数学化归思维论

赵小云　叶立军　著

科学出版社
www.sciencep.com

数学化归思维论

赵小云　叶立军　著

杭州师范学院出版基金资助项目

科学出版社
北京

内 容 简 介

数学化归思维论是哲学、方法论和数学史等多门学科的交叉科学，其着眼点在于数学的创新. 本书主要是以已知的、简单的、具体的、特殊的、基本的知识为基础，将未知的化为已知的、复杂的化为简单的、抽象的化为具体的、一般的化为特殊的、非基本的化为基本的，从而使问题得到解决. 本书介绍了数学化归思想的产生、发展、特点，数学化归思维和思想在中学数学中的典型方法与实例，数学化归的创造法则及数学运动发展规划. 通过学习，形成正确的数学观，并能自觉地运用数学方法论的观点指导数学学习与教学，从而提高数学教师驾驭教材的能力.

本书适合高等师范院校的数学系学生、从事数学教育的教师和理论工作者及广大数学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

数学化归思维论/赵小云，叶立军著. —北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-013809-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①赵…②叶… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料 Ⅳ.O.2028

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065188 号

责任编辑：吕 虹 祖翠娥／责任校对：张怡君
责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006 年 12 月第二次印刷 印张：14 3/4
印数：4 501—6 500 字数：282 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

序

数学思想方法是科学思想、科学方法的一个重要组成部分. 随着数学教育改革与发展的不断深入, 数学思想方法在数学中的重要性已日趋凸现, 在数学教育中加强和渗透数学思想方法已成为十分重要的工作.

化归思维是一种重要的数学思想方法, 化归思维能力是数学中用以解决问题的最基本手段之一. 在化归思维解决问题的过程中, 我们往往不是直接着手, 而是对该问题进行变形、转化、直至最终把它化归为某个(些)已经解决或者容易解决的问题. 化归方法的种类较多, 在教学时可以主要培养分解、映射、求变三种化归能力. 在进行化归思维能力的训练时, 可先进行同一课程中不同类型的化归(如函数问题和方程问题的转化), 再进行同一数学学科不同分支之间的化归(如用拉普拉斯变换, 将微分方程化归为函数的代数方程), 最后再进行多步化归及包含"反馈"的化归.

化归的作用是很大的, 但让学生具备化归能力, 却要经过一定的甚至是较长时间的训练. 加强化归思维的数学思想方法的教育, 关键在教师. 而提高数学教师数学思想方法的素养至关重要. 一个合格的数学教师不仅应该有扎实的数学知识和数学技能, 有较强的教学科研能力与组织协调能力, 同时还应有丰富的数学思想方法的素养. 不少数学家对数学教师都提出过严格的要求.

作为数学教师, 应该具有在深层次上钻研数学教材的能力, 不仅要求熟练地掌握数学知识和数学技能, 而且要求深刻领会数学的思想方法, 理解数学方法的基本原理. 只有这样, 才可能使自己真正地驾驭教材, 搞好教学工作.

本书作者长期从事数学教育及其数学思想方法的研究, 历经多年教学科研终成此书, 付出了不少的辛劳. 化归思维在数学解题中有着十分重要的意义, 本书的出版将对数学思想方法教育的研究有一定的借鉴与促进作用.

数学思想方法教学研究方兴未艾, 需要探讨的问题有很多. 本书在数学化归思维方面作了一些研究和探索, 应该说是一个良好的开端, 但愿有更多的好作品问世.

值此新书即将出版之际, 乐为之序.

宋乃庆

2004 年中秋于西南师范大学

目　　录

第1章　绪　论

1.1　化归 —— 数学发现的重要策略和方法

数学问题的形式千变万化，结构错综复杂，特别是一些难度较大的综合题 (如一些国内外竞赛题)，不仅题型新颖，知识覆盖面大，而且技巧性强，个别问题的解法独到别致. 寻求正确有效的解题思路，意味着寻找一条摆脱困境、绕过障碍的途径. 因此，我们在解决数学问题时，思考的着重点就是要把所需要解决的问题转化为已能解决的问题. 也就是说，在求解不易直接或正面找到解题途径的问题时，我们往往转化问题的形式，从侧面或反面寻找突破口，直到最终把它化归成一个或若干个熟知的或已能解决的问题. 这就是数学思维中重要的特点和方法 —— 化归思维和方法.

范例 1.1　如果球的半径是 R, 那么它的体积是 $V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

思考和分析　由于球的对称性，我们只需先求半球的体积. 对于求几何体的体积问题，我们一般都考虑应用祖暅原理. 为此需要找到一个能够求体积的几何体，使它和半球夹在两个平行平面之间，当用平行于这两个平面的任意一个平面去截它们时，截得的截面面积总相等.

因此，我们取一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体和半球放在同一个平面 α 上 (图 1.1).

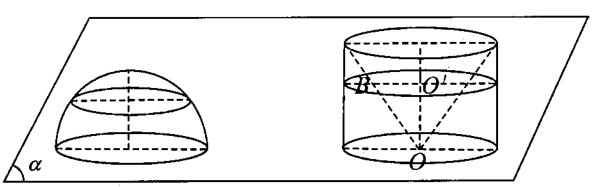


图 1.1

因为圆柱的高等于 R, 所以这个几何体和半球都夹在两个平行平面之间. 用平行于平面 α 的任意一个平面去截这两个几何体，截面分别是圆面和圆环面 (图 1.1). 如果截平面与平面 α 的距离为 l, 那么圆面半径 $r=\sqrt{R^2-l^2}$, 圆环面的大圆半径为 R, 小圆半径为 l(因为 $\triangle OO'B$ 为等腰三角形), 因此

$$S_{圆}=\pi r^2=\pi(R^2-l^2),$$
$$S_{圆环}=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2),$$

故有 $S_{圆} = S_{圆环}$. 由祖暅原理，这两个几何体的体积相等，即

$$\frac{1}{2}V_{球} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

上面我们利用祖暅原理将求球的体积问题，化归为求一个圆柱体与一个圆锥体的体积的差，其化归的思维过程可表示如下：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{球体积 } V} \arrow[r, "\text{化归}"] \arrow[d] & \boxed{\text{半球体积 } V^*} \arrow[r, "\text{化归}"] & \boxed{\text{所作几何体体积 } V^{**}} \arrow[d] \\
\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3} & \boxed{V^* = \frac{2}{3}\pi R^3} \arrow[l, "\text{还原}"'] & \boxed{V^{**} = \frac{2}{3}\pi R^3} \arrow[l, "\text{还原}"']
\end{tikzcd}$$

范例 1.2 如图 1.2 所示，记锐角三角形 ABC 为 T, 矩形 R, S 的一部分内接于 T. 设 $A(\cdot)$ 表示图形 $\cdot$ 的面积，求 $\dfrac{A(R)+A(S)}{A(T)}$ 的最大值.

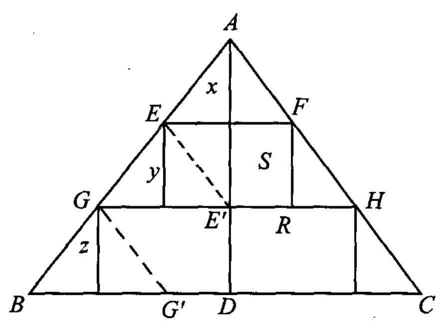


图 1.2

思考和分析 过 E 作 $EE'//AC$ 交 GH 于 E', 过 G 作 $GG'//AC$ 交 BC 于 G'. 设 $\triangle ABC$ 的高 $AD = h$, 底边 $BC = a$, 记 $\triangle AEF$ 为 L, EF 上的高为 x, $\triangle EGE'$ 为 M, GE' 上的高为 y, $\triangle GBG'$ 为 N, BG' 上的高为 z, 则 $x + y + z = h$. 由于 $A(S) = S_{EE'HF}$, $A(R) = S_{\Diamond GG'CH}$, 所以

$$\frac{A(R)+A(S)}{A(T)} = \frac{A(T) - [A(L)+A(M)+A(N)]}{A(T)} = 1 - \frac{A(L)+A(M)+A(N)}{A(T)},$$

而 $A(T)$ 是定值，故就把原来的问题转化为只求 $A(L)+A(M)+A(N)$ 的最小值.

由于 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, 则 $\dfrac{EF}{a} = \dfrac{x}{h}$, 即 $EF = \dfrac{ax}{h}$. 同理，$GE' = \dfrac{ay}{h}, BG' = \dfrac{az}{h}$,

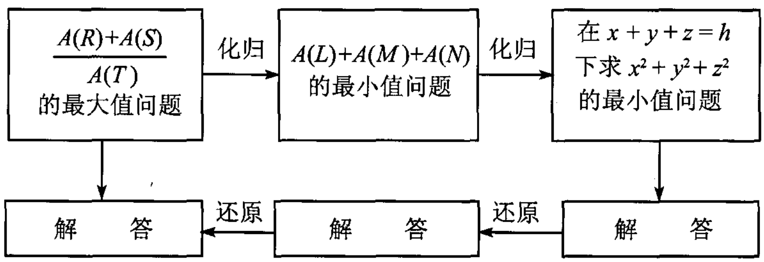
从而有 $A(L)+A(M)+A(N)=\dfrac{a}{2h}(x^2+y^2+z^2)$.

又 $x+y+z=h$, 这样我们就把问题转化为在 $x+y+z=h$(定值) 的条件下，求 $f(x,y,z)=\dfrac{a}{2h}(x^2+y^2+z^2)$ 的最小值. 由柯西不等式，我们不难得到

$$\frac{a}{2h}(x^2+y^2+z^2)\geqslant\frac{a}{2h}\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{6}ah(\text{等号当且仅当 } x=y=z=\frac{h}{3}\text{时成立}).$$

通过上面的多次化归，最后我们得到 $\dfrac{A(R)+A(S)}{A(T)}$ 的最大值为 $\dfrac{2}{3}$.

范例 1.2 的分析过程可表示如下：



范例 1.3 设对所有实数 x, 不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立，试求 a 的取值范围.

思考和分析 注意到所给不等式的结构特征，为了简化计算，我们不妨令 $t=\log_2\dfrac{2a}{a+1}$. 这样原来的问题可转化为：对于任何实数 x, 不等式 $(3-t)x^2+2tx-2t>0$ 恒成立，试求 t 的范围. 显然 t 的范围是容易求的，从而原问题中 a 的范围也就可以求了.

事实上，令 $t=\log_2\dfrac{2a}{a+1}$, 则已给的不等式可化为

$$(3-t)x^2+2tx-2t>0. \qquad ①$$

由于式 ①恒成立，故

$$\begin{cases}3-t>0,\\ \Delta=4t^2+8t(3-t)<0.\end{cases} \qquad ②$$

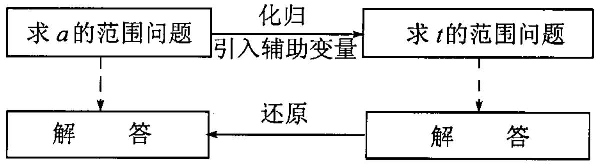
解不等式组 ②得 $t<0$. 我们回到原来的问题得

$$\log_2\frac{2a}{a+1}<0. \qquad ③$$

解式 ③得 $0 < a < 1$.

所以 a 的取值范围是 $0 < a < 1$.

上面我们通过引入一个辅助变量，将原来比较复杂的问题转化为一个十分明朗的问题，其解法十分简捷明快，化归思维的过程也显得自然，可如下表示：



范例 1.4　求函数 $f(m,n) = (m-n)^2 + \left(\sqrt{4-m^2} - \dfrac{9}{n}\right)^2$ 的最小值.

思考和分析　由于这是一个二元函数，并且又有根式和分式，因此，用一般的代数方法去解可能相当复杂 (或者需要较高的技巧), 我们注意到 f 的表达式，联想到两点的距离公式，问题就转化为求两动点 $P(m,\sqrt{4-m^2}), Q\left(n,\dfrac{9}{n}\right)$ 的最短距离问题，而动点 P, Q 的参数方程分别是

$$\begin{cases} x = m, \\ y = \sqrt{4-m^2} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x = n, \\ y = \dfrac{9}{n}. \end{cases}$$

消去 m,n 得 $x^2+y^2=4$ 和 $xy=9$. 这样问题就进一步转化为求圆 $x^2+y^2=4$ 与双曲线 $xy=9$ 间的最短距离 (图 1.3), 从而我们不难求得 $f_{\min}(m,n) = 22-12\sqrt{2}$.

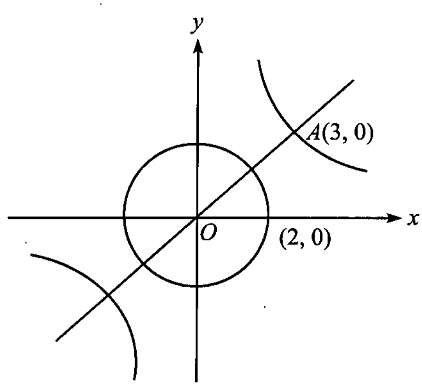
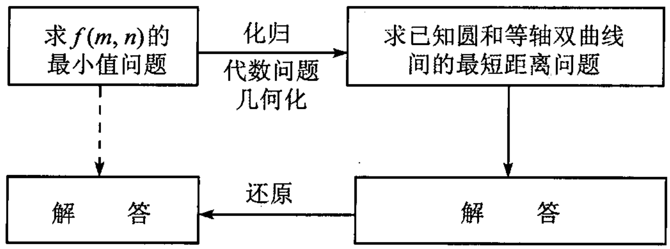


图 1.3

范例 1.4 是一个二元函数的极限问题．题型十分陌生，故解题就较困难．但我们注意到 f 表达式的特征，从几何意义的角度考虑，发现 $P(m,\sqrt{4-m^2})$ 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的一点，$Q\left(n,\dfrac{9}{n}\right)$ 是等轴双曲线 $xy=9$ 上的一点，从而我们将问题进一步转换为通过两条已知曲线间的最短距离而得到解决，其化归思维过程如下：



范例 1.5 设 a, b 是实数，$A=\{(x,y)|x=n, y=na+b\}, B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$，其中 m, n 是自然数．讨论是否存在 a, b, 使得：

(1) $A\cap B\neq\varnothing$;

(2) $(a,b)\in C$ 同时成立.

思考和分析 本题讨论的是三个集合及其相互关系．对于集合的知识，在中学课本里仅仅介绍了一些基本的术语和记号，因此，遇到这方面的问题，我们往往会感到困难，为此，我们不妨试着把原来用集合语言叙述的问题，改述成不借助集合语言的形式.

(1) $A\cap B\neq\varnothing$ 表明存在 $n\in\mathbf{N}$, 使得 $na+b=3n^2+15$.

(2) $(a,b)\in C$, 我们又有 $a^2+b^2\leqslant 144$. 这样原来的问题就转化为讨论关于 a, b 的混合组

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144 & ② \end{cases}$$

是否存在实数解 (其中 $n\in\mathbf{N}$)．我们再注意到上述混合组的几何意义，式 ①表示直角坐标系 aOb 的直线，而式 ② 则表示圆面 (即圆周及其内部)．因此，混合组有解当且仅当直线与圆面有公共点，也就是说圆心到直线的距离不大于 12(图 1.4).

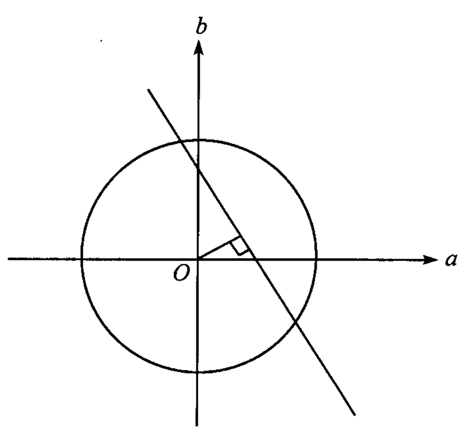


图 1.4

于是

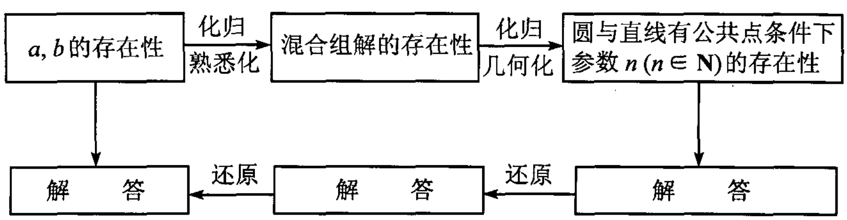
$$3n^2 + 15 \leqslant 12,$$

$$(n^2+5)^2 \leqslant 16(n^2+1),$$

即 $n^4 - 6n^2 + 9 \leqslant 0$. 所以 $(n^2-3)^2 \leqslant 0$, 从而 $n = \pm\sqrt{3}$.

但由于 $n \in \mathbf{N}$, 因而混合组无解. 可见，符合条件的 a, b 不存在.

上面的范例 1.5, 我们是将抽象的集合语言转化为通常熟知的数学式子，从而将 a, b 的存在性问题转化为一个方程、不等式混合组的解的存在性问题. 考虑到两个式子的几何意义，我们进一步将其转化为在圆面与直线有公共点的条件下，参数 $n(n \in \mathbf{N})$ 的存在性问题，可表示如下：



习题 1.1

1. 已知 $x+y+z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, 求证：$x, y, z$ 中至少有一个等于 1.

2. 设 α, β, γ 是锐角，且

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

求证：$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

3. 已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, 将此正六边形绕 AB 边旋转一周，求所得的几何体的全面积和体积.

4. 设抛物线 $y = ax^2$ 上恒有关于直线 l: $x+y=1$ 对称的相异两点，求 a 的范围.

5. 求 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2$ 的最大值.

6. 从 10 个英文字母 A, B, C, D, E, F, G, X, Y, Z 中任取 5 个字母 (字母允许重复) 组成一个词，将所有可能的词按 “字典次序 ”(即英汉辞典中英文词汇排列的顺序) 排列，得到一个词表：AAAAA, AAAAB, $\cdots$, AAAAZ, AAABA, AAABB, $\cdots$, DEGXY, DEGXZ, DEGYA, $\cdots$, ZZZZY, ZZZZZ. 设位于词 CYZGB 与词 XEFDA 之间 (除这两个词以外) 的词的个数为 k, 试写出词表中第 k 个词.

7. 设 a, b, c 是直角三角形的三边，其中 c 是斜边，求证：$a^n + b^n < c^n (n \in \mathbf{N}, n \geqslant 3)$.

8. 设 a, b 是整数，且

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) | x = m,\ y = m^2 + 2am + 1,\ m \in \mathbf{N}\}, \\
B &= \{(x,y) | x = n,\ y = b(n^2 - 1),\ n \in \mathbf{N}\}, \\
C &= \{(x,y) | x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}
\end{aligned}
$$

是平面 xOy 内的点集，求出一切同时满足下列条件的实数 a 和 b:

(1) $A \cap B \neq \varnothing$;

(2) $(a, b) \in C$.

9. 若 $x^2 + y^2 \leqslant 5$, 求证： $0 \leqslant (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 20$.

10. 40 颗棋子放在 $6 \times 8 = 48$ 个方格内 (每格只能放一颗棋子), 要求各行各列的棋子数均为偶数. 试问这样的放法是否可能？

1.2 化归的一般模式

通过对 1.1 节几个例子的分析可以看出，我们在思考的过程当中，由于解题的需要，多次地将问题进行变形，使之转化，从而使原来较难的问题，通过化归为熟知的或已能解决的问题而得到解决. 正如匈牙利著名数学家 P. 路莎所指出的："对于数学家的思维过程来说是很典型的，他们往往不对问题进行正面的进攻，而是不断地将它变形，直至把它转化为已经能够解决的问题. "

P. 路莎还用以下比喻，十分生动地说明了化归思维的实质. "假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，你想烧些开水，应当怎么去做？" 正确的回答是："在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放在煤气灶上. " 接着路莎又提出了第二个问题："如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经放了足够的水，这时你又应当如何去做？" 这时，人们往往会很有信心地回答说："点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上. " 但是路莎指出，这一回答并不能使她感到满意. 因为，更好的回答应该是这样的："只有物理学家才会这样去做；而数学家们则会倒去壶中的水，并声称我已经把后一个问题化归成先前的问题了. " 把水倒掉 —— 这是多么简洁的回答.

当然，上面的比喻确实有点夸张，但它和前面几个例子相比，也许更能体现数学家的思维特点 —— 与其他应用科学家相比，数学家特别善于使用化归思维和方法.

应用化归原则解决问题的一般模式如下：

$$\begin{tikzcd}
\text{问题 } A \arrow[r, "\text{化归}"] \arrow[d] & \text{问题 } A^* \arrow[d] \\
\text{解答 } A & \text{解答 } A^* \arrow[l, "\text{还原}"']
\end{tikzcd}$$

把所要解决的问题经过某种变化，使之归结为另一个问题 *，再通过问题 * 的求解，把解得的结果作用于原有问题，从而使原有问题得解，这种解决问题的思想，我们称之为化归思维.

我们时常需要把高次的化为低次的，把多元的化为单元的，把高维的化为低维的，把指数运算化为乘法运算，把乘法变为加法，把几何问题化为代数问题，把偏微分方程问题变为常微分方程问题，化无理为有理，化连续为离散，化离散为连续 $\cdots\cdots$ 下面试举中学数学中的两个例子.

范例 1.6　面积问题

$$\text{圆面积} \xrightarrow{\text{化归}} \text{多边形面积} \xrightarrow{\text{化归}} \text{三角形面积}$$

范例 1.7　二次方程求解

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0(a\neq 0) &\xrightarrow{\text{化归}} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \xrightarrow{\text{化归}} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &=\frac{b^2-4ac}{4a} \xrightarrow{\text{化归}} x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

这两个例子都是把未知问题化归为已知问题的求解，其核心内容是简化和转化，其方向是由难到易，化繁为简.

范例 1.8　由于求解一元一次方程的问题是十分容易的，因此，求解二元一次方程组 (或 n 元一次方程组) 的问题化归成了求解一元一次方程的问题.

$$\begin{tikzcd}
\text{求解二元一次方程组} \arrow[r, "\text{消元}"] \arrow[d, "?"] & \text{求解一元一次方程} \arrow[d] \\
\text{解} & \text{解}^* \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

例如，求解方程组

$$\begin{cases} 3x+y=14, & ①\\ 2x-y=6. & ② \end{cases}$$

思考和分析 可以首先通过“加减”或“代入”实现所说的“消元”，即由式①+式②得

$$5x=20,$$

由式①得

$$y=14-3x, \quad ③$$

将式③代入式②就有

$$2x-(14-3x)=6.$$

由于一元一次方程的求解问题是已经解决了的，有

$$x=4,$$

再把 $x=4$ 代入式①并化简就可得到

$$y=2.$$

就其基本思想而言，容易看出，化归原则与博利亚关于在解题过程中应充分利用“辅助问题”的思想是十分一致的．博利亚这样写道：“去设计并解出一个合适的辅助问题，从而用它求得一条通向一个表面上看来很难接近的问题的通道，这是最富有特色的一类智力活动．”博利亚并对所说的“辅助问题”做了如下的分类：等价问题、较强或较弱的辅助问题及间接的辅助问题(后者是指这样的辅助问题：它们既非等价问题，也非较强或较弱的辅助问题，但是，通过对此的考虑仍然有助于我们解决原来的问题，即获得材料上或方法论方面的帮助)．有关等价与不等价转化我们将在第 6 章再进一步阐述．

与博利亚的这些论述进行比较，可以看出，化归原则的主要特点就在于它具有更强的目的性、方向性和概括性．我们在此就是希望通过由未知到已知、由难到易、由繁到简的化归来达到解决问题的目的，而且，所有有关的解题过程又都可以统一地归结为上述的模式．正是在这样的意义上，化归原则就可看成对博利亚有关思想的进一步发挥或发展．

就化归原则的具体应用而言，其中的关键显然在于如何实现由所要解决的问题向已经解决的或较易解决的问题的转化．数学中用以实现化归的方法是很多的，分割法就是经常用到的一种．

唯物辩证法告诉我们：客观事物是发展变化的，不同事物间存在着种种联系，各种矛盾无不在一定的条件下互相转化．化归方法正是人们对这种联系和转化的

一种能动的反映. 从哲学的高度看, 化归方法着眼于揭示联系、实现转化, 在迁移转换中达到问题的解决, 因此化归方法是转化矛盾的方法, 属于哲学思维方法的范畴, 它的 "运动 — 转化 — 解决矛盾" 的思想方法具有深刻的辩证法.

因此, 掌握化归思维和方法, 对于学好数学 (特别是在解数学题时) 有着十分重要的意义和作用.

很明显, 化归思维的特点就是以已知的、简单的、具体的、特殊的、基本的知识为基础, 将未知的化为已知的、复杂的化为简单的、抽象的化为具体的、一般的化为特殊的、非基本的化为基本的, 从而使问题得到解决.

范例 1.9 在复平面上, 复数 z_1 在连接 1+i 和 1−i 的线段上移动, 复数 z_2 在以原点为圆心, 半径为 1 的圆周上移动. 求:

(1) 复数 z_1^2 的轨迹上的点所组成的曲线方程, 并指出它是什么曲线;

(2) 复数 z_1z_2 移动时, 它的轨迹所组成图形的面积.

思考和分析 (1) 由于 z_1, z_2 分别在线段上和圆周上运动, 因此我们可令

$$\begin{aligned} &z_1 = 1 + t\mathrm{i} \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1), \\ &z_2 = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi), \end{aligned}$$

于是

$$z_1^2 = (1 + t\mathrm{i})^2 = (1 - t^2) + 2t\mathrm{i}.$$

又设

$$z_1^2 = x + y\mathrm{i} \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

则

$$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 2t. \end{cases}$$

消去 t 得

$$y^2 = -4(x - 1) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

它是一条顶点在 $(1, 0)$, 开口向左的抛物线的一部分.

(2) $z_1z_2 = (1 + t\mathrm{i})(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = (\cos\theta - t\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin\theta + t\cos\theta)$.

设 $z_1z_2 = x + y\mathrm{i} (x, y \in \mathbf{R})$, 则

$$\begin{cases} x = \cos\theta - t\sin\theta, \\ y = \sin\theta + t\cos\theta. \end{cases}$$

消去 θ 得 $x^2 + y^2 = 1 + t^2$, 这是以原点为圆心, 半径为 $\sqrt{1 + t^2}$ 的一系列同心圆. 又因为 $|t| \leqslant 1$, 故此圆的最小半径为 1, 最大半径为 $\sqrt{2}$.

所以这个圆环的面积等于 $2\pi - \pi = \pi$.

这里通过两次代换，将较为复杂的复数问题，化归为熟知的实数中的问题，得出轨迹的参数方程，然后消去参数得到轨迹的普通方程，从而使我们对轨迹的图形有了清楚的认识.

范例 1.10 证明：不存在整数 a, b, c，满足 $a^2+b^2-8c=6$.

思考和分析 由于题目给出的已知条件比较抽象，不便于使用，故我们可考虑命题的结论．如果将 $a^2+b^2-8c=6$ 转化为两个数的平方和被 8 除余 6, 根据整数的性质，我们考虑整数关于模 4 的剩余类，可得十分巧妙的证法.

证明 由于每个整数都具有下列形式之一：

$$4n,\ 4n\pm 1,\ 4n+2,$$

它们的平方数分别是

$$16n^2,\ 16n^2\pm 8n+1,\ 16n^2+16n+4,$$

它们被 8 除的余数分别是 0, 1, 4. 而这三个余数的任意两数 (可以相同) 的和都不等于 6, 所以对任意整数 a, b, c, 不存在 $a^2+b^2-8c=6$.

范例 1.11 设实数 $a\neq 0, \{a_n\}$ 是以 a 为首项， $-a$ 为公比的等比数列，且 $b_n=a_n\lg|a_n|(n\in\mathbf{N})$, 问当 $0<a<1$ 时，是否存在自然数 m, 使对任意 $n\in\mathbf{N}$, 都有 $b_n\leqslant b_m$, 并证明你的结论. (1987 年广东高考题)

思考和分析 初看题目似乎很难下手，但只要我们冷静想一想，不妨假设存在 $m_0\in\mathbf{N}$, 使对任意 $n\in\mathbf{N}$, 都有 $b_n\leqslant b_{m_0}$, 也就是说 b_{m_0} 应该是数列 $\{b_n\}$ 的最大项，这样我们将问题化归为数列 $\{b_n\}$ 的最大项的存在性问题，从而就容易入手了.

解 因为 $0<a<1$, 所以

$$a_n=(-1)^{n-1}a^n,$$

$$b_n=(-1)^{n-1}a^n\lg a^n=(-1)^n na^n\lg\frac{1}{a}.$$

所以 $2|n$ 时 $b_n>0, 2\nmid n$ 时 $b_n<0$. 故数列 $\{b_n\}$ 的最大项只可能在 $2|n$ 时取到，这样我们只需在 $2|n$ 时考虑问题.

由于 $b_{2n}=2na^{2n}\lg\dfrac{1}{a}$, 则 $\dfrac{b_{2(n+1)}}{b_{2n}}=\dfrac{n+1}{n}a^2$, 故

当 $n\leqslant\dfrac{a^2}{1-a^2}$ 时， $\dfrac{b_{2(n+1)}}{b_{2n}}=\dfrac{n+1}{n}a^2\geqslant 1$, 则 $b_{2(n+1)}\geqslant b_{2n}$;

当 $n\geqslant\dfrac{a^2}{1-a^2}$ 时， $\dfrac{b_{2(n+1)}}{b_{2n}}=\dfrac{n+1}{n}a^2\leqslant 1$, 则 $b_{2(n+1)}\leqslant b_{2n}$.