Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题全解

（原题译自俄文第13版）

（一）

南京大学数学系

廖良文 许 宁 编著

安徽人民出版社

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(一)

南京大学数学系
博士生导师 廖良文教授 编著
许宁副教授

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.1/(苏)吉米多维奇著.廖良文,许宁编著.一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 7－212－02695－6/G·760

Ⅰ.吉…　Ⅱ.①吉…②廖…③许…　Ⅲ.数学分析－高等学校－解题　Ⅳ.017－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113600 号

责任编辑　王玉法
装帧设计　王怡敏
出版发行　安徽人民出版社
地　　址　合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编:230063
发 行 部　0551－2833066　0551－2833099(传真)
经　　销　新华书店
印　　刷　赣榆县苏兴印刷厂
开　　本　850×1168　1/32
印　　张　14.875
字　　数　300 千
版　　次　2005 年 10 月第 1 版
印　　次　2005 年 10 月第 1 次印刷
标准书号　ISBN7－212－02695－6/G·760
定　　价　18.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，作练习题是一个很重要的环节。通过作练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于，我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　录

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法　为了证明某定理对任意自然数n是正确的，只要证明下面两点：

(1) 该定理对$n=1$是正确的；(2) 若该定理对任何一个自然数n是正确的，则它对其后的一个自然数$n+1$也是正确的.

2. 分割　若把有理数分为A、B两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一类，也仅仅属于一个类别；(3) 属于A类(下类)的任何数都小于属于B类(上类)的任意数，此分类法被称之为分割. $\dfrac{A}{B}$分割确定(a) 有理数和(b) 无理数. 有理数是指：或者下类A有最大数，或者上类B有最小数；无理数是指：A类没有最大数，而B类没有最小数. 有理数和无理数统称为实数*.

3. 绝对值　若x为实数，则绝对值$|x|$就是由下列条件所确定的非负数.

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{若 } x<0;\\ x, & \text{若 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何实数x和y，下列不等式成立

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界　设$X=\{x\}$为实数的有界集，若：(1) 每一个$x\in X$** 满足不等式

---

* 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

** 符号$x\in X$表示数字x属于集X.

$x \geqslant m$,

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在有 $x' \in X$,以致

$x' < m + \varepsilon$,

则数 $m = \inf\{x\}$ 被称为集 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$x \leqslant M$,

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$ 存在有 $x'' \in X$,以致

$x'' > M - \varepsilon$,

则数 $M = \sup\{x\}$ 被称为集 X 的上确界.

若集 X 下方无界,则通常说

$\inf\{x\} = -\infty$,

若集 X 上方无界,则认为

$\sup\{x\} = +\infty$.

5. 绝对误差和相对误差 若 $a(a \neq 0)$ 是可测量的准确值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = | x - a |$$

被称为绝对误差,而

$$\delta = \frac{\Delta}{| a |}$$

被称为可测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的个位数的一半,则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明:下列等式对任何自然数 n 都成立.

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

证 当 $n = 1$ 时,等式显然成立.

设当 $n = k$ 时等式成立,即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+k+1\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

即对 $n=k+1$ 等式也成立. 于是由数学归纳法有，对任何自然数 n，有 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证　当 $n=1$ 时，等式成立.

设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立. 由数学归纳法，对任何自然数 n，有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证　当 $n=1$ 时，等式显然成立.

设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}\\&=[1+2+\cdots+k+(k+1)]^2\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是对任何自然数 n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^n-1.$$

5. 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]}=1$.

证明：$(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$，式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个的组合数，由此推导出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，有 $(a+b)^{[1]}=a+b$

$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立. 即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$$

则对于 $n=k+1$,有

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}\\
&=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)\\
&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}\\
&\quad+\{(a-(k-1)h)+(b-h)\}C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+\{a+(b-kh)\}C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]}b^{[k]}+C_k^k a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]}
\end{aligned}$$

即对 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]} \qquad ①$$

令 $h=0$,则有 $a^{[n]}=a^n$ ②

将②式代入①式,得牛顿二项式公式 $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$.

6. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)$$
$$\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$$

则当 $n=k+1$ 时，由于

$$x_i>-1 \qquad (i=1,2,\cdots,k+1)$$

所以 $1+x_i>0$，因此有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})$$
$$+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1})$$

又由于 $x_ix_j\geqslant 0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,k+1)$

所以 $$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$.

7. 证明：如果 $x>-1$，则不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1)$ 是正确的，只有当 $x=0$ 时，等号成立.

证 当 $n=2$ 时，

$$(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant 1+2x.$$

即不等式成立，当等号成立时，有 $x=0$.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $(1+x)^k\geqslant 1+kx$ 且等号仅当 $x=0$ 时才成立.

则当 $n=k+1$ 时，由于 $1+x>0$，有

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)$$
$$\geqslant(1+kx)(1+x)$$
$$=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x$$

且等号仅当 $x=0$ 时，才成立.

于是，由数学归纳法，对任何自然数 n，$(1+x)^n\geqslant 1+nx$，且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

8. 证明不等式，当 $n>1$ 时，$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

提示：利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$. 故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

而 $$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \qquad (k=1,2,\cdots)$$

从而 $$(k+1)!<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}=\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 $n\geqslant 2$ 有 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

9. 证明不等式，当 $n>1$ 时，$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$.

证 当 $n=2$ 时，显然有 $2!4!=48>[(2+1)!]^2=36$.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!4!\cdots(2k)!>[(k+1)!]^k.$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&2!4!\cdots(2k)!(2k+2)!\\&>[(k+1)!]^k(2k+2)!\\&=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\&>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}\\&=[(k+2)!]^{k+1}\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

因此对任何大于 1 的自然数有

$$2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n.$$

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，显然有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式成立.

设当 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

而 $$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

事实上，我们有 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$，

即 $$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$$

从而我们有 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$，

因此 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

因此由归纳法对任何自然数 n，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

10.1. 证明不等式

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \qquad (n \geqslant 2)$;

(2) $n^{n+1}>(n+1)^{n} \qquad (n \geqslant 3)$;

(3) $\left|\sin \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_{k}$

$(0 \leqslant x_{k} \leqslant \pi, \qquad k=1,2,\cdots,n)$;

(4) $(2n)!<2^{2n}(n!)^{2}$.

证 (1) 当 $k=2$ 时,因为

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=1+2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}>2=(\sqrt{2})^{2}$$

所以,不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k},$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

而当 $k \geqslant 2$ 时,$2\sqrt{k} \geqslant \sqrt{k+1}$,所以有

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^{2} &= k+2\sqrt{k} \frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1} \\ &\geqslant k+1\end{aligned}$$

因此 $$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立.由数学归纳法,命题证毕.

(2) 事实上,我们只需证明

$$\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}}<n \qquad (n \geqslant 3),$$

而 $$\begin{aligned}&\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}} \\ &=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

而当 $k > 2$ 时，$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$，　$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$，

所以　$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3 \leqslant n$$

因此　$(n+1)^n < n^{n+1}$.

(3) 因为当 $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$ 时，$\sin x_k \geqslant 0$

所以当 $n = 1$ 时，不等式显然成立.

设当 $n = k$ 时，不等式成立，即

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sin x_i$$

则当 $n = k + 1$ 时，有

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)\right|$$

$$= \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot \cos x_{k+1} + \cos\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \sin x_{k+1}\right|$$

$$\leqslant \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| \cdot \left|\cos x_{k+1}\right|$$

$$+ \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| \left|\sin x_{k+1}\right|$$

$$\leqslant \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| + \sin x_{k+1}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \sin x_i$$

即当 $n = k + 1$ 时，不等式成立. 由数学归纳法，有

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sin x_k \qquad (0 \leqslant x_k \leqslant \pi)$$

$$\begin{aligned}(4)\ (2n)! &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \\ &\quad \times (2n-1) \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \\ &< (2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2 \\ &= 2^{2n}(n!)^2\end{aligned}$$

11. 设 c 为正整数，而且不是整数的平方，$\dfrac{A}{B}$ 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含 $b^2 > c$ 这样的所有正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数，证明：A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

证 我们要证明对 $\forall a \in A$，存在 a' 使得 $a' > a$ 且 $a' \in A$.

若 $a \leqslant 0$，则显然存在 $a' > 0 \geqslant a$ 且 $a' \in A$. 故不妨设 $a > 0$，于是 $a^2 \leqslant c$ 但 $a^2 \neq c$，倘若不然，$a^2 = c$. 设 $a = \dfrac{p}{q}$，其中 p, q 为互质的正整数，则 $\dfrac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互质的，故必有 $q = 1$，从而 $c = p^2$，这与题设矛盾. 因此 $a^2 < c$. 下面我们证明，当 n 充分大时，$\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 < c$，即

$$a + \frac{1}{n} \in A$$

上述不等式等价于 $\dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} < c - a^2$

而 $$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a+1}{n}$$

故只需取 n 使得 $\dfrac{2a+1}{n} < c - a^2$

为此只需取 $n > \dfrac{2a+1}{c-a^2}$

因此当 $n > \frac{2a+1}{c-a^2}$ 时，$a + \frac{1}{n} \in A$.

故 A 类中无最大数.

应用相同的方法，可证明 B 类中无最小数，实质上，此分割 $\frac{A}{B}$ 确定一个无理数 $\sqrt{c}$.

12. 用下列方法建立确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 $\frac{A}{B}$：A 类包含符合 $a^3 < 2$ 条件的所有有理数 a；而 B 类含有所有其它的有理数，证明 A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

证 设 $a \in A$，即 $a^3 < 2$，下面我们证明存在正整数 n，使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2$$

事实上，上式等价于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$，

若 $a \leqslant 0$，取 $n = 1$ 即可. 不妨设 $a > 0$.

由于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3a^2 + 3a + 1}{n}$，故只需取 n 使得

$$\frac{3a^2 + 3a + 1}{n} < 2 - a^3$$

即 $$n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3} \text{ 即可.}$$

因此，当 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$ 时，$a + \frac{1}{n} \in A$.

故 A 类中无最大数.

下面证明 B 类中无最小数，设 $b \in B$ 则 $b^3 \geqslant 2$. 首先证明 $b^3 \neq 2$，若 $b^3 = 2$，设 $b = \frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$，$p^3 = 2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数，设 $p = 2r$，r 为正整数，由于 $(p, q) = 1$，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$，矛盾. 因此 $b^3 > 2$. 下面证明存在充分大的正整数 n，使得 $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$，