

Great
Discoveries

Incompleteness: The Proof
and Paradox of Kurt Gödel

INCOMPLETENESS: THE PROOF
AND PARADOX OF KURT GÖDEL

大发现系列丛书
Great Discoveries

不完备性

【——哥德尔的证明和悖论】

[美] 丽贝卡·戈德斯坦 著 唐璐 译

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

B516. 59/31

2008



COMPLETENESS: THE PROOF
OF THE INCOMPLETENESS OF KURT GÖDEL
大发现系列丛书
Great Discoveries

不完备性

——哥德尔的证明和悖论

[美] 丽贝卡·戈德斯坦 著 唐璐 译

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目 (C I P) 数据

不完备性: 哥德尔的证明和悖论 / (美) 戈德斯坦著;
唐璐译. —长沙: 湖南科学技术出版社, 2008.4

(大发现丛书)

书名原文: Incompleteness: The Proof and Paradox
of Kurt Godel

ISBN 978-7-5357-5245-1

I. 不… II. ①戈…②唐… III. 哥德尔, K. (1906~
1978) —数理逻辑—研究 IV. O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 049986 号

大发现系列丛书

不完备性

——哥德尔的证明和悖论

著 者: [美] 丽贝卡·戈德斯坦

译 者: 唐 璐

责任编辑: 吴 炜 贾平静

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731 - 4375808

印 刷: 长沙健峰彩印实业有限公司

(印装质量问题请直接与原厂联系)

厂 址: 长沙市张公岭亚大路 93 号

邮 编: 410015

出版日期: 2008 年 4 月第 1 版第 1 次

开 本: 850mm×1168mm 1/32

印 张: 7.5

字 数: 165000

书 号: ISBN 978-7-5357-5245-1

定 价: 22.00 元

(版权所有·翻印必究)

前言

哥德尔对人们相互理解的能力不抱乐观态度。语言是我们交流的工具，而语言也的确是适应性的奇迹。它在语法和语义上是有限的，这对它的可被学习是必需的——不仅是对小孩子！——然而它又有着无限的生成能力。我们用语言所能描述的事物没有界限，我们所能生成的命题也没有限制。

然而，虽然语言有着无限的能力，哥德尔却认为，语言可以被证明是生硬而笨拙的工具。还在维也纳大学读书的时候，他就向一同参加传奇性的维也纳小组高级哲学讨论班的朋友透露，“我对语言思考得越多，我就越奇怪人们居然能相互理解。”

哥德尔最想阐释的涉及他对数学哲学所持有的深刻信念；而这也是与语言的局限联系在一起的哲学。考虑到哥德尔对语言总体上的悲观态度，也许就不奇怪他在表述他的哲学信念时，会痛苦于语言的局限，并用他的数学天赋来克服。他杰出的成就正是将哲学蕴涵丰富的结论翻译成澄净透明的形式逻辑。然而，虽然他用严格的数学对两个不完备性定理的证明为他人所承认，哥德尔还是常常感到其哲学蕴涵——这也是他最为关切的部分——被误解了。虽然他进行了不懈努力，人们在相互理解时的困难仍然困扰着他。

哥德尔对我们相互理解对方的能力感到悲观，即便我们说同一种语言并生活在同一个国家。如果身隔万里，对世界和对方的理解是由完全不同的历史和文化所塑造，那么在进行对话或试图在深层次上交流时，又会有多少额外的困难呢。

在试图扩展语言的适应性时我们时常依赖于隐喻，但是隐喻常常无法走得很远。有些描述依赖于理解通过某种隐含的方式 X 类似于 Y，在领会它们时，经验的不同会导致严重的困难。因此经验的主观性使得相互理解甚至更为困难。

这些问题也是《不完备性》的译者唐璐所面临的，借此机会我向他为落实意义的不懈努力表示感谢。《不完备性》已被翻译成了多种语言，但在所有译者中我与唐璐的通信是最多的，而这些通信也成了让我快乐的源泉。他非常希望让所有地方都十分妥当。最终我理解到，他提出的大量问题和付出的努力不仅说明了他的敬业，也表明了他对库尔特·哥德尔及其美丽的证明同样的深切感受。

库尔特·哥德尔远比我认为是他意识到的要成功。他杰出的数学结论等着我们所有人去理解，我们还沉思于它们的哲学意义。在分享这深刻的智识体验时，我们也在分享着某种超越一切外在局限的东西。

丽贝卡·戈德斯坦
马塞诸塞，波士顿

目 录

引子	(1)
第 1 章 实证主义者中间的柏拉图主义者	(31)
第 2 章 希尔伯特和形式主义者	(85)
第 3 章 不完备性证明	(104)
第 4 章 哥德尔的不完备性	(150)
注释	(193)
阅读建议	(208)
致谢	(212)
附录 1 人名译名对照表	(213)
附录 2 专用名词译名对照表	(221)

引子

流 放

新泽西郊外的夏天快要结束了。一条僻静的小路上，两个人在散步，手背在身后，低声交谈着。浓密的树荫遮天蔽日，远处矗立着宏伟的老房子，路边榆树丛外蜿蜒着葱翠的高尔夫球道，隐约传来打球的人微弱的谈话声。

这里虽然看上去不起眼，却不是普通的郊外居民区——散布着乡村俱乐部，人们每天进城去获取财富。这里是新泽西普林斯顿，座落着世界上最伟大的大学之一，因此也拥有来源更多样的居民。两人在僻静小路上散步回家的这一刻，普林斯顿的居民甚至更具世界性，拥有许多因希特勒而逃离欧洲的最杰出思想家。一位美国教育家说：“希特勒摇树，我捡苹果。”^[1]一些最好的苹果结束飘零，来到世界的这个小角落。

因此这两位散步者用德语交谈也就不奇怪了。其中一位，穿着整齐的白色亚麻西服，戴着配套的白色软呢帽，只有30多岁，而另一位，裤子松垂，用老式吊裤带挂着，大约70来岁。虽然年龄相距甚远，说起话来却有如同辈，偶尔老者的脸会被逗乐得皱成一团，他摇着头，似乎对方谈论的事情 *wirklich verrückt*，非常好笑。

在树荫浓密的小路尽头，与两人走的方向相反，高等研究院新建的那幢醒目的乔治时代风格红砖大楼矗立在宽阔的

草坪上。研究院已有大约 10 年是在普林斯顿大学哥特式的数学楼里租的地方。但欧洲涌来的学术精英让研究院的声望大增，现在它搬到了距大学几英里远的地方，自己建了开阔的园区，有池塘和一小片森林，小径交织，在这里可以捕捉难以琢磨的思想。

20 世纪 40 年代早期，高等研究院在美国已是个很不寻常的地方，拥有一些一流的思想家。研究院的建立源于一个人的远见卓识，这多少解释了研究院的独特。1930 年，教育改革家弗莱克斯纳说服两位新泽西百货公司继承人，班贝格和他的妹妹福尔德夫人，建立一所新型研究院，以促进“无用知识的有用性”。在股市崩溃前几周，这两位零售业巨子将企业出售给了梅西公司；秉着博爱的心愿，他们拿着 3000 万美元找到弗莱克斯纳，向他请教，希望能将这笔钱用于改善人类心灵。

弗莱克斯纳这位东欧移民的儿子，多年前曾独力承担分析美国医学教育弊端的责任。世纪之交，医学院过多过滥，获得医学学位除了说明学位获取者交了学费，几乎说明不了什么。仅密西西比州就有 42 所医学院，芝加哥有 14 所。弗莱克斯纳报告痛陈积弊，由卡耐基教学促进基金会出版后，扭转了这一局面。一些太差的机构卷起铺盖，从此彻底消失。

班贝格和福尔德对他们以前的新泽西顾客们心存感激，希望能回报他们。他们一开始想建医学院，因此派代表去和知道应当如何进行医学教育的人商谈。（弗莱克斯纳的哥哥是洛克菲勒大学医学院院长，他是弗莱克斯纳的偶像。）但弗莱克斯纳已经有了比让美国医生懂一点医学知识更为乌托邦的梦想。他的教育改革思想已经远离应用和实践领域，有了决定性的转变。他的理想是为最纯粹的思想家创造一个天堂，用坚实的红砖墙实现传说中的象牙塔：说白了，就是建立后

来举世闻名的高等研究院。

在这里，被严格甄选的成员将像王子一般被对待，Reine Vernunft，纯粹理性王子。他们将有丰厚的报酬（因此有人调侃这里是“高薪研究院”），全部时间都可用来思考，没有备课和修改学生作业的负担——事实上是完全没有指导学生的负担。同时还不断补充有天赋的青年学者，后来被称为“临时成员”。他们会访问一到两年，用他们的能量、年轻和热情为迟暮的天才们注入活力。“这里将是学者们自由的社区，”弗莱克斯纳写道，“自由，是因为受学术目的驱使的成熟人士，需要不受干扰地去追求自己的目标。”应当提供简单宽松的环境，以及“最重要的，安宁——没有任何打扰，既不需要世人的关注，也没有关照不成熟学生的责任”。班贝格/福尔德本想将学院建在新泽西内瓦克，但是弗莱克斯纳建议他们，普林斯顿有着几个世纪的学术传统，而且安详静谧，将更易于达到所期望的目的，赋予天才们自由。

弗莱克斯纳决定在数学的坚实基础上实现他的理想，用他的话说，数学是“所有学科中最严格的”。在一定意义上，数学是从所有学科中最大限度地除去“现实世界”的思想——在此语境下这个短语不仅仅意味着世事纷扰的实际世界。短语的意义还覆盖了物理存在的一切事物，除了思想、概念、理论——思维世界。当然，思维世界肯定可以涉及真实世界，典型情况就是这样；然而，在数学中这却不是典型。数学家，以他们极度的不近人情，可能不会喜欢（甚至痛苦于）被公众过多地关注；但是在那些生活在思想中的人当中，他们又被投以特别好奇的目光。这是他们方法的严格性以及他们结论的确定性所导致的，正是这些独一无二的特性让他们基本上没有什么用处（“没有用处”在此意思是，数学知识，就它本身而言，没有实践意义，不能改变我们的物质条

件，或好或坏)。

数学的严格性和确实性来自演绎，意指数学家从不借助任何观察来达成他们的数学洞察^①，这些数学洞察，就它们本身而言，也不需要观察，因此任何经验都削弱不了我们据以认识它们的基础。任何经验都不能用来作为根据改变，比如说， $5+7=12$ 。如果我们将 5 件东西和 7 件东西加起来得到了 13 件东西，我们就会重新数一遍。如果再数了几遍还是 13 件，我们就会认为，要么是 12 件中的一件分成了两件，要么就是我们看到了重影或幻觉，再要不然就是我们疯了。是根据 $5+7=12$ 这个真理评判计数经验，而不是反过来。

数学的演绎推理复杂，让人糊涂。但正是它让数学如此无可置疑，如此不容篡改：定理一旦被证明，就不可能被经验修正。大体上，数学的无懈可击正是来自演绎。在 *Reine Vernunft* 拱塔上，数学家们站在最顶端，他们的方法由理性构成，而且只包含理性；这就是为什么弗莱克斯纳认为他们的学科最严格的部分原因。

虽然数学家智高望重，资助他们相对来说却很划算，再借用一下弗莱克斯纳的话，只需“几个人，几个学生，几间房子、书籍、黑板、粉笔、纸和铅笔”就行了。无需昂贵的实验室、观测台或沉重的设备。数学家的所有设备都在他们的头脑里，这是数学就是演绎的另一种表述方式。弗莱克斯纳还有一个现实考量，就是数学对哪些是最好的几乎能完全达成一致。在所有学科中，唯独数学能基于无懈可击的演绎

① 然而，这并不表明这些信念就是天生的，即我们与生俱来的。显然，我们必须首先获取这些概念，以及表示它们的语言，然后才能开始相信 $5+7=12$ 。天生是一个心理学概念，而演绎则是一个认识论概念，关系到这些信念如何被证明的方法，用来作为支持或反对它的证据。（注：这本书中将用到两种注释：脚注作为本页思想的延伸，尾注则给出引用出处。）

推理建立它的结论，正因如此，从事这个行业的人的排名也遵循几乎数学般的确定性。作为研究院的规划者，同时也是首任院长，弗莱克斯纳将能确切地知道该选哪些人。

他很快就放宽了条件，让最为理论的物理学家和最为数学的经济学家也加入进来。到 1932 年，他得意地宣布，他拥有了两位雇员，一位是普林斯顿大学的维布伦，最顶级的数学家；还有一位就是爱因斯坦，他几近让人崇拜的地位使他成了纳粹的明显目标。爱因斯坦革命性的狭义和广义相对论已被德国科学家攻击为病态的“犹太物理学”的代表，被犹太人对抽象数学的愚蠢痴迷所败坏。甚至在种族灭绝计划实施之前，这位物理学家就已被列在第三帝国的特别打击名单上。

可想而知，很多大学都迫不及待想将这位声望崇高的难民揽至门下。例如，地处帕萨迪纳的加州理工学院就急切地想招募他。但是爱因斯坦更喜欢普林斯顿，有人说因为这是第一所对他的工作表示出兴趣的美国大学。他的朋友用他们见多识广的眼光审视这所新泽西的最高学府，认为它从骨子里土里土气，问他说：“你不会是想自杀吧？”但是，在故土突然变得近乎疯狂的敌意时，也许普林斯顿及时而持久的友善就被证明是难以抗拒的。爱因斯坦向弗莱克斯纳要求 3000 美元作为薪酬，而弗莱克斯纳给了他 16000 美元。很快这个有着一头卷发的著名头脑就开始在郊区的人行道上散步了，结果至少有一次“司机突然认出这个沿着街道行走的漂亮老人后”把车撞到了树上^[2]。

其他欧洲来的杰出人物也跟着爱因斯坦陆续来到新泽西，其中包括耀眼的匈牙利学者冯·诺依曼，他将在研究院建造世界上第一台计算机，这使得那些认同弗莱克斯纳理念——

让研究院不用去做任何“有用的”工作——的成员心生反感^①。爱因斯坦还在盛年时^②，就被尊崇为不朽的天才人物，因此几乎从他到达那天起，当地居民就称弗莱克斯纳建立的是“爱因斯坦研究院”。

显然，从研究院延伸出的林荫路上出现的两位散步者中的老人不是别人，就是这位普林斯顿最著名的居民，他的同伴表情严肃地宣称着什么事情，他听后脸上不时浮现出顽皮的微笑。这个年轻人，一位数理逻辑学家，对爱因斯坦的反应报以轻微而蹙脚的微笑，然后继续以惯常的精确演绎着他的思想推论。

他们每天的谈话主题涉及物理、数学、哲学和政治，在所有这些领域中，这位逻辑学家更多是用他的新奇、深刻、天真和完全不着边际让爱因斯坦感到惊讶。1944年到1947年担任爱因斯坦助手，恩斯特·施特劳斯曾这样评价，他所想的一切都受一个“有趣的公理”支配。^[3]对每个事实，对于为什么事实是事实；为什么它必须成为事实，都存在一个解释。总结一下这个信念，就是世界上没有没理由的偶然性，没有不需要被假设的假设。恼羞成怒的父母会对倔强的孩子说：“为什么？我告诉你为什么，因为那是我说的！”这个世界却永远也不会用这种方式对我们说话，一次也不会。这个世界对它自己总有一个解释，或者就像爱因斯坦的同伴所表述的，*Die Welt ist vernünftig*，世界是可理解的。这个论断

① 根据研究院数学院的官方纪录，对于研究院越出纯粹理论工作王国的这第一次冒险，即使是那些十分尊重研究者本人的成员也批评这是“错位”。在冯·诺依曼去世后，这台计算机被悄悄地转交给了普林斯顿大学。

② 许多当事人记述当他进入一个讲座或讨论班房间时就会出现“敬畏的静默”（同上，借用杜卡斯的话）。普林斯顿的哲学家贝纳塞拉夫在爱因斯坦时期曾是普林斯顿的研究生，他告诉我爱因斯坦有常常去参加每周一次的星期五哲学讨论班，很少发言，但他只要出席就能让人感觉到。

与通常想法截然不同，它表现在“有趣的公理”的严格一致应用之中，也散布到这位逻辑学家头脑里的方方面面——从身体与灵魂的关系到全球政治再到高等研究院本身的政治。不过，这种与通常想法的分歧对他来说算不了什么。这就像他头脑里的一条不成文法则：如果理性与常识相违背，那么……常识就不妙了！从长远的角度看，什么是常识，不就是庸常吗？

不管是在他自己的年代还是现在，这个年轻人都不怎么为人所知。虽然他的研究成果以其特有的方式，同爱因斯坦的一样具有革命性，是上个世纪少数最为重要和严格的发现之一，这些发现的重要影响远远超出它们各自的领域，已经渗入到我们最基本的观念中。至少在数学领域，20 世纪的前三分之一可以说是观念革命此起彼伏。在深深搅动了“精确科学”根基的理论大变革中，这个人的定理与海森伯的不确定原理（测不准原理）、爱因斯坦的相对论三足鼎立。三者仿佛把我们带入了一个陌生的世界，它们与我们以前的想法和直觉是如此不同，以至于近一个世纪后，我们仍在试图搞清楚我们究竟到了哪里。

这个人和他的研究成果是如此远离尘世，使他永远也得不到他在普林斯顿的同路伙伴所具有的那种声望，或不确定原理提出者那样的名气，后者在历史的此刻很可能是在为纳粹德国研制原子弹。爱因斯坦的同路伙伴是一位隐身的革命者。他是你很可能从没有听说过的最著名的数学家。如果你听说过他，也很有可能是把他与这样一类想法联系起来（虽然这不是你的错），认为他对理性、客观性和真理的事业具有颠覆性的敌意，不仅激烈地反对，还在数学上进行了结论性的质疑。

他就是库尔特·哥德尔，1930 年，在他 23 岁时，证明



逻辑学家和物理学家在每天往返普林斯顿高等研究院的路上，发现了数理逻辑中称为不完备性定理的某种东西，让世界为之震撼——其实是两个在逻辑上相关的不完备性定理。

与大多数数学结果不同的是，哥德尔的不完备性定理并不是用符号或数字公式表述。虽然证明的细节艰深而富有技巧性，让人高兴地是证明的整体策略却不难。在所有让人眼花缭乱的公式结束后，两个结论可以用多少比较浅白的语言表述出来。《哲学百科全书》中“哥德尔定理”一文以对这两个定理清晰的阐释开始：^[4]

哥德尔定理通常意指以下陈述：

任何足以包含初等数论的形式系统中都存在不可判定的命题——即，命题既不能被证实也不能被证伪。（这个陈述有时候也被称为哥德尔第一定理。）

这个定理的一个推论是任何足以包含初等数论的形式系统的一致性不能在这个系统内部被证明。（这个推论就是哥德尔定理；有时候也被称为哥德尔第二定理。）

这稍微有些含糊的陈述是哥德尔 1931 年在维也纳发表的结果的简要阐释。（“Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme I.” 1930 年 11 月 17 日收到稿件。）

虽然这些简单的陈述并不显山露水，不完备性定理却因它们所说的内容之多而很不寻常（也有其他原因）。它们属于被称为形式逻辑或数理逻辑的数学分支，在哥德尔的成果出现之前，这个领域曾被怀疑是不是属于数学^①；现在它们所涵盖的远远超出了狭隘的形式领域，还研究真理、知识以及确定性的本质等这些大而棘手的问题。因为我们人的本质与对这些问题的讨论密切关联——毕竟，谈论知识就是在隐含地谈论认知的人——哥德尔定理似乎也对我们的思维所能是的——以及所不能是的——有重要的东西要讲。

一些思想家已经在哥德尔定理中看到了后现代磨坊的优质谷粒，将绝对主义者过时的关于真理和确定性、客观性和理性的思维方式彻底磨碎。一位作者用生动的末世笔调表达

^① 在哥德尔出场之前，逻辑学家更多是哲学系的成员。普林斯顿大学数学系的逻辑学家科琴向我这样评价道：“哥德尔将逻辑放到了数学的版图上。现在每个著名的数学系都有研究逻辑的教员。也许只有一两个，但多少肯定会有一些。”（2002 年 5 月）

了这种后现代情感：“对于数学，他（哥德尔）是魔鬼。哥德尔之后，数学不再仅仅是上帝的语言，也是我们能够破解，用来理解宇宙和一切事物的语言——它不再那么有效。这是我们所处的伟大后现代不确定性的一部分。”^[5]即便是我们思维的形式系统也不可避免地不完备，这表明不存在所有系统都可以依赖的不变基础。所有真理——即便看似确凿无疑，不存在一点修正可能的那些——本质上都是人构造的。事实上客观真实的绝对观念是社会虚构的神话。我们的认知思维并没有嵌在真理中，相反，真理的整个观念都嵌在我们的思维中，思维不自觉地服从于有组织的影响。认识论无非就是影响力社会学。这或多或少就是后现代版的哥德尔。

对于人类思维的本质，另一些思想家则认为，哥德尔定理指向的是完全不同的方向。比如，彭罗斯在他的两本畅销书《皇帝新脑》和《心智之影》中认为，我们的思维，不管是什么，不可能是数字计算机，不完备性定理在他的论证中具有核心地位。他争论道，哥德尔定理所证明的是，即使我们在进行最为理论、最受限于规则的思考——也就是数学——我们也是在进行真正的发现过程，不可能被还原为可编入计算机的机械程序。注意彭罗斯的论点与前面那段后现代解读截然相反，他认为哥德尔的结果没有削弱我们的数学知识。哥德尔定理并不是表明人类思维的局限，而是表明人类思维的计算模型的局限（基本上这些模型都是将所有思维还原为规则依循）。它们并没有让我们陷入后现代不确定性的困境，而是否定了一种特定的思维还原论。

因此，哥德尔定理就好像是珍稀动物中的珍稀动物：是数学真理同时却又——虽然含糊不清而且富有争议——涉及人性的中心问题：是什么让我们之所以成之为人？它们是数学史上最引起话题的定理。虽然对于它们具体说了多少以及

它们说的是什么还没有达成共识，却都同意它们说得极多，它们说的超出了数学，无疑进入了元数学，甚至更远。事实上，定理的元数学本质与《哲学百科全书》用（多少比较）浅白的语言陈述的那些事实紧密相关。“形式系统”、“不可判定”以及“一致性”的概念可能有点半专业，需要解释一下（读者不用担心这些对定理的简要陈述会导致理解困难）；不过它们是元数学概念，对它们的解释（迟早会来的）不是用数学语言。哥德尔的定理是试图逃出纯数学的数学定理，它们是从数学内同时也是从数学外来陈述的，这是它们独特魅力的另一面。另一本很受欢迎的书，侯世达的普利策获奖图书《哥德尔、艾舍尔、巴赫》抓住了这一面。

元数学的前缀元（*meta*）来自希腊语，意思是“之后”、“超出”，意指从外面来观察。针对一个认知领域的元观察是问这样的问题：这个领域的知识是怎么可能如它所是的？数学，正由于它的自成一格——最严格的学科——用演绎方法建立常常让人惊愕、却又无可置疑的结果，一直有力地向知识学者（即“认识论学者”）提出元问题，特别是它是怎么可能如它所是的这个问题。数学对其认知者来说有如天赐的神一般的绝对可靠性，被视为应被效仿的典范：如果在那里我们能做到，就让我们处处都做到^①。这种确定性同时也是引人入胜的谜题：我们如何能做到这一点的，不管是在那里还是任何地方？像我们这样由进化蒙着眼睛晃荡出来的，怎么

^① 这种乌托邦式的认识论是17世纪理性主义者的特点——笛卡儿（1596~1650）、斯宾诺莎（1632~1677）和莱布尼茨（1646~1716）。尤其是，斯宾诺莎和莱布尼茨相信有可能借用数学的标准和方法，将其推广到可以回答我们提出的所有问题：科学、道德、甚至神学。这样，一旦出现了导致长时间而血腥的战争的这类神学分歧，理性的人就可以回应道：“来吧，让我们演绎推理一下。”