意 i 都有 $X_i=X$, 那么直接记 $\prod_{i\in I}X_i$ 为 $\prod_{i\in I}X$ 或 X^I. 特别地, 对拓扑空间 X, 其 n 次乘积空间记为 $X^n=\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n\text{ 次}}, n\in\mathbb{N}$.

设 $T: X\to X$ 为映射, $n\in\mathbb{N}$, 记 $T^{(n)}=\underbrace{T\times T\times\cdots\times T}_{n\text{ 次}}$. 对自然数 n, 定义 T 的 n 次迭代为 $T^n=\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{n\text{ 次}}$, 并约定 $T^0=\mathrm{id}$ (其中 id 表示恒同映射).

“$\exists$” 表示 “存在”; “$\forall$” 表示 “对任意的”; “s.t.” 表示 “使得”; “$\Rightarrow$” 表示 “推出”.

目　录

第 1 章　拓扑动力系统基础

一般而言, 拓扑动力系统研究的是拓扑群在拓扑空间上作用的定性性质. 在这一章中我们将介绍一些拓扑动力系统的基本概念, 如传递性、极小性、混合性以及其他回复属性等, 也将证明 Birkhoff 回复定理及其推广 —— 多重 Birkhoff 回复定理, 并且作为应用, 用它证明 van der Waerden 定理. 另外, 在整个论述中, 我们将突出非负整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的子集与动力学性质的关联.

§1.1　基 本 概 念

设 X 为紧致的 Hausdorff 空间, G 为拓扑群, 如果 $\phi: G\times X \to X$ 连续且满足:

(1) 对任意 $x \in X$, 有 $\phi(e,x)=x$, 其中 e 为 G 的单位元;

(2) 对任意 $x\in X$ 和 $g_1,g_2 \in G$, $\phi(g_1,\phi(g_2,x))=\phi(g_1g_2,x)$ 成立.

那么就称 (X,G,ϕ) 为一个**拓扑动力系统**. 一般地, 也直接用 (X,G) 记一个拓扑动力系统. 易见, 此时对于每个 $g\in G$, $\phi(g,\cdot): X\to X$, $x\mapsto \phi(g,x)$ 为同胚. 为方便计, 有时将 $\phi(g,x)$ 简记为 gx. 当 X 为独点集时, 称系统 (X,G) 为**平凡系统**.

如果 $G=\mathbb{R}$ 为实数加群, 也称 $(X,\mathbb{R})$ 为一个**流**. 如果 $G=\mathbb{Z}$ 为整数加群, 那么称 $(X,\mathbb{Z})$ 为一个**离散动力系统**.

设 $T: X\to X$ 为一个同胚, 可以定义 $\phi: \mathbb{Z}\times X\to X$, 使得 $\phi(n,x)=T^n(x)$. 于是 $(X,\mathbb{Z},\phi)$ 成为一个离散动力系统. 反之, 如果 $(X,\mathbb{Z},\phi)$ 为一个离散动力系统, 那么 $T: X\to X$, $x\mapsto\phi(1,x)$ 为一个同胚, 且对任意 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $\phi(n,x)=T^n(x)$. 正因为如此, 一般直接以 (X,T) 表示离散动力系统.

如果在上面的定义中以非负整数加法半群 $\mathbb{Z}_+$ 替代 G, 那么称 $(X,\mathbb{Z}_+,\phi)$ 为一个**半离散动力系统**. 利用类似的讨论可以看出, 一个半离散动力系统可以由一个连续映射生成. 在本书中, 这是我们讨论的主要对象.

设 (X,G) 为动力系统. 对 $x\in X$, 称 $\mathrm{orb}(x,G)=\{gx: g\in G\}$ 为 x **的轨道**. 设 A 为 X 的子集, 如果 $gA=\{gx: x\in A\}\subseteq A, \forall g\in G$, 则称 A 为**不变集**. 如果 $A\subseteq X$ 为闭的不变集, 则将群作用限制在 A 上也成为一个动力系统, 称之为 (X,G) 的**子系统**, 记为 (A,G,ϕ). 对任意 $x\in X$, 易见 $\overline{\mathrm{orb}(x,G)}$ 为闭的不变集, 进而 $(\overline{\mathrm{orb}(x,G)},G)$ 是 (X,G) 的一个子系统. 这是一个常用的构造新动力系统的方法. 设 (X,G) 和 (Y,G) 为两个动力系统, 定义它们的**乘积系统**为 $(X\times Y,G)$, 其中 $g(x,y)=(gx,gy),\forall g\in G$. 任意多个系统的乘积系统可以类似的定义.

就像别的数学分支一样, 拓扑动力系统的一个中心问题便是系统的分类. 于是一个自然的问题是: 两个拓扑动力系统何时是"一样的"? 在一般拓扑学中, 两个拓扑空间如果同胚, 那么我们认为它们是一样的; 而在代数中, 两个群如果为同构的, 那么认为它们是一样的. 在拓扑动力系统中, 有如下定义.

定义 1.1.1 设 (X_1, G, ϕ_1) 和 (X_2, G, ϕ_2) 为两个拓扑动力系统. 如果存在一个连续满射 $\pi: X_1 \to X_2$, 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_2 \end{array}$$

即 $\pi(gx) = g(\pi x)$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X_1$, 那么就称 (X_1, G, ϕ_1) 为 (X_2, G, ϕ_2) 的一个**扩充**, 或者称 (X_2, G, ϕ_2) 是 (X_1, G, ϕ_1) 的一个**因子**. 此时称 π 为一个**因子映射** 或称为**半共轭**. 如果 π 为同胚, 就称 (X_1, G, ϕ_1) 和 (X_2, G, ϕ_2) 为**共轭的**.

在拓扑动力系统中, 两个系统如果为共轭的, 我们就认为它们是"一样的". 于是, 寻求共轭不变量是拓扑动力系统的一个重要主题.

在本书中, 如非特别指出, 一般研究 $\mathbb{Z}_+$ 作用下的系统. 即我们所指的拓扑动力系统是指偶对 (X, T), 其中 X 为紧度量空间而 $T: X \to X$ 为连续映射. 由于此时为半群作用, 所以上面的某些定义有些细微的差别.

对 $x \in X$, 称 $\mathrm{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \cdots\}$ 为 x **的轨道**. 设 A 为 X 的子集, 如果 $T(A) \subseteq A$, 则称 A 为**正不变集**或**不变集**; 如果 $T^{-1}A \subseteq A$, 则称 A 为**负不变集**; 如果 $T(A) = A$, 则称 A 为**强不变集**. 如果 $A \subseteq X$ 为闭的不变集, 则 $(A, T|_A)$ 也成为一个动力系统, 称之为 (X, T) 的**子系统**, 有时就直接将它记为 (A, T). 对任意 $x \in X$, 易见 $\overline{\mathrm{orb}(x, T)}$ 为闭的不变集, 进而 $(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}, T)$ 是 (X, T) 的一个子系统.

当考虑两个半离散动力系统 (X, T) 和 (Y, S) 时, 因子映射 $\pi: X \to Y$ 就是满足 $\pi \circ T = S \circ \pi$ 的连续满射. 下面给出因子映射的等价描述.

设 (X, T) 为动力系统. 我们可以将 $X \times X$ 的子集 R 视为 X 上的一个关系. 如果 R 为 $X \times X$ 的闭子集, 就称 R 为**闭关系**; 如果 $(T \times T)(R) \subset R$, 就称关系 R 为**不变的**. 设 $R \subset X \times X$ 为 X 上闭的不变的等价关系. 对 $x \in X$ 考虑 x 所在的等价类 $[x]_R = \{y \in X : (x, y) \in R\}$. 所有的这些等价类形成了一个新的空间 $X/R = \{[x]_R : x \in X\}$, 如果 X/R 的拓扑取商拓扑, 则 X/R 为紧度量空间. 映射 T 自然地诱导了 X/R 上的连续映射 $T_R: [x]_R \to [Tx]_R$, 从而 $(X/R, T_R)$ 为动力系统. 设 $\pi: X \to X/R$ 为商映射, 则 $\pi: (X, T) \to (X/R, T_R)$ 为因子映射且 $R_\pi = \{(x, y) \in X \times X : \pi(x) = \pi(y)\} = R$.

反之, 设 $\pi: (X, T) \to (Y, S)$ 为因子映射, 通过 π 可以定义 X 上的一个闭的不

变的等价关系：

$$R_\pi = \{(x,y) \in X \times X : \pi(x) = \pi(y)\}.$$

易见 $(X/R_\pi, T_{R_\pi})$ 拓扑共轭于 (Y,S). 因此, 在把拓扑共轭的两个动力系统不加区分的意义下, 有

命题 1.1.2 设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 的因子系统一一对应于 X 上闭的不变的等价关系.

另外注意到, 如果 $T : X \to X$ 为连续的, 那么 $T : \bigcap_{i=0}^\infty T^i(X) \to \bigcap_{i=0}^\infty T^i(X)$ 为满的. 后面我们会看到, 实际上一个系统几乎所有的动力学性状都集中体现在 $\bigcap_{i=0}^\infty T^i(X)$ 上, 所以我们经常在系统 (X,T) 定义中假设映射 T 为满射.

将半离散系统与离散系统联系在一起的一个桥梁是所谓的**自然扩充**. 设 $T : X \to X$ 为连续满的自映射. 设

$$\widetilde{X} = \left\{ (x_1, x_2, \cdots) \in \prod_{i=1}^\infty X : Tx_{i+1} = x_i,\ i \geqslant 1 \right\}.$$

作为乘积空间 $\prod_{i=1}^\infty X$(取乘积拓扑) 的子集, $\widetilde{X}$ 是非空闭的. 如果定义 $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, 使得

$$\widetilde{T}(x_1, x_2, \cdots) = (Tx_1, x_1, x_2, \cdots).$$

那么 $\widetilde{T}$ 为同胚. 易见对每个 $n \in \mathbb{N}$, 向第 n 分量的投影映射 $p_n : \widetilde{X} \to X$ 为连续满射. 尤其 p_1 为 $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ 到 (X,T) 的因子映射.

自然扩充 $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ 是可逆系统, 它保持了 (X,T) 几乎所有的动力学性质. 在许多情形下, 我们的结论首先是对可逆系统证明的, 然后通过其自然扩充将一般情形转化为可逆的情况来获得相应的结论. 这是一种十分常用的技巧.

习 题 1.1

证明：一个子集为正不变的当且仅当它的补集为负不变的; 一个强不变集为正不变的, 但不一定为负不变的, 除非 T 为单射; 一个既是正不变又是负不变的子集 (例如 X) 不一定为强不变的, 除非 T 为满射; 当 T 为同胚时, 集 A 为强不变集当且仅当它既为正不变集又为负不变集.

§1.2 传 递 性

回复性是十分重要的动力学性质. 这是因为在研究自然现象时, 那些可以重复观察的现象才是我们最关心的. 从这节开始, 我们将研究各种回复性质.

定义 1.2.1 设 (X,T) 为动力系统, $x \in X$.

(1) 如果 $Tx = x$, 那么点 $x \in X$ 称为**不动点**;

(2) 如果存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $T^n x = x$ 成立, 那么点 $x \in X$ 称为**周期点**, 而满足 $T^n x = x$ 最小的自然数 n 称为 x 的**周期**.

用 $\mathrm{Fix}(X,T)$表示系统 (X,T) 的不动点全体, 用 $\mathrm{Per}(X,T)$ 表示系统 (X,T) 的周期点全体.

在下面的定义中, 如果空间确定并且不会引起混淆, 我们经常会省略空间记号. 例如把上面 $\mathrm{Fix}(X,T), \mathrm{Per}(X,T)$ 直接记为 $\mathrm{Fix}(T)$ 和 $\mathrm{Per}(T)$.

设 x 为以 n 为周期的周期点, 那么 $(\{x, Tx, \cdots, T^{n-1}x\}, T)$ 成为一个动力系统. 这是一类最简单的动力系统, 并且每个点都是周期回复的.

对 $x \in X$, 定义 **x 的 ω 极限集** $\omega(x,T)$为 $\mathrm{orb}(x,T)$ 的全体极限点集, 即

$$\omega(x,T) = \{y \in X : \exists n_i \to +\infty \text{ s.t. } T^{n_i}x \to y\} = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{\bigcup_{k \geqslant n} \{T^k x\}}.$$

如果 $U,\ V \subset X$, 定义**回复时间集**为

$$N(U,V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap T^{-n}V \neq \varnothing\}.$$

定义 1.2.2　称动力系统 (X,T) 或 T 为**传递的**是指对 X 的任意两个非空开集 $U,\ V$, 有 $N(U,V) \neq \varnothing$. 如果存在点 $x \in X$ 满足 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)} = X$, 那么称 (X,T) 为**点传递的**, 而称 x 为一个**传递点**. X 的全体传递点记为 Trans_T .

注记 1.2.3　(1) 传递与点传递是不同的概念. 反例如下:

设 $X = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\right\}$(取 $\mathbb{R}$ 的遗传拓扑), 而 $T : X \to X$ 定义为 $T(0) = 0, T\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$. 于是 $\mathrm{Tran}_T(X) = \{1\}$, 但 (X,T) 不是拓扑传递的.

设 $g : I \to I$, 其中 $I = [0,1]$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ 为帐篷映射. 则 $\overline{\mathrm{Per}(g)} = I$(张景中等, 1992). 令 $X = \mathrm{Per}(g)$ 及 $f = g|_{\mathrm{Per}(g)}$. 于是 (X,f) 为传递但不为点传递的.

(2) 易证: 如 X 没有孤立点, 则点传递推出传递; 当 X 是任意一个拓扑空间, T 是其上的一个连续自映射, 我们也可类似地引入传递和点传递的概念, 不难验证, 如果 X 为可分的第二纲集, 则传递推出点传递. 由于在定义一个动力系统 (X,T) 时我们已经假设 X 为紧度量的, 于是对一个动力系统而言总有传递推出点传递, 而如果再加上没有孤立点, 则两概念等价.

(3) 需要注意的是, 如果 T 为传递的, 那么 T 为满射, 并且 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)} = X$ 当且仅当 $\omega(x,T) = X$. 记 $\mathcal{F}_{\inf}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的全体无限子集组成的集合. 易证, (X,T) 为传递的当且仅当对任意非空开集 U, V, $N(U,V) \in \mathcal{F}_{\inf}$ 成立.

现在给出传递性的一些等价命题:

定理 1.2.4　设 (X,T) 为动力系统, 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为传递的;

(2) 对每个非空开集 U, $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-n}U$ 稠密;

(3) 如果 U 为满足 $T^{-1}U \subset U$ 的非空开集, 则 U 为稠密的;

(4) 如果 E 为闭不变的, 那么或者 $E = X$, 或者 E 为无处稠密的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 U 为满足 $T^{-1}U \subset U$ 的非空开集. 则 $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U = U$. 于是由条件 (2) 知 U 为稠密的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $U = X \setminus E$, 则 $T^{-1}U \subset U$. 于是或者 U 为空集或者 U 稠密. 等价地, 或者 $E = X$ 或者 E 无处稠密.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 U, V 为 X 的非空开集. 令 $E = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U$. 于是 E 为无处稠密的, 即 $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U$ 为稠密的. 从而有 $V \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U \neq \varnothing$. 这样存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $V \cap T^{-n}U \neq \varnothing$, 即 (X, T) 为传递的. □

设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, π 为**极小的**是指 X 为唯一满足 $\pi(A) = Y$ 的非空闭不变子集 A. 有

定理 1.2.5 设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, 则

(1) 如果 (X, T) 为传递的, 那么 Trans_T 为 X 的稠密 G_δ 子集;

(2) 如果 T 为传递的, 那么 S 也是传递的, 且 $\mathrm{Trans}_T \subset \pi^{-1}(\mathrm{Trans}_S)$. 如果 π 还为极小的, 则等号成立.

证明 (1) 设 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的一组基, 那么有

$$\mathrm{Trans}_T = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U_i \right).$$

因为 (X, T) 为传递的, 所以对每个 $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U_i$ 为 X 的稠密开集. 由 Baire 定理, Trans_T 为 X 的稠密 G_δ 集.

(2) 前半部分易证, 我们证后半部分. 设 π 为极小的且 $y \in \mathrm{Trans}_S$, 于是对任意 $x \in \pi^{-1}(y)$ 有 $\pi(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}) = Y$. 根据 π 的极小性, 就有 $\overline{\mathrm{orb}(x, T)} = X$, 即 $x \in \mathrm{Trans}_T$. □

与传递性紧密联系在一起的一个概念是回复点.

定义 1.2.6 $x \in X$ 称为一个**回复点**是指存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}x \to x$, 即 $x \in \omega(x, T)$. 以 $\mathrm{Rec}(T)$ 记全体回复点的集合.

一个重要的事实是, 如果 x 为回复点, 那么 $(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}, T)$ 为传递系统; 对传递系统 (X, T), 有 $\mathrm{Trans}_T \subset \mathrm{Rec}(T)$. 下面著名的 Birkhoff 定理说明对动力系统, 回复点总是存在的.

定理 1.2.7 (Birkhoff 定理) 每个动力系统都存在回复点.

令人吃惊的是, 即便这样一个似乎很简单的命题, 以往的证明不是需要 Zorn 引理就是要用到遍历论的方法. 读者可以试着用 Zorn 引理给出一个证明, 我们将在

下一节给出一个构造性证明 (Weiss, 2000b).

明显地, $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{Rec}(T)$. 如果 x 是周期为 n 周期点, 那么 $(\{x, Tx, \cdots, T^{n-1}x\}, T)$ 为传递系统. 为得到更多传递系统的例子, 我们先介绍**符号系统**的概念.

设 $k \geqslant 2$ 为自然数且记 $A = \{0, 1, \cdots, k-1\}$. 称 A 中元素为**字母**. 赋予 A 以离散拓扑, 而

$$\Sigma_k = \prod_{i=1}^{\infty} A = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_i \in A, i \in \mathbb{N}\}$$

取乘积拓扑. 则 Σ_k 为紧致可度量空间, 一个相容的度量为

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = y, \\ \dfrac{1}{i}, & \text{如果 } x \neq y \text{ 且 } i = \min\{j : x_j \neq y_j\}. \end{cases}$$

定义 $T : \Sigma_k \to \Sigma_k$, 使得对每个 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \Sigma_k$,

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

易见 T 为连续的满射, 称 (Σ_k, T) 或 T 为**全转移**或直接称之为转移. 如果 Y 为 Σ_k 的非空闭正不变子集, 那么称 (Y, T) 为**子转移**. 易见 $\mathrm{Per}(T)$ 在 Σ_k 中稠密.

每个 $B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ 称为一个**块**或者一个**词**, 其中 $A^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 n 词全体. 称词 B 在 $x \in \Sigma_k$ 的第 i 个位置处**出现**是指存在 $j \geqslant i$, 使得 $B = (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j)$. 如果 B, C 为两个词, 那么 BC 表示一个新的词 $(b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$, 其中 $B = (b_1, \cdots, b_n)$ 且 $C = (c_1, \cdots, c_m)$. 为方便起见, 分别记 $B \cdots B$ (n 个) 和 $BB \cdots$ 为 $B^{(n)}$ 和 B^{∞}. 对一个词 $B = (b_1, \cdots, b_n)$, 子集 $\{x \in \Sigma_k : x_1 = b_1, \cdots, x_n = b_n\}$ 称为一个**柱**, 记为 $[B]$. 首先有一个简单但重要的结论:

命题 1.2.8 *$x \in \Sigma_k$ 为回复点当且仅当每个 x 中的词在 x 中出现无限多次.*

下面举一个具体的例子.

例 1.2.9 *设 $A_1 = (1), A_2 = (101), \cdots, A_{n+1} = A_n 0^{(n)} A_n$, 则 $x = \lim\limits_{n \to \infty} A_n^{\infty}$ 为一个非周期点的回复点.*

对于回复点集, 我们有如下基本性质:

定理 1.2.10 *设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, 则*

(1) $T(\mathrm{Rec}(T)) = \mathrm{Rec}(T)$;

(2) $\mathrm{Rec}(T^n) = \mathrm{Rec}(T)$;

(3) $\pi(\mathrm{Rec}(T)) = \mathrm{Rec}(S)$.

证明 (1) 首先, 易验证 $T(\mathrm{Rec}(T)) \subset \mathrm{Rec}(T)$. 现在设 $x \in \mathrm{Rec}(T)$, 则存在序列 $n \to +\infty$ 使得 $T^{n_i}x \to x$. 由于 X 紧致, 不失一般性, 设 $T^{n_i - 1}x \to y$. 于是 $T(y) = x$ 且 $T^{n_i}y = T^{n_i-1}x \to y$, 即 $y \in \mathrm{Rec}(T)$ 且 $T(y) = x$. 这样就有 $\mathrm{Rec}(T) \subset T(\mathrm{Rec}(T))$.