全国考研辅导班教材系列

考研数学复习核心教程

（经济类）

主编　清华大学　何坚勇
　　　山东大学　潘　鑫
　　　大连理工大学　杨　剑

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

KAOYAN

全国考研辅导班教材系列

考研数学复习核心教程

(经济类)

主编 清华大学 何坚勇
山东大学 潘 鑫
大连理工大学 杨 剑

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习核心教程.经济类/何坚勇,潘鑫,杨剑主编.—北京:高等教育出版社,2008.4

ISBN 978-7-04-024186-0

Ⅰ.考… Ⅱ.①何…②潘…③杨… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033409 号

策划编辑 刘 佳 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波
责任校对 殷 然 **责任绘图** 朱 静 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2008 年 4 月第 1 版
印　　张	27.5	**印　　次**	2008 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	850 000	**定　　价**	46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24186-00

前　言

根据教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的最新要求，结合作者十余年来对考研数学的辅导经验，对近二十年考研真题的阅卷分析以及归纳研究后的体会，我们编写了这套《考研数学复习核心教程》。在编写时，作者特别注重针对考研学生的特点与需要，摒弃了通常教科书式的叙述方式，围绕考研学生复习时特别渴望的常考题型模式来编排。

本书各章（或节）主要由以下几部分构成：

一、**常考知识点精讲**——这部分内容主要是对考试大纲所要求的知识点进行全面的阐述，尤其是对常考题型中所反映出的考点、重点、难点进行深入的精讲。在部分内容的讲述中加入了"点评"。点评披露了历届考生在考卷中所反映出的对知识点的缺失、理解不到位之处或常犯的低级错误，同时给出了相应的正确理解及注意事项，以加深考生对基本概念的正确理解、对基本理论的深入掌握和对计算方法的熟练应用。

二、**常考题型及其解法与技巧**——这部分是本书的精华所在。首先我们将历年常考题目进行了梳理分类，归纳成约109个题型（其中高等数学55个，线性代数29个，概率论与数理统计25个），使考生对茫茫题海先有一个总体宏观上的清晰把握。对每一种题型都有详细的解答，对某些较难的常考题型或有典型意义的常考题型，在作详细解答之前，首先给出题解的"思路分析"，使考生不仅能学到这类题型的具体求解方法，而且能学到如何来分析求解这类题型的能力，使考生不仅"知其然"，而且能"知其所以然"。在详细解答之后，又往往给出了"评注"。"评注"主要是对这类题型的解题方法作一个归纳总结提炼：或上升到一般规律，或指出其难点所在，或指出其技巧点所在等等。掌握了数学题的解题技巧，往往可以事半功倍。经常有这样的情形：一个考研题用常规的解法可能需要12～14分钟，但若掌握了某些技巧点后，也许只要六七分钟，甚至三四分钟，这在考场上是多大的作用啊？而技巧的背后，实质上是对概念进一步的深入理解。我们相信技巧点的掌握对考生明年在考场上应试时必将发挥巨大的作用。

三、**知识点、考点测试**——这部分内容我们选择了与考研题相同类型的适量的自测题。学习数学、掌握数学必须做题，只有做了适量的题才才能检验且进一步巩固你所学到的数学知识，灵活运用这些知识、培养与锻炼分析问题与解决问题的能力。但是我们要强调的是学数学不做题不行，而"题海战术"也是不可取的。做题一是要适量，二是要精于做题，每做一题必有所获。

四、**参考答案与提示**——这部分给出了知识点、考点测试题中的答案，较难的题也给出了提示。我们希望考生作测试题时先不要翻看答案或提示，尽量先自己思考，反复捉摸，直至实在做不出来后再看答案或提示，且进一步查找自己不会做的原因：是对某些数学概念的理解不够深入甚至有错误，还是对某些定理运用的条件没有掌握，抑或是运用知识的灵活性不够，或是某个技巧点没有掌握，甚至是马虎所犯的低级错误等等。这样的原因查找对考生是十分必要的，是考生掌握运用数学知识，提高解题能力的一条捷径，其重要性甚至超过做题本身，只有这样做了，才能算得上精于做题。

作者在大学教了几十年的数学，因此对该领域的知识点、难点、考点以及学生的认识规律了然于胸。我们又有十多年的考研辅导经验，熟知考研学生最缺乏又最迫切需要掌握的是对考研题型的分析、把握能力。我们参加了十多年的考研数学阅卷工作，对近二十年的考题作了深入分析研究，因此，深谙命题的规律与陷阱以及考生最易犯的常见错误。

可以说："题型分类、分析点评、妙招迭出、指出错误"是本书的特点，我们深信考生深入学习本书后，对明年考研数学取得高分必将有极大的帮助。

作者

2008年3月

目 录

第一部分
微　积　分

第一章　函数、极限、连续

本章重点是掌握函数的极限概念，熟练地进行极限运算，运用极限进行无穷小的比较，函数连续性与间断点类型的判断. 本章难点在于利用极限与连续函数的性质证明某些命题或函数的某些性质.

§1.1　函　　数

本节重点是掌握函数的表示法，掌握基本初等函数的性质及其图形，了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

★ 常考知识点精讲

一、函数的定义

设在某个过程中，有两个变量 x 和 y，对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某一个确定的对应关系总有相应的值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

评注：两个函数相同，当且仅当定义域相同，并且对应关系 f 相同.

二、函数的性质

1. 奇偶性

定义　设 $y=f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称，如果对于 I 内任意一点 x 恒有，$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 I 内的偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 I 内的奇函数.

评注：(1) 在直角坐标系中，偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称；

(2) 可导奇函数的导函数是偶函数；

(3) 可导偶函数的导函数是奇函数；

(4) 奇函数的原函数是偶函数；

(5) 偶函数的原函数不一定是奇函数.

2. 有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x\in X$ 时，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 m，当 $x\in X$ 时，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界.

定义 3　设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $M>0$，当 $x\in X$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

命题 1　函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

命题 2　如果存在数列 $\{x_n\}$ $(x_n\in I)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，则 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

评注：(1) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在极限，则存在该点的一个去心邻域 U，在该邻域内 $f(x)$ 有界；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 任一个邻域内无界，反之不成立.

(3) 闭区间上的连续函数必定为有界函数. 如果 $f(x)$ 为 $(a,+\infty)$ 内的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 为 $(a,+\infty)$ 内的有界函数.

3. 周期性

定义　设$f(x)$定义在I上，若存在$T>0$，对任意的$x\in I$，必有$x\pm T\in I$，并且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数. 使得上关系式成立的最小正数T，称为$f(x)$的最小正周期，简称为函数$f(x)$的周期.

评注：若$f(x)$是以T为周期的可导函数，则其导函数也是以T为周期的周期函数.

4. 单调性

定义　设$f(x)$定义在区间I内，如果对于该区间内的任意两点$x_1<x_2$，恒有$f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I内单调增加(减少).

评注：判定函数$f(x)$单调性的方法为：
(1) 简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定；
(2) 复杂的初等函数或可导的抽象函数，用微分学的单调性判定定理来判定.

例 1.1　设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续奇函数，且满足$|f(x)|\leqslant M$，其中常数$M>0$，则函数$F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)\,dt$是$(-\infty,+\infty)$上的

(A) 有界奇函数　(B) 有界偶函数　(C) 无界偶函数　(D) 无界奇函数

分析　由于$F(-x)=\int_0^{-x}te^{-t^2}f(t)\,dt \xlongequal{t=-y} -\int_0^x -ye^{-y^2}f(-y)\,dy=-\int_0^x ye^{-y^2}f(y)\,dy=-F(x)$，

所以$F(x)$是奇函数. 对任意$x\geqslant 0$，有

$$|F(x)|\leqslant\int_0^x te^{-t^2}|f(t)|\,dt\leqslant M\int_0^x te^{-t^2}dt=\frac{M}{2}(1-e^{-x^2})\leqslant\frac{1}{2}M.$$

利用$F(x)$的对称性，当$x\leqslant 0$时，上面不等式也成立，从而函数是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数. 所以应选(A).

例 1.2　当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\neq 0$，且$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，则在$(-\infty,+\infty)$内，$f(x)$是

(A) 以π为周期的函数　(B) 以2π为周期的函数

(C) 以3π为周期的函数　(D) 不是周期函数

解　由题设知$f(x+\pi)\neq f(x)$，所以(A)不正确.

由于$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，所以

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=f[(x+\pi)+\pi]=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)\\&=[f(x)+\sin x]-\sin x=f(x),\end{aligned}$$

故$f(x)$是以2π为周期的函数. 故应选(B).

三、反函数、复合函数、初等函数、分段函数

1. 反函数

定义　设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为R. 若任意$y\in R$，有唯一确定的$x\in D$，使得$y=f(x)$，则记为$x=f^{-1}(y)$，称为$y=f(x)$的反函数.

评注：(1) 有时，也将$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$写成$y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图像重合. $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称.
(2) 若函数$y=f(x)$在D上单调，值域为R，则在R上$y=f(x)$存在单调的反函数.

2. 复合函数

定义　设函数$y=f(u)$的定义域为D，函数$u=\varphi(x)$的定义域为$\tilde{D}$，值域为$\tilde{R}$. 若$D\cap\tilde{R}\neq\varnothing$，则称函数$y=f[\varphi(x)]$为$x$的复合函数，它的定义域为$\{x|,x\in\tilde{D}$且$\varphi(x)\in D\}$.

3. 初等函数

定义　由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的，并能用一个数学表达式表示的

函数,称为初等函数.

评注:六类基本初等函数为:

$y=C$(常数); $y=x^{\alpha}$; $y=a^x(a>0,a\neq 1)$; $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$;

$y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$; $y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arc}\cot x$.

4. 分段函数

定义 在定义域内的不同范围用不同表达式表示的函数叫分段函数.

评注:常见的分段函数有:

(1) 绝对值函数 $|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\ -x,x<0.\end{cases}$

(2) 符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1,x>0\\ 0,x=0,\\ -1,x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数 $[x]$表示不超过x的最大整数.

例 1.3 设$f(x)=\begin{cases}1,|x|<1,\\ 0,|x|=1,\\ -1,|x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$,求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1,|\mathrm{e}^x|<1,\\ 0,|\mathrm{e}^x|=1,\\ -1,|\mathrm{e}^x|>1,\end{cases}$ 即$f[g(x)]=\begin{cases}1,x<0,\\ 0,x=0,\\ -1,x>0;\end{cases}$

$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^1,|x|<1,\\ \mathrm{e}^0,|x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1},|x|>1,\end{cases}$ 即$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e},|x|<1,\\ 1,|x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1},|x|>1.\end{cases}$

例 1.4 设$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,\\ x^2,1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x,4<x<+\infty,\end{cases}$ 求$f^{-1}(x)$.

分析 分段函数求反函数,只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

解 由$y=x,-\infty<x<1$可得$x=y,-\infty<y<1$;

由$y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$可得$x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$;

由$y=2^x,4<x<+\infty$可得$x=\log_2 y,16<y<+\infty$.

于是$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,\\ x^2,1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x,4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,\\ \sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x,16<x<+\infty.\end{cases}$$

★ 常考题型及其解法与技巧

题型一 求函数表达式

Ⅰ. 已知$f(x)$,$g(x)$的表达式求$f[g(x)]$的表达式

这类题解题一般思路是:用$g(x)$替换$f(x)$中的x,可得$f[g(x)]$的表达式.

例 1.1.1　设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$f[f(x)]$.

解　将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代,这种构成复合函数的方法叫代入法,该方法适用于初等函数之间的复合.

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

例 1.1.2　设$f(x)=\begin{cases}x,x\leqslant 0,\\ x+x^2,x>0,\end{cases}$ 则$f[f(x)]=$______.

解　抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,求出复合函数的表达式这种方法称为分析法.适应于分段函数参与的复合函数求表达式.

$f[f(x)]=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+f^2(x),f(x)>0,\end{cases}$ 而$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 0,f(x)>0\Leftrightarrow x>0$,

所以$f[f(x)]=\begin{cases}f(x),x\leqslant 0,\\ f(x)+f^2(x),x>0\end{cases}=\begin{cases}x,x\leqslant 0,\\ x+2x^2+2x^3+x^4,x>0.\end{cases}$

Ⅱ. 已知$f[g(x)]$的表达式,求$f(x)$的表达式.

这类题解题一般思路是:① 作变量代换,即令$g(x)=t$,解出$x=g^{-1}(t)$,求出$f(t)$的表达式;② 然后再将t换成x可得$f[g(x)]$的表达式.

例 1.1.3　已知$f(\ln x)=x^2(1+\ln x)$,求$f(x)$.

解　令$\ln x=t$,则$x=e^t$,从而$f(t)=e^{2t}(1+t)$,所以$f(x)=e^{2x}(1+x)$.

Ⅲ. 已知$f(x)$,$f[g(x)]$的表达式,求$g(x)$的表达式.

这类题解题一般思路是:① 将$g(x)$代替$f(x)$中的自变量x,得到$f[g(x)]$的表达式;② 令其与已知的$f[g(x)]$的表达式相等,即可解得$g(x)$的表达式.

例 1.1.4　已知$f(x)=3\ln x$, $f[g(x)]=\ln(1-2\ln x)$,求$g(x)$

解　由$f(x)=3\ln x$可得$f[g(x)]=3\ln g(x)$,又$f[g(x)]=\ln(1-2\ln x)$,所以

$$3\ln g(x)=\ln(1-2\ln x),$$

由上式可得$g(x)=\sqrt[3]{1-2\ln x}$.

Ⅳ. 已知$f(x)$满足某关系式求$f(x)$表达式

例 1.1.5　设对一切实数,$f(x)$满足关系式$f(x)+2f(1-x)=(x-1)^2$,求$f(x)$.

解　此题可利用函数的表示法与变量用何字母表示无关这一特性来解决.

所给关系式的左端含有$f(x)$,$f(1-x)$两项,将x,$1-x$互换,即令$1-x=t$代入原式可得

$$f(1-t)+2f(t)=t^2,$$

所以$\begin{cases}f(x)+2f(1-x)=(x-1)^2, & (1)\\ f(1-x)+2f(x)=x^2, & (2)\end{cases}$

由(1)、(2)两式可解得$f(x)=\dfrac{2x^2-(x-1)^2}{3}$.

> 评注:求函数表达式有时需涉及导数、积分、级数、微分方程等知识,对于这些题型将在后面的章节中讨论.

题型二　函数性质的理解

例 1.1.6　当$x\to 0$时,$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是

(A) 无穷小量　　(B) 无穷大量

(C) 有界量非无穷小量　　(D) 无界但非无穷大

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在,但在这个极限过程中重复取值0,1,显然不选(A)、(B)、(C).

事实上,令 $x_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$,由此排除(A),(C);

又令 $y_n=\frac{1}{n\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, $f(y_n)=0$,由此排除(B);

因此应选(D).

> **评注:本题关键在于弄清楚无穷大与无界的区别;无穷小与有界的区别(前者都能推出后者,但后者推不出前者),所以正确理解定义是关键.**

例 1.1.7 函数 $f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是

(A) 有界的偶函数　　(B) 无界的偶函数　　(C) 有界的奇函数　　(D) 无界的奇函数

解 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 x 是奇函数, $e^{-x^2}(2-\cos x)$ 是偶函数,于是

$f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

又因 $1\leqslant|2-\cos x|\leqslant3$,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有界取决于 $g(x)=xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有界. 因 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,故应选(C).

例 1.1.8 已知实数域 **R** 上的函数 $f(x)$ 为单调增加函数, $g(x)$ 为单调减少函数,下列复合函数单调减少的是

(A) $f[-g(x)]$　　(B) $g[f(x)]$　　(C) $f[f(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

解 对于(A),若 $x_1<x_2$,由于 $g(x)$ 为单调减少函数,所以 $g(x_1)>g(x_2)$,从而 $-g(x_1)<-g(x_2)$. 又因为 $f(x)$ 为单调增加函数,所以 $f[-g(x_1)]<f[-g(x_2)]$,因此 $f[-g(x)]$ 是单调增加的;

对于(B),若 $x_1<x_2$,由于函数 $f(x)$ 为单调增加函数,所以 $f(x_2)>f(x_1)$,又由于 $g(x)$ 为单调减少函数,所以 $g[f(x_2)]<g[f(x_1)]$,从而 $g[f(x)]$ 单调减少;

对于(C),若 $x_1<x_2$,由于函数 $f(x)$ 为单调增加函数,所以 $f(x_2)>f(x_1)$,从而有 $f[f(x_2)]>f[f(x_1)]$,因此 $f[f(x)]$ 单增;

对于(D),若 $x_1<x_2$,由于 $g(x)$ 为单调减少函数,所以 $g(x_1)>g(x_2)$,从而有 $g[g(x_1)]<g[g(x_2)]$,因此 $g[g(x)]$ 单增.

故应选(B).

例 1.1.9 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则__________

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数;

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数;

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数;

(D) 当 $f(x)$ 是单增函数时, $F(x)$ 必是单增函数;

解 由于奇函数的原函数必定是偶函数,偶函数的原函数不一定是奇函数;偶函数的导函数一定是奇函数,奇函数的导函数一定是偶函数. 所以应选(A).

例 1.1.10 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数, $f(1)=a$,且对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$f(x+2)=f(x)+f(2).$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$.

(2) a 取何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 由题设 $f(x)$ 是奇函数,且

$$f(x+2)=f(x)+f(2), \tag{1}$$

故当 $x=-1$ 时，由 $f(1)=f(-1)+f(2)$ 可得 $f(2)=2f(1)=2a$.

在(1)式中令 $x=1$ 得 $f(3)=f(1)+f(2)$，所以 $f(3)=3a$；再在(1)式中令 $x=3$ 得 $f(5)=f(2)+f(3)$，从而 $f(5)=5a$.

(2) 由 $f(2)=2a$ 知当且仅当 $a=0$ 时 $f(2)=0$，此时 $f(x+2)=f(x)$，故当 $a=0$ 时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

§1.2　无穷大与无穷小

本节重点是理解无穷小、无穷大及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小代换求极限.

★ 常考知识点精讲

一、无穷小的判定

函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

二、无穷小的性质

1. 有限多个无穷小的和、差、积仍然是无穷小.

2. 有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

例 2.1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

解　由于
$$\begin{aligned}\sin\sqrt{n^2+1}\pi&=\sin[(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)+n\pi]\\&=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)\\&=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以 $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小，又 $(-1)^n$ 有界，于是 $(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=0$.

三、无穷小比较

设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是无穷小，且 $\beta(x)\neq0$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ ($c\neq0$ 为常数)，则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.

> 评注：上面各式中 $x\to x_0$ 可改换为 $x\to\infty$.

例 2.2　设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时，有

(A) $f(x)$与x是等价无穷小量　　(B) $f(x)$与x是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$是比x较高阶的无穷小量　　(D) $f(x)$是比x较低阶的无穷小量

分析 $x\to 0$时,显然$f(x)$是一个无穷小量,比较$f(x)$与x的阶数,需要根据极限值进行判定.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2^x\ln 2+3^x\ln 3)=\ln 6\neq 1$,

所以$f(x)$与x是同阶但非等价无穷小量,故应选(B).

四、等价无穷小的替换定理

定理 设$x\to x_0$时,$\alpha(x),\beta(x),\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x)$都是无穷小,且$\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x),\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}$.

评注:(1) 求极限时,整个式子的乘、除因子可用其等价无穷小来代换,加、减时不能用等价无穷小代换,部分式子的乘、除因子也不能用等价无穷小代换;

(2) 几个常用的等价无穷小代换

设$x\to x_0$时,$u=u(x)\to 0$,则当$x\to x_0$时

$$\sin u\sim u,\arcsin u\sim u,\tan u\sim u,\arctan u\sim u,1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2,$$

$$\ln(1+u)\sim u,a^u-1\sim u\ln a,e^u-1\sim u,(1+u)^\alpha-1\sim\alpha u.$$

例 2.3 当$x\to 0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

解 (A) $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$,(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$,(D)$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2$,由排除法应选(B).

事实上$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t^2)-\ln(1-t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1}{1-t}\right)=1$.

例 2.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2+e^{\sin 2x}-1}{\sin x\cdot\ln(1+\tan x)}$.

分析 本题是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式求极限,若直接用洛必达法则会比较复杂,应先用等价无穷小代换化简,用等价无穷小代换化简时应注意所代换的部分必须为分子或分母中的乘积因式.

解 原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\sin x\cdot\ln(1+\tan x)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\sin x\cdot\ln(1+\tan x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\tan x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=2.$$

五、无穷小的阶

定义 设α,β都是$x\to x_0$时的无穷小,若存在$k>0$使得$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c$(非零的常数),则称$x\to x_0$时$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小.

例 2.5 $1+x^2-e^{x^2}$当$x\to 0$时是x的____阶无穷小(填数字).

分析　确定 $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x\to0$ 时是 x 的多少阶无穷小，即确定常数 n 使得极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}$ 为非零常数.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-2xe^{x^2}}{nx^{n-1}}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{nx^{n-2}}=-2\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{nx^{n-2}}$，

要使上极限值是非零常数充要条件是 $n-2=2$，即 $n=4$，所以是 4 阶无穷小.

六、极限和无穷小的关系

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

例 2.6　证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=m$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=m$，由极限和无穷小的关系得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=m+\alpha(x)\text{，其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

于是
$$f(x)=[m+\alpha(x)]g(x),$$
所以
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[m\cdot g(x)+\alpha(x)\cdot g(x)]=0.$$

七、无穷大

定义　任给 $M>0$，存在小正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

命题　如果存在一个数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=c$（常数），则 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

例 2.7　判断 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=x\sin x$ 是否为无穷大？

解　取 $x_n=2n\pi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，而 $f(x_n)=2n\pi\sin(2n\pi)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，于是 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=x\sin x$ 不是无穷大.

八、无穷大与无穷小的关系

命题　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

★ 常考题型及其解法与技巧

题型一　无穷小比较

Ⅰ. 对给定的两个无穷小进行比较

给出两个无穷小，探讨它们谁是高阶，谁是低阶，或讨论它们是否同阶或等价，这类题只要按定义去讨论即可.

例 1.2.1　选择题