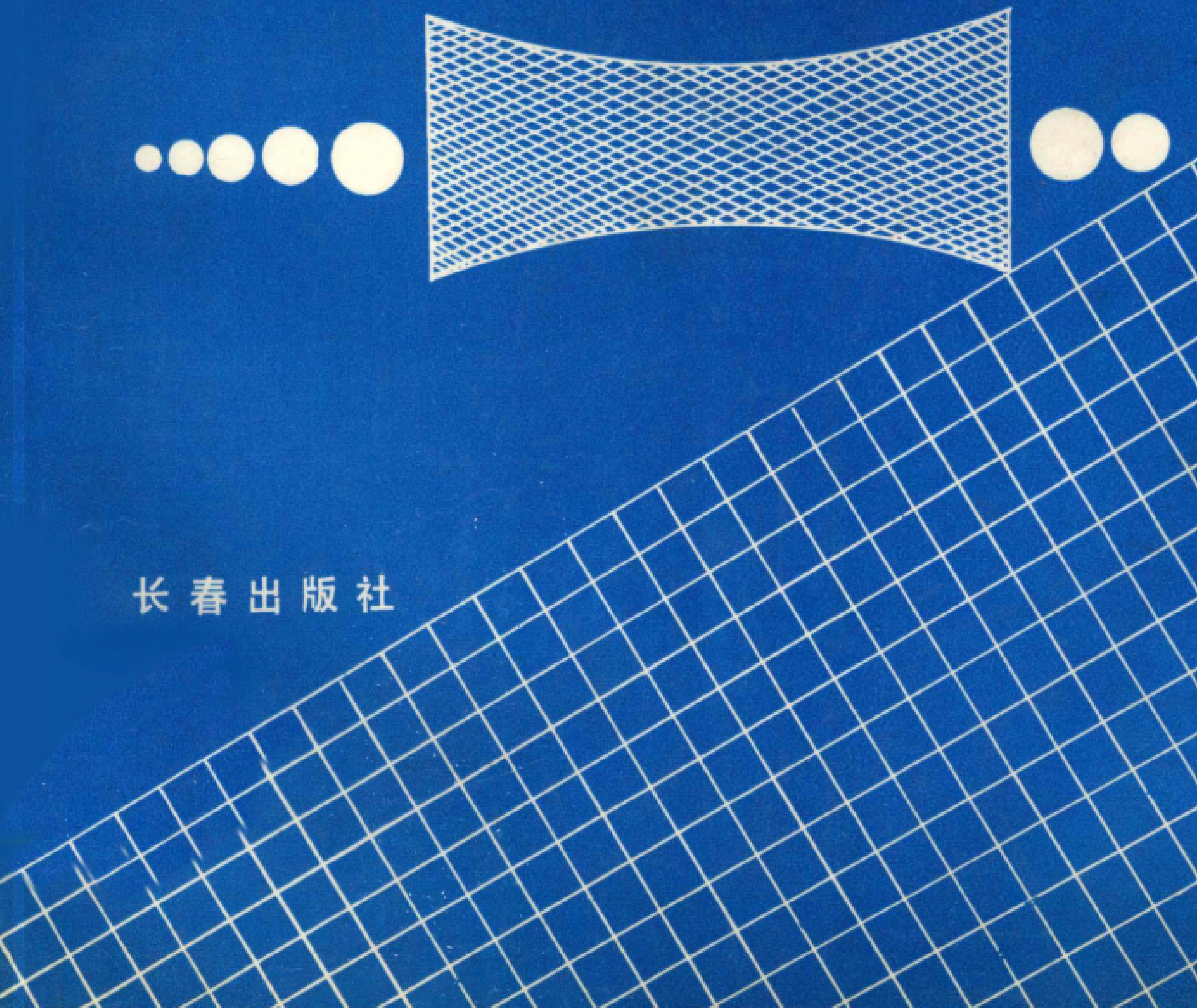
信息光学基础理论及其应用

FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATION OF INFORMATION OPTICS

韩昌元 编著



长春出版社

责任编辑　董辅文
　　　　　张　樱
封面设计　王爱忠

ISBN 7－80573－100－4
G·24　定价：6.50元

FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATION OF INFORMATION OPTICS

信息光学基础理论及其应用

韩昌元　　编著

长 春 出 版 社

内容简介

本书原系中国科学院长春光机所研究生部硕士研究生的教材，现经修订与充实予以出版。书中主要介绍了与信息光学有关的一些基础理论及其在各方面的应用。内容包括：麦克斯威方程、惠更斯菲涅耳原理、付里叶变换、成像理论、光学传递函数、全息摄影、层析照相、光学计算等等，此外还包括它们的应用前景。

本书可供高等院校光学专业教师、研究生以及高年级学生参考，此外也可供从事图像信息处理的广大科技人员阅读参考。

信息光学基础理论及其应用

韩昌元　编著

责任编辑：董辅文　张　樱　　封面设计：王翠忠

长春出版社出版　　长春出版社发行

（长春市重庆路40号）　　吉林工业大学印刷厂印刷

开本　787×1092　1/16　　1989年12月第1版
印张　13.625　　1989年12月第1次印刷
字数　312 000　　印数　1——1 000册

ISBN 7－80573-100－4/G·24　　定价：6.50元

序

信息光学是现代应用光学的一个重要分支，也是信息科学的一个重要组成部分。它在现代通讯、遥感技术、机器人视觉、生物医学、微电子以及军事工程等诸多领域中，都有广泛的应用与前景。研究信息光学的目的是使光学的功能突破传统图像的形式，经过某种物理或数学处理的过程，可获得良好的观察效果。它可以使由于某种原因而导致模糊的图像变得清晰，以至于易于观察事物的动态变化等等。

本世纪五十年代“付里叶光学”的出现，为现代光学信息处理开辟了道路。六十年代激光的问世，使全息技术得到戏剧性的发展，它不但是成像技术的一次革命，而且对信息科学在概念上导致重要启示。电子技术及通讯技术的发展，由于信息理论上的进步，引用到光学上来，丰富了信息光学。反之，光学理论应用到电子技术与通讯技术中，又推动着后者的发展。电子计算机的推广应用，各种光电器件的出现，大大增强了光学信息实际应用的自由度和功能。光电相互为用，已成为信息科学的主流，不少内容是光电融为一体。

当前信息光学的前沿课题有如：(1) 图像特征信息的提取，在大量图像信息中选择所需要的信息，排除冗余的信息，以便于信息传输和识别；(2) 利用光学或光电手段，实现应用条件下的图像识别；(3) 图像的智能化处理，例如对图像信息的相关（翻译）、联想以及综合处理等；(4) 图像处理的实时化；(5) 多维并联的光学或光电计算机；(6) 光学信息仿生学，研究动物和人的视觉及神经网络系统等等。这都说明信息光学的发展正处于方兴未艾阶段。

本书作者韩昌元同志，自七十年代在中国科学院长春光机所工作起，就对信息光学产生了兴趣。1981 年他有机会从师于日本著名光学家村田和美教授（北海道大学），专门攻读信息光学的基础理论。在日本学习期间，他撰写了多篇论文，有的在美国“Applied Optics”杂志上发表，有的在国际会议上交流。回国后，他不辞辛苦地整理和归纳有关文献，对有的数学公式还进行了推导验证。在构成本学科知识体系的基础上撰写了《信息光学基础理论及其应用》这本书，并为光学专业研究生授课。他又根据教学经验进行了修改，达到出版的要求。

现在国内类似的书已有几部出版，但各个作者依据自己的实践经验，写出心得，是会起到交流和引导后继者继往开来作用的。为此，在本书出版之际，仅致以美好的祝愿，并希望读者从中有所受益。

王大珩 1989 年 12 月 3 日

作者自序

人类自诞生那天起，就与信息结下了不解之缘。当今的社会，已步入信息时代。信息光学是信息社会的一个重要支柱，它以付里叶成像理论、全息摄影、光学信息处理以及光学计算等为基础，研究光做为信息载体，用以获取与传递信息、处理与存储数据等领域。它是光学中的前沿学科，是信息科学的一个重要组成部分，也是现代光学的一个核心。

本书原系长春光机所研究生部光学与光电子技术专业硕士研究生的一部教材，在此基础上又作了一些修订，长春出版社予以出版。

本书可供光学专业高年级学生、研究生与教师参考，也可供已掌握高等院校普通物理从事信息处理的科技人員自学参考。

本书共分 9 章，其中第 1 章专门论述了光作为电磁波满足的基本方程——麦克斯威方程，用该方程可导出光在各向同性均匀介质中的传播方程即波动方程，从而可得出光波空间函数的表达式。第 2 章是标量衍射理论，详细推导光在衍射与成像中普遍遵循的规律——惠更斯菲涅耳原理。第 3 章系统地论证了付里叶变换、卷积以及相关等运算的基本性质，详细讨论了取样定理、线性系统和空间不变系统的基本概念。第 4 章，从惠更斯菲涅耳原理出发，论述了菲涅耳衍射区与夫琅和费衍射区的近似条件与相应的计算公式。第 5 章研究了透镜的付里叶变换性质，并指出了付里叶变换透镜应满足的条件。第 6 章系统论述了相干和非相干光学系统的成像过程，并以光学传递函数描述成像光学系统的特性。第 7 章讨论了部分相干照明的光学系统成像理论。第 8 章论述了全息摄影的基本原理及其光学模拟运算的基本途径。

从第 1 章到第 8 章，论述的都是信息光学的基础理论。而第 9 章主要介绍了信息光学的应用前景。也就是说，如何把前 8 章的基础理论应用到实际工作中，以解决一些重大问题。

从光衍射的惠更斯——菲涅耳原理可知，光学系统的成像过程就是二次付里叶变换的过程，它是光学信息处理的基本着眼点。用付里叶分析的观点，可以把任何二维图像看成各种空间频率的正弦光栅迭加的结果。同时，又可把光学系统成像特性归结为对不同空间频率正弦光栅的成像特性，即光学系统的空间频率响应。因为图像和它的付里叶变换频谱有着对应的关系，我们研究一个图像既可以在像面上进行，也可以在它的谱面上进行，只要搞清楚其中的一个，就等于搞清楚了另一个。所以处理与分析一个图像，可以在像面上进行，也可以在谱面上进行。这种观点的形成，可以追溯到 1873 年 ABBE 的显微镜成像理论和 1935 年 ZERNIKE 相衬显微镜的成像理论。1955 年 H. H. HOPKINS 的光学传递函数理论完整地总结了付里叶成像理论。

记录和再现光波振幅与位相信息的全息照相是 1948 年由 D. GABOR 发明的。1960 年激光问世之后，1962 年 E. N. LEITH 与 J. UPATNIEKS 的离轴激光全息摄影的实现以及 1963 年 A.. VANDER LUGT 的复空间滤波概念的建立，使光学信息处理技术进入了一个广泛应用阶段。

层析照相可以用一维接收器阵列，再通过投影方式再现，便可获得二维断层的图像信息．它是依靠 RADON 变换来实现的。1971 年英国 EMI 公司用计算机层析照相扫描仪

(即 CT)，获得了高质量的X射线断层照片，给医学诊断带来了革命性的变革。

七十年代末由于光学双稳器件的研究成功，使数字式光学计算机的研究成为八十年代信息光学研究的热门课题。

通过本书，读者可以比较系统地掌握信息光学的基础理论，并能较全面地了解信息光学在各个领域中的应用前景。

本书在出版之际，我由衷地感激我国光学科研的开创者、老前辈、中国科学院学部委员、技术科学部主任、中国光学学会理事长、中国科学院长春光机所名誉所长王大珩教授多年对我的培养，并在百忙中为本书撰写了序言，我还要感谢指导我的日本信息光学专家北海道大学村田和美教授。此外，还要感激为本书编辑出版付出辛勤劳动的王豪夫同志以及长春出版社的同志。

《信息光学基础理论及其应用》一书，如能对读者有所帮助，则是作者的莫大欣慰。

韩昌元　　　　1989 年 12 月

于 中国科学院长春光学精密机械研究所

目　　录

第一章 场 论 基 础

光波是电磁波，它满足电磁波的基本方程——麦克斯威方程，从麦克斯威方程导出光在各向同性均匀介质中的传播方程即波动方程，求解波动方程得到光波的空间函数表示式。

第一节 麦克斯威方程组

先讲麦克斯威方程中用到的几个描写场的物理量。

1. 梯度

设 $\Phi(x,y,z)$ 为标量场的函数，梯度定义为

$$grad\Phi(\vec{r})=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

梯度是向量。

2. 散度

设 $\vec{A}(x,y,z)$ 为向量场的函数，散度定义为

$$div\ \vec{A}=\lim_{\substack{\tau\to 0\\(M)\to M}}\frac{\oiint\vec{A}\cdot d\vec{s}}{\tau}$$

表示向量场 $\vec{A}$ 在 M 点的散度，$\oiint$ 表示封闭积分，散度是标量。

3. 旋度

设 $\vec{A}(x,y,z)$ 为向量场的函数，旋度定义为

$$rot\vec{A}=\lim_{s\to 0}\frac{\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}}{S}$$

旋度是向量，它的方向按“右手法则”取。

4. 线性微分算符 ∇

$$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$grad\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}=\nabla\Phi$$

$$div\vec{A}=\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$$

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$$

若 $\vec{A}=\nabla\Phi$

$$\text{则} \quad \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

麦克斯威方程组

1. 积分形式：

（1）

$$\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = 4\pi \iiint_v \rho dv$$

其中，$\vec{D}$ 为电位移向量，ρ 为电荷密度，这个方程描写电通量和电荷的关系。电位移向量 $\vec{D}$ 和电场强度的关系为

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

其中 ε 为介电常数。

（2）

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \oiint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

其中，$\vec{E}$ 为电场强度，$\vec{B}$ 为磁感应强度，这个方程描写感应电场（左手定理）和磁场变化的关系。

（3）

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \oiint_s (\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

其中，$\vec{H}$ 为磁场强度，$\vec{j}$ 为电流密度，$\vec{B} = \mu \vec{H}$，μ 为导磁系数。这个方程描写感应磁场（右手定理）和稳定电流以及电场变化的关系。介质的折射率 n 满足关系

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{c}{v}$$

其中，c 为光在真空中的速度，υ 为光在介质中的速度。

（4）

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

这个方程表示磁荷不存在定理。

2. 微分形式：

（1）

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho / \varepsilon$$

(2)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(3)

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(4)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

下面导出电磁波在不导电、不存在自由电荷的各向同性均匀介质中的传播方程。

在麦克斯威方程中，设

$$\rho = 0, \qquad \vec{j} = 0$$

则麦克斯威方程化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

再利用状态方程

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (1-1) \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (1-2) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1-3) \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 & (1-4) \end{cases}$$

对(1－2)式取时间微分，对(1－3)式取旋度，消去 $\vec{H}$ 得 $\vec{E}$ 的方程。

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (1-2')$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{E}$$

$$= -\frac{\mu}{c}\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1\text{—}3')$$

$$\because \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\therefore \quad (\nabla \cdot \nabla)\vec{E} = \nabla^2\vec{E} = \frac{\mu}{c}\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1\text{—}3')$$

把(1—2′)代到(1—3′)式

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\mu}{c} \cdot \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

其中，$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$。

类似地还可以得

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

这叫波动方程。可展开写成如下形式

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

电场强度 $\vec{E}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 是同时存在的，相互垂直。如果我们考虑 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的分量 E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z 时，这个分量看成是标量，则这些分量(标量)也满足波动方程式，即

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

在光学问题的干涉，衍射，成像的处理中，我们把光波用标量波讨论。

第二节　波动方程的解

一、一维波动方程的解

考虑沿 z 轴方向传播的波，它满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其解之一为

$$u(z,t) = f(t - \frac{z}{v})$$

因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}f''$

同理 $u(z,t) = g(t + \frac{z}{v})$

也是波动方程的解。因此一般解为

$$u(z,t) = f(t - \frac{z}{v}) + g(t + \frac{z}{v})$$

其中第一项为“进行波”，第二项为“后退波”。

例如，平面波

$$f(t - \frac{z}{v}) = a\cos[\omega(t - \frac{z}{v}) + \Phi]$$

$$g(t + \frac{z}{v}) = a\cos[\omega(t + \frac{z}{v}) + \Phi]$$

满足波动方程。其中，ω 为角频率，$\omega = 2\pi\gamma$，γ 为频率，Φ 为初位相。若 λ 为波长，则

$$v = \lambda\gamma$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

叫波数。

利用这个关系表示平面波

$$u(z,t) = f(t - \frac{z}{v}) = a\cos(\omega t - kz + \Phi)$$

$$u(z,t) = f(t + \frac{z}{v}) = a\cos(\omega t + kz + \Phi)$$

其中，a 为平面波的振幅，z 为光程，Φ 为初位相。它们都满足波动方程。

二、三维波动方程的解

三维波动方程表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

分别平面波和球面波情况求解。

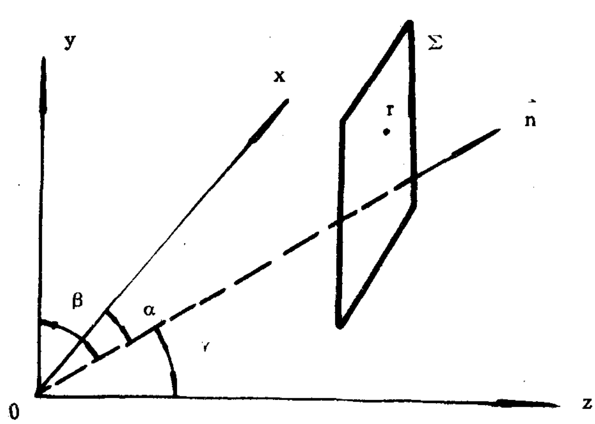


图 1—1　平　面　波　表　示

(一)平面波情况

用$\sum$表示等位面，即波面，其法线方向矢量用$\vec{n}$表示，

$$\vec{n}(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

其中α,β,γ是法线和x,y,z直角坐标的夹角。如图所示

等位相面$\sum$上的一点r点的矢量为

$$\vec{r}(x,y,z)$$

则光程为

$$\vec{r}\cdot\vec{n}$$

这个量相当于一维情况的z量。故波面方程的解可表示为

$$u(x,y,z,t)=u(\vec{r}.t)=f(t-\frac{\vec{r}.\vec{n}}{v})$$

$$=f(t-\frac{xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma}{v})$$

代到波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{cos\alpha}{v})^2 f''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\frac{cos\beta}{v})^2 f''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(\frac{cos\gamma}{v})^2 f''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f''$$

因为 $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$

故成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}f''$$

这就证明了满足波动方程。同理后退波

$$u(x,y,z,t)=g(t+\frac{xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma}{v})$$

也满足波动方程。

例如正弦波进行波

$$u(x,y,z,t)=acos\{\omega(t-\frac{xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma}{v})+\Phi\}$$

$$=acos\{\omega t-k(xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma)+\Phi\}$$

和正弦波后退波

$$u(x,y,z,t)=acos\{\omega t+k(xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma)+\Phi\}$$

都满足波动方程。

(二)球面波情况

设点光源在坐标原点处，如下图，

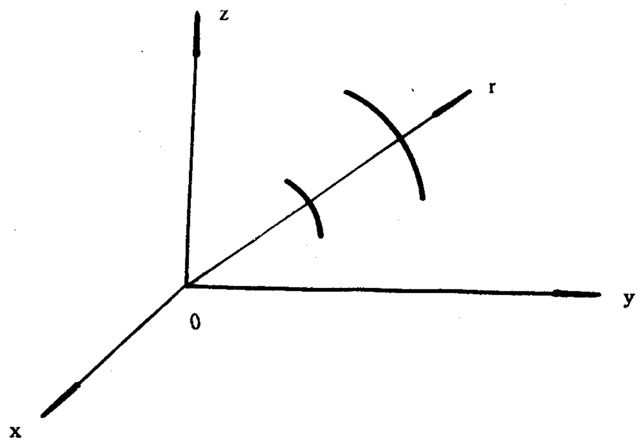


图 1—2 球 面 波

则

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u(x,y,z,t)=u(r,t)$$

表示电磁波分量。这时由于

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.2x=x(\frac{1}{r})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot x(\frac{1}{r})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot x(\frac{1}{r})+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot(\frac{1}{r}-x\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x})\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot x(\frac{1}{r})\cdot x(\frac{1}{r})+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot x\frac{1}{r^2}\cdot x\frac{1}{r}\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{z^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{3}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{r^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$=\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$$

波动方程式变成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}$$

根据一维波动方程的解,可知有如下关系成立:

$$ru=f(t-\frac{r}{v})$$

$$ru=g(t+\frac{r}{v})$$

故

$$u=\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{v})$$

$$u=\frac{1}{r}g(t+\frac{r}{v})$$

满足波动方程。这是球面波,其中 r 就是光程,振幅和 r 成反比。

类似于平面波,球面波表示成

$$u(r,t)=\frac{a}{r}cos\{\omega t-kr+\Phi\}$$

叫进行波或发散波。

$$u(r,t)=\frac{a}{r}cos\{\omega t+kr+\Phi\}$$

叫后退波或会聚波。

(三)光波的复数表示

在光学问题的处理中,要对光波进行加、减、乘、除、微分、积分等运算,这时用指数形式比用余弦形式方便。因此利用

$$e^{j\theta}=cos\theta+jsin\theta$$

关系表示平面波和球面波。

$$u(x,y,z,t)=Re[aexp\{j[\omega t-k(xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma)+\Phi]\}]$$

其中,Re[]表示实数部分。如果我们记住这一点,可以先省略 Re[]符号,最后处理结果取实数部分即可。这样光波通常表示成指数形式。

如平面波表示为

$$u(x,y,z,t)$$