

软计算方法

理论及应用

邓方安 周 涛 徐 扬 编著



Theory and Application of
Soft Computing
Method



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统地介绍了现代软计算方法的基本内容,力图概括国内外的最新研究成果,主要内容有模糊数学、粗糙集理论、神经网络和遗传算法的基本概念与计算方法。

本书可作为计算机科学、应用数学、信息科学和管理工程等专业的高年级学生及研究生的教材或教学参考书,也可供对现代软计算理论与方法有兴趣的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

软计算方法理论及应用/邓方安,周涛,徐扬编著. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021274-0

I. 软… II. ①邓… ②周… ③徐… III. 计算方法—计算理论
IV. G301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 030551 号

责任编辑:陈 迅 / 责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏立印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 3 月第一次印刷 印张: 12 3/4

印数: 1—3 000 字数: 244 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

销售部电话: 010-62136131 编辑部电话: 010-62137026(BI08)

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

伴随 20 世纪“数学：确定性的终结”，诞生了后来称之为“软计算”的新兴学科。自 20 世纪 60 年代中期模糊逻辑(FL)出现后，神经网络(NN)、遗传算法(GA)和概率推理(PR)相继问世，构成软计算方法群的核心部分。后来纳入其中的有置信网络(BN)、混沌理论(CT)、粗糙集(RS)、部分地还包括学习理论(LT)等。上述方法皆以语言表达代替数的表达，旨在通过不精确性和不确定性计算来解决常规(硬)计算难以处理的复杂问题，故亦名“计算智能”或“不确定性计算”。

传统计算的主要特征是严格、确定和精确。“软计算”是指对研究对象只求近似而非精确解释的有效计算方法，但是它并不适合处理现实生活中的许多问题，例如汽车驾驶。“软计算”通过对不确定、不精确及不完全真值的容错来取得低代价的解决方案和鲁棒性。它模拟自然界中智能系统的生化过程(人的感知、脑结构、进化和免疫等)来有效地处理日常工作。1991 年，Loft A Zadeh 教授指出人工神经网络、模糊逻辑及遗传算法与传统计算模式的区别，将它们命名为软计算。

“软计算”是正在发展起来的一种新的计算方法，它与人脑相对应，具有在不确定及不精确环境中进行推理和学习的卓越能力。软计算由若干种计算方法构成，除上面提到的神经网络、模糊集合理论、遗传算法外，近年文献中将近似推理、模拟退火算法、概率推理(probabilistic reasoning)等都归入软计算。

纵观软计算方法包含的几个主要内容，它的工作特性可归纳为几点：①处理不确定性问题：由于现实世界中随机性、模糊性和不确定性的大量存在直接挑战人们传统的一些认识和处理问题的方法，所以后来的模糊逻辑和粗糙集就是专门用来描述模糊性和不确定性的数学理论；②受感于生物的计算模型：受生物神经元网络的鼓励，软计算中大量使用人工神经网络来处理有关感知、模式识别、非现性回归与分类的问题；③处理问题的灵活性：软计算中应用了来源于不同思想领域的新颖的最优化方法，包括遗传算法、蚁群算法、模拟退火、随机搜索等，这些优

化方法不需要目标函数的梯度向量,因此在解决复杂优化问题时有更大的灵活性;④容错性:神经网络和模糊推理系统都有很好的容错性,从神经网络中删除一个神经元,或从模糊推理系统中去掉一条规则,并不会破坏整个系统.基于这些优势,与传统的硬计算相比而言,软计算方法不失为一种创建解决复杂问题的新颖方法.

一般来说,软计算不进行很多的符号运算,这对于传统人工智能来讲,可谓一大福音.此外,Zadeh曾多次强调:“软计算的成员间在问题求解中是互为补充而非竞争.为此,通常将其联合使用,这将导致混合智能系统的形成”.事实上,由于软计算成员鲜明的特色和迥异的侧重点,使得这种“混合”既可行也必要,软计算的成员间的混合以及软计算方法与其他方法的混合在复杂问题求解层面上极具重要的研发意义.

在本书的编写过程中,我们特别注意到非数学专业本科生,尤其是工科的学生已有的数学基础知识(如高等数学、线性代数、概率论与数理统计)与本书内容的链接.因此,将读者对象选定为非数学专业的本科生及从事这方面研究的工程技术人员.此外,在编写的过程中,我们也体会到把一个相对理论性较强的东西既要考虑通俗性,让大多数读者能够很快上手,又要注意到科学知识内在的严谨性这是一件比较困难的事情.为了做到这一点,我们在书中通过一定量的例子来表达一些抽象、难懂的事例,尽管这样,我们仍然有做的不尽如人意的地方,关于这点,请读者能够体谅.

本书共分四篇,第一篇主要介绍模糊数学,包括模糊集合、模糊关系、模糊综合评判和不确定性推理;第二篇主要介绍粗糙集,包括粗糙集的基础知识,粗糙集与数学形态学和基于粗糙集的知识发现;第三篇主要介绍神经网络,包括人工神经网络概述、人工神经网络的基本模型、Hopfield网以及作者自己提出的时态粗糙神经网络;第四篇中主要介绍遗传算法,包括遗传算法基本概述、遗传算法的基本问题、遗传算法的基本理论以及利用作者改进的遗传算法求解TSP问题.

由于作者水平有限,疏漏之处在所难免,恳请各位读者批评指正.

作 者

2007年11月

目 录

前言

第一篇 模糊数学及其应用

第一章 模糊集合	3
1.1 模糊性与随机性	3
1.1.1 模糊概念	3
1.1.2 模糊性与随机性	3
1.2 模糊集及其运算	4
1.2.1 模糊子集定义	4
1.2.2 模糊子集的表示	4
1.2.3 模糊子集间的运算	5
1.3 模糊集的截集及几个重要的凸模糊子集	7
1.3.1 α -截集	7
1.3.2 几种重要的模糊子集	8
1.4 分解定理与扩张原理	8
1.5 模糊数及其运算	10
1.5.1 常用的模糊数	10
1.5.2 模糊数的算术运算	11
1.6 建立隶属函数的方法	13
1.6.1 模糊统计法	14
1.6.2 构造隶属函数方法	15
1.6.3 二元对比排序	18
第二章 模糊关系	20
2.1 模糊向量	20
2.2 模糊关系	21
2.2.1 模糊关系	21
2.2.2 模糊关系的运算性质	22
2.2.3 模糊矩阵的截矩阵	23
2.2.4 模糊关系的转置	23
2.2.5 模糊关系的合成	23

2.3 模糊等价关系·····	24
2.3.1 模糊等价关系·····	24
2.3.2 模糊等价关系与聚类图·····	25
2.3.3 传递闭包·····	27
2.4 模糊合成规则·····	28
2.4.1 合成推理规则·····	28
2.4.2 模糊蕴涵算子与模糊关系合成算子·····	29
2.4.3 模糊条件推理的原则·····	30
2.4.4 模糊三段论·····	32
2.4.5 模糊推理方法的比较·····	32
第三章 模糊综合评判 ·····	35
3.1 距离度量法·····	35
3.1.1 海明距离·····	35
3.1.2 加权海明距离·····	36
3.1.3 欧氏距离·····	36
3.1.4 闵科夫斯基距离·····	36
3.2 贴近度·····	37
内外积法·····	37
3.3 模糊综合评判·····	39
3.3.1 模糊综合评判模型·····	40
3.3.2 实例·····	41
第四章 不确定性推理方法简介 ·····	46
4.1 概率推理·····	46
4.1.1 Bayes 公式及主观 Bayes 方法·····	46
4.1.2 证据的不确定性描述·····	47
4.1.3 基于主观 Bayes 方法的不确定性推理·····	47
4.1.4 结论不确定性的合成算法·····	49
4.2 贝叶斯网络·····	50
4.3 模糊逻辑推理与可能性理论·····	51
4.3.1 模糊逻辑推理·····	51
4.3.2 模糊推理·····	52
4.3.3 可能性理论·····	52
参考文献 ·····	54

第二篇 粗糙集及其应用

第五章 粗糙集的基本理论	57
5.1 粗糙集理论的发展概况	57
5.1.1 粗糙集概念提出的背景	57
5.1.2 粗糙集理论及应用的研究现状	58
5.1.3 粗糙集与其他软计算方法相结合的应用前景广阔	59
5.2 粗糙集理论的基本概念	60
5.2.1 信息集	60
5.2.2 粗糙集	61
5.2.3 属性约简和属性值约简	62
5.2.4 属性依赖	62
5.2.5 属性约简	63
5.2.6 属性值约简	64
5.3 知识的概念	64
5.3.1 知识的分类精度	66
5.3.2 知识约简、核及知识的依赖性	66
5.3.3 相对约简与相对核	67
5.4 知识的表达系统	68
5.4.1 决策表	68
5.4.2 决策规则	69
5.4.3 决策表的约简	69
5.4.4 相对于等价类的属性重要性	70
5.4.5 极小规则和极大规则	71
5.4.6 连续属性离散化	72
5.5 基于粗糙集的故障诊断方法	73
5.5.1 基于粗糙集的系统故障诊断基本原理	74
5.5.2 基于粗糙集电力变压器故障诊断	74
第六章 粗糙集与数学形态学	78
6.1 形态学运算	79
6.1.1 基本概念	79
6.1.2 基本运算	80
6.2 基本数学形态学的灰度图像处理	89
第七章 基于粗糙集的知识发现过程研究	91
7.1 广义分布式表和粗糙集系统	91

7.1.1 规则的强度	91
7.1.2 最优规则集的搜索算法	92
7.2 启发式粗糙集方法	94
参考文献	96

第三篇 人工神经网络

第八章 概述	99
8.1 人工神经网络的定义	99
8.2 人脑处理信息的机制	99
8.3 ANN 的发展历史	102
8.4 人工神经网络的研究与应用	105
8.5 人工神经网络的信息处理能力	106
8.5.1 神经网络信息存贮能力	106
8.5.2 神经网络的计算能力	106
8.6 人工神经网络理论研究重大成果	109
第九章 人工神经网络基本模型	110
9.1 M-P 模型	110
9.1.1 M-P 模型	110
9.1.2 常用的激励函数	111
9.1.3 ANN 的分类	111
9.1.4 ANN 的学习方式	112
9.2 感知器模型	113
9.2.1 简单感知器	113
9.2.2 单层感知机	114
9.3 多层前向神经网络	116
9.3.1 多层前向神经网络	116
9.3.2 多层前向神经网络的 BP 算法	117
第十章 Hopfield 网	120
10.1 Hopfield 网的分类	121
10.1.1 离散型 Hopfield 网络	121
10.1.2 连续 Hopfield 网络	122
10.2 Hopfield 网的工作方式	123
10.2.1 串行(异步)方式	123
10.2.2 并行(同步)方式	124
10.3 Hopfield 网的稳定性	124

10.3.1 系统的稳定性	124
10.3.2 Hopfield 定理	124
10.3.3 Hopfield 网稳定性的理解	129
10.4 双向联想存储器	130
10.4.1 基本联想存储器	131
10.4.2 双向联想存储器	133
第十一章 时态粗糙神经网络	135
11.1 问题概述	135
11.2 时态粗糙神经网络	136
11.2.1 时态神经元	136
11.2.2 时态粗神经元	138
11.2.3 时态粗糙神经网络	139
参考文献	142

第四篇 遗传算法

第十二章 遗传算法概论	145
12.1 生物的进化与遗传	145
12.1.1 生物的进化	145
12.1.2 生物进化的特点	146
12.2 遗传算法的实例	146
12.3 遗传算法的基本概念	148
12.4 遗传算法的发展历程和特点	149
12.4.1 遗传算法的发展历程	149
12.4.2 遗传算法的特点	151
第十三章 遗传算法基本问题	153
13.1 遗传算法的基本流程	153
13.1.1 简单遗传算法的基本流程	153
13.1.2 SGA 的形式化描述	154
13.1.3 SGA 的形式化定义	154
13.1.4 SGA 的基本概念	154
13.2 遗传编码	155
13.2.1 二进制编码	157
13.2.2 大字符集编码	157
13.2.3 序列编码	157
13.2.4 实数编码	157
13.2.5 树编码	158

13.2.6	自适应编码	158
13.2.7	乱序编码	158
13.2.8	二倍体编码和显性规律	158
13.3	适应度函数	160
13.4	遗传算子	160
13.4.1	选择算子	161
13.4.2	交叉算子	163
13.4.3	变异算子	166
13.5	关键参数的讨论	167
13.5.1	染色体长度	167
13.5.2	编码方案	167
13.5.3	适应度函数的构造	167
13.5.4	群体规模 n	167
13.5.5	交叉概率 P_c	168
13.5.6	变异概率 P_m	168
13.5.7	终止循环的条件	168
13.6	约束条件的处理方法	168
13.7	遗传算法的性能评价	169
第十四章	遗传算法基本理论	170
14.1	模式定理	170
14.2	建筑模块假说	172
14.3	遗传算法的欺骗问题	173
14.3.1	从集合角度考察模式的空间表示	173
14.3.2	欺骗问题	174
14.3.3	模式的包含、竞争与关联	174
第十五章	利用改进遗传算法求解 TSP 问题	178
15.1	问题简述	178
15.2	遗传算子的改进	179
15.2.1	编码及适应度函数的构造	179
15.2.2	选择算子的改进策略与实现	180
15.2.3	交叉算子的改进与实现	180
15.2.4	Dmutation 变异算子及实现	183
15.2.5	试验结果的讨论	184
参考文献		186
附录	基于改进遗传算法求解 TSP 问题源程序	187

第一篇 模糊数学及其应用

现实世界是复杂的,世界的复杂性通常是因含糊不定而引起的.在一般人的印象中,数学应该是精确的.但模糊现象又是客观存在于人类思维、社会现象和自然现象中,为了描述、研究这类现象而产生了模糊数学.这里的“模糊”是客观事物的精确反映.1965年,扎德(Zadeh)发表了关于模糊集的开创性论文,引入了隶属度函数的概念,从而打破了确定性数学“非对则错”的局限性,用 $0,1$ 之间的数来描述中间过渡状态.扎德在建立模糊集合的基础上,首次运用数学的方法描述模糊现象,用模糊集作为定量化的手段.其后又提出了可能性理论,为进一步发展人工智能奠定了基础.在本篇中,第一章主要介绍了模糊集及其运算、模糊集的截集、凸模糊集、分解定理和扩张定理、模糊数及其运算以及隶属度函数的建立方法等;第二章主要介绍了模糊向量、模糊关系、模糊等价关系、模糊合成规则等;第三章主要介绍了距离评价、贴近度、模糊综合评价等;第四章主要介绍了概率推理、贝叶斯网络、模糊逻辑推理与可能性理论等.

第一章 模糊集合

1965年,美国加利福尼亚州立大学的计算机与控制论专家扎德教授提出了模糊集概念,创立了研究模糊性或不确定性问题的理论方法,迄今已成为一个较为完善的数学分支. 模糊数学是现代数学中的一个新理论. 它是研究和处理自然界与信息技术中广泛存在的模糊现象的数学,它为信息科学的发展提供了强有力的数学工具. 近50年来,模糊数学的理论和应用都取得了飞速的发展,已在人工智能、信息处理、模式识别、自动控制、机器人、预测与决策技术、社会学、经济学、心理学、管理学、教育学、运筹学等众多领域得到了广泛的应用.

1.1 模糊性与随机性

扎德在20世纪50年代从事工程控制论的研究,在非线形滤波器的设计方面取得了一系列重要成果,已被该领域广泛引用. 20世纪60年代初期,扎德转而研究多目标决策问题,提出了非劣解等重要概念. 长期以来,围绕决策、控制及其有关的一系列重要问题的研究,从应用传统数学方法和现代电子计算机解决这类问题的成败得失中,使扎德逐步意识到传统数学方法的局限性. 他指出:“在人类知识领域里,非模糊概念起主要作用的唯一只是古典数学”,“如果深入研究人类的认识过程,我们将发现人类能运用模糊概念是一个巨大的财富而不是包袱. 这一点,是理解人类智能和机器智能之间深奥区别的关键.”精确的概念可以用通常的集合来描述. 模糊概念应该用相应的模糊集合来描述. 扎德抓住这一点,首先在模糊集的定量描述上取得突破,奠定了模糊性理论及其应用的基础. 这一理论在某种程度上弥补了经典数学与统计数学的不足,迅速得到广泛的重视.

1.1.1 模糊概念

模糊集合是模糊概念的一种描述. 在人的语言信息交流中,模糊概念比比皆是,如“年轻”、“年老”、“高个子”、“比较满意”等都是模糊概念. 人们之所以能灵活使用模糊概念进行交流,是因为人类语言能恰当描述模糊现象,并具有很强的模糊思维和模糊推理能力. 要让计算机也能处理模糊信息,就必须对自然语言描述的现象有一个结构上的刻画,这从根本上需要从数学手段上入手,建立模糊概念.

1.1.2 模糊性与随机性

在现实生活中,我们经常会遇到一些事先无法预见的事件,这种事件的发生具

有不确定性. 而事件的不确定性有随机性和模糊性之分. 对于前者, 事件是否发生虽难以欲知, 但事件本身的状态是清楚的, 例如, 袋中装有大小相同的红、黄、蓝三种颜色的球各两只, 从袋中任意摸出两只, 这两只球是什么颜色事先并不知道, 但每次摸得球的结果决不是含糊的. 对于后者, 问题与事件是否发生没有直接的关系, 关键是事件本身的状态就不分明, 从而同一件事情不同的人会有不同的感觉, 最终得到不同的评判, 如某地区一次降雨, 就降雨量而言, 张三认为今天下的是“大雨”, 李四认为是“中雨”, 王五认为是“小雨”, 这些评价不能说谁对谁错, 因为“大雨”, “中雨”, “小雨”本身就是模糊概念, 它们之间没有严格的界限.

一般来说, 随机性是一种外在因素的不确定性, 而模糊性是一种内在结构的不确定性. 从信息的角度看, 随机性只涉及信息的量, 而模糊性则关系到信息的具体含义. 因而模糊性是更深刻的不确定性. 在主观认识领域, 模糊性比随机性的作用要大得多.

1.2 模糊集及其运算

模糊集是普通集合概念的推广. 在经典集合论中, 一个元素与一个集合的关系只有完全属于和完全不属于的关系, 而模糊集可以允许一个元素部分属于某一个集合. 在经典集合论中, 用特征函数 $\chi_P(x)$ 来刻画某一个元素 x 是否属于集合 P , 这里

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1 & (\text{如果 } x \in P) \\ 0 & (\text{如果 } x \notin P) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

1.2.1 模糊子集定义

模糊子集扩展了普通集合概念, 它用隶属函数来刻画一个元素属于集合的程度.

定义 1.2.1 设 X 是关于某个特殊问题的论域. 在 X 上的一个模糊子集 A , 就是论域 X 到区间 $[0, 1]$ 的一个映射.

$$\begin{aligned} \mu_A: X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu_A(x) \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

映射 μ_A 是模糊子集 A 的隶属函数.

显然, 特征函数是隶属函数的特殊情况.

我们设论域 X 上的普通集合幂集为 $P(X)$, 而 X 上的全体模糊子集构成的集合为 $\mathcal{F}(X)$, 显然有 $\mathcal{F}(X) \supseteq P(X)$.

1.2.2 模糊子集表示

模糊集合论中提供了多种表示元素及其隶属程度的方法.

设论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, A 是 X 上的一个模糊子集, 下面我们给出常见的几种描述模糊子集 A 的方法.

(1) 扎德记法

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n \quad (1.2.3)$$

若论域 X 是无限集, 则 X 上的一个模糊子集 A 用符号 $A = \int_X \mu_A(x)/x$ 表示.

(2) 向量法

$$A = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n)) \quad (1.2.4)$$

(3) 序偶法

$$A = \{(\mu_A(x_1), x_1), (\mu_A(x_2), x_2), \dots, (\mu_A(x_n), x_n))\} \quad (1.2.5)$$

(4) 单点法

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \dots, \mu_A(x_n)/x_n\} \quad (1.2.6)$$

(5) 解析法

解析法就是给出模糊子集的隶属函数的方法, 这种方法应用广泛. 但隶属函数的确定一般比较困难. 当论域是实数集合上的一个区间时, 该方法显得方便.

例 1.2.1 扎德给出年龄论域 $U = (0, 100)$ 上的“old”- O 与“yong”- Y 两个模糊子集的隶属函数如下:

$$\mu_O(u) = \begin{cases} 0 & (0 \leq u \leq 50) \\ \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & (50 < u \leq 100) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\mu_Y(u) = \begin{cases} 1 & (0 \leq u \leq 25) \\ \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & (25 < u \leq 100) \end{cases} \quad (1.2.8)$$

其隶属函数曲线如图 1.2.1 所示.

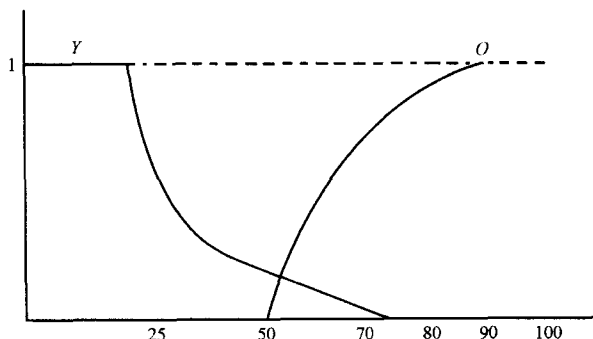


图 1.2.1 “old”与“yong”的隶属函数

1.2.3 模糊子集间的运算

设 $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$. 假定 $\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 是论域 X 上的两个模糊子集 A 和 B

的隶属函数,则定义如下.

(1) 两个模糊子集相等

$$\forall x \in X, A = B \quad [\text{当且仅当} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)] \quad (1.2.9)$$

(2) 包含

$$\forall x \in X, A \subseteq B \quad [\text{当且仅当} \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)] \quad (1.2.10)$$

(3) A 的补集 $\bar{A}$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (1.2.11)$$

(4) 交运算

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \nabla \mu_B(x)$$

式中, $\nabla: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ 是满足下列条件的 t -模算子: $\forall a, b, c \in [0,1]$, 有

$$1) a \nabla 1 = a.$$

$$2) a \nabla b = b \nabla a.$$

$$3) \text{ 如果 } a \geq c, b \geq d, \text{ 则 } a \nabla b \geq c \nabla d.$$

$$4) a \nabla b \nabla c = a \nabla (b \nabla c) = (a \nabla b) \nabla c.$$

常用的 t -模算子 $a \nabla b$ 有 $\min(a, b)$ 和 $a * b$.

(5) 并运算

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \rho \mu_B(x)$$

式中, $\rho: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ 是满足下列条件的 s -模算子: $\forall a, b, c \in [0,1]$, 有

$$1) a \rho 0 = a.$$

$$2) a \rho b = b \rho a.$$

$$3) \text{ 如果 } a \geq c, b \geq d, \text{ 则 } a \rho b \geq c \rho d.$$

$$4) a \rho b \rho c = a \rho (b \rho c) = (a \rho b) \rho c.$$

常用的 s -模算子 $a \rho b$ 有 $\max(a, b)$ 和 $a + b - a * b$. t -模算子和 s -模算子在模糊逻辑和模糊推理中有着广泛用途. 国内外有不少学者多此作了深入探讨, 并取得了一系列重要成果.

例 1.2.2 设论域 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, 有两个模糊子集 $A, B \in \mathcal{F}(X)$. 其中

$$A = 0/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5$$

$$B = 1.0/x_1 + 0.5/x_2 + 0.3/x_3 + 0.2/x_4 + 0/x_5$$

试求 $A \cup B, A \cap B$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad A \cup B &= \frac{0 \vee 1}{x_1} + \frac{0.5 \vee 0.5}{x_2} + \frac{0.7 \vee 0.3}{x_3} + \frac{0.8 \vee 0.2}{x_4} + \frac{1 \vee 0}{x_5} \\ &= \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{1}{x_5} \end{aligned}$$

$$A \cap B = \frac{0 \wedge 1}{x_1} + \frac{0.5 \wedge 0.5}{x_2} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{x_3} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{x_4} + \frac{1 \wedge 0}{x_5}$$

$$= \frac{0}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.2}{x_4} + \frac{0}{x_5}$$

显然模糊子集 A 与 B 互为模糊子补集.

模糊集的并、交、补运算遵循下列运算律为

- 1) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$.
- 2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- 3) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- 4) 吸收律: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$.
- 5) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- 6) 传递律: 若 $B \supseteq A, C \supseteq B$, 则 $C \supseteq A$.
- 7) 零一律: $A \cup U = U, A \cap U = A$.
- 8) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- 9) 复原律: $\overline{\overline{A}} = A$.
- 10) 补余律不一定成立, 即一般: $A \cup \overline{A} \neq U, A \cap \overline{A} \neq \phi$.

以上运算性质可以用隶属函数的运算性质来验证, 这里不作证明.

1.3 模糊集的截集及几个重要的凸模糊子集

在生产实际中, 我们常常要对产品进行“合格”检验. 其实, “合格”本身就是一个模糊概念, 它可以通过指定每一个产品隶属于“合格”的程度来描述. “合格”是产品的质量最低水平 α , 凡是进入市场的所有产品都必须达到或超过这个水平, 我们把这些“合格”产品的集合用集合 A_α 来表示.

1.3.1 α -截集

定义 1.3.1 设 $A \in \mathcal{F}(X)$, 对任意的 $\alpha \in [0, 1]$, 称

$$A_\alpha(x) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1.3.1)$$

为 A 的 α -截集, 其中 α 称为置信水平.

A_α 是普通集合. 如图 1.3.1 所示. 若把式(1.3.1)中的不等号“ $\geq$ ”改为“ $>$ ”, 则称这样的 A_α 为 A 的 α -强截集.

模糊集的截集具有下列性质:

- 1) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha, (A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

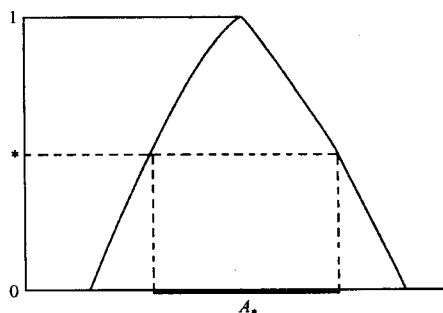


图 1.3.1 模糊集的截集
(* 表示 α)