



全国考研辅导班教材系列

考研数学

复习核心教程

(经济类)

主编 清华大学 何坚勇
山东大学 潘鑫剑
大连理工大学 杨剑



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013/468
:2009(4)
2008



全国考研辅导班教材系列

考研数学

复习核心教程

(经济类)

主编 清华大学 何坚勇
山东大学 潘 鑫
大连理工大学 杨 剑

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习核心教程. 经济类/何坚勇, 潘鑫, 杨剑
主编. —北京: 高等教育出版社, 2008. 4

ISBN 978 - 7 - 04 - 024186 - 0

I. 考… II. ①何…②潘…③杨… III. 高等数学 -
研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033409 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 蒋 青 封面设计 王凌波
责任校对 殷 然 责任绘图 朱 静 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司

印 刷 中青印刷厂

开 本 787 × 1092 1/16

印 张 27.5

字 数 850 000

购书热线 010 - 58581118

免费咨询 800 - 810 - 0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008 年 4 月第 1 版

印 次 2008 年 4 月第 1 次印刷

定 价 46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24186 - 00

前 言

根据教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的最新要求,结合作者十余年来对考研数学的辅导经验,对近二十年考研真题的阅卷分析以及归纳研究后的体会,我们编写了这套《考研数学复习核心教程》。在编写时,作者特别注重针对考研学生的特点与需要,摒弃了通常教科书式的叙述方式,围绕考研学生复习时特别渴望的常考题型模式来编排。

本书各章(或节)主要由以下几部分构成:

一、**常考知识点精讲**——这部分内容主要是对考试大纲所要求的知识点进行全面的阐述,尤其是对常考题型中所反映出的考点、重点、难点进行深入的精讲。在部分内容的讲述中加入了“点评”。点评披露了历届考生在考卷中所反映出的对知识点的缺失、理解不到位之处或常犯的低级错误,同时给出了相应的正确理解及注意事项,以加深考生对基本概念的正确理解、对基本理论的深入掌握和对计算方法的熟练应用。

二、**常考题型及其解法与技巧**——这部分是本书的精华所在。首先我们将历年常考题目进行了梳理分类,归纳成约 109 个题型(其中高等数学 55 个,线性代数 29 个,概率论与数理统计 25 个),使考生对茫茫题海先有一个总体宏观上的清晰把握。对每一种题型都有详细的解答,对某些较难的常考题型或有典型意义的常考题型,在作详细解答之前,首先给出题解的“思路分析”,使考生不仅能学到这类题型的具体求解方法,而且能学到如何来分析求解这类题型的能力,使考生不仅“知其然”,而且能“知其所以然”。在详细解答之后,又往往给出了“评注”。“评注”主要是对这类题型的解题方法作一个归纳总结提炼:或上升到一般规律,或指出其难点所在,或指出其技巧点所在等等。掌握了数学题的解题技巧,往往可以事半功倍。经常有这样的情形:一个考研题用常规的解法可能需要 12~14 分钟,但若掌握了某些技巧点后,也许只要六七分钟,甚至三四分钟,这在考场上是多大的作用啊?而技巧的背后,实质上是对概念进一步的深入理解。我们相信技巧点的掌握对考生明年在考场上应试时必将发挥巨大的作用。

三、**知识点、考点测试**——这部分内容我们选择了与考研题相同类型的适量的自测题。学习数学、掌握数学必须做题,只有做了适量的题才能检验且进一步巩固你所学到的数学知识,灵活运用这些知识、培养与锻炼分析问题与解决问题的能力。但是我们要强调的是学数学不做题不行,而“题海战术”也是不可取的。做题一是要适量,二是要精于做题,每做一题必有所获。

四、**参考答案与提示**——这部分给出了知识点、考点测试题中的答案,较难的题也给出了提示。我们希望考生作测试题时先不要翻看答案或提示,尽量先自己思考,反复捉摸,直至实在做不出来后再看答案或提示,且进一步查找自己不会做的原因:是对某些数学概念的理解不够深入甚至有错误,还是对某些定理运用的条件没有掌握,抑或是运用知识的灵活性不够,或是某个技巧点没有掌握,甚至是马虎所犯的低级错误等等。这样的原因查找对考生是十分必要的,是考生掌握运用数学知识,提高解题能力的一条捷径,其重要性甚至超过做题本身,只有这样做了,才能算得上精于做题。

作者在大学教了几十年的数学,因此对该领域的知识点、难点、考点以及学生的认识规律了然于胸。我们又有十多年的考研辅导经验,熟知考研学生最缺乏又最迫切需要掌握的是对考研题型的分析、把握能力。我们参加了十多年的考研数学阅卷工作,对近二十年的考题作了深入分析研究,因此,深谙命题的规律与陷阱以及考生最易犯的常见错误。

可以说:“题型分类、分析点评、妙招迭出、指出错误”是本书的特点,我们深信考生深入学习本书后,对明年考研数学取得高分必将有极大的帮助。

作者
2008 年 3 月

目 录

第一部分 微积分	1	其他	58
第一章 函数、极限、连续	2	§ 2.2 微分中值定理及导数应用	60
§ 1.1 函数	2	★ 常考知识点精讲	60
★ 常考知识点精讲	2	★ 常考题型及其解法与技巧	66
★ 常考题型及其解法与技巧	4	题型一 函数性态的研究	66
题型一 求函数表达式	4	题型二 一元函数最值问题	71
题型二 函数性质的理解	5	题型三 有关中值定理命题的证明	72
§ 1.2 无穷大与无穷小	7	题型四 方程根的讨论	77
★ 常考知识点精讲	7	题型五 不等式的证明	80
★ 常考题型及其解法与技巧	9	§ 2.3 导数在经济问题中的应用	85
题型一 无穷小比较	9	★ 常考知识点精讲	85
题型二 确定无穷小量的阶	12	★ 常考题型及其解法与技巧	86
§ 1.3 极限	13	第二章知识点、考点测试	88
★ 常考知识点精讲	13	参考答案与提示	92
★ 常考题型及其解法与技巧	16	第三章 一元函数积分学	93
题型一 数列的极限	16	§ 3.1 不定积分	94
题型二 函数的极限	22	★ 常考知识点精讲	94
题型三 中值定理中 θ 求极限	30	★ 常考题型及其解法与技巧	99
题型四 极限反问题	31	题型一 概念、性质的理解	99
§ 1.4 连续、间断	32	题型二 求各类函数的不定积分	100
★ 常考知识点精讲	32	题型三 积分递推公式的建立	105
★ 常考题型及其解法与技巧	35	其他	105
题型一 讨论函数的连续性	35	§ 3.2 定积分	106
题型二 连续反问题	36	★ 常考知识点精讲	106
题型三 讨论函数的间断点与间断点的 类型	37	★ 常考题型及其解法与技巧	111
题型四 闭区间上连续函数命题的证明	38	题型一 积分值符号的确定或积分 大小的比较	111
第一章知识点、考点测试	39	题型二 定积分的计算	112
参考答案与提示	42	题型三 变限定积分的讨论	118
第二章 一元函数微分学	43	题型四 积分等式的证明	120
§ 2.1 导数与微分	43	题型五 积分不等式的证明	124
★ 常考知识点精讲	43	§ 3.3 定积分的应用	128
★ 常考题型及其解法与技巧	47	★ 常考知识点精讲	128
题型一 导数与微分概念的理解	47	★ 常考题型及其解法与技巧	130
题型二 利用定义求导数	48	题型一 定积分在几何上的应用	130
题型三 求各类函数的导数与微分	50	题型二 平均值与经济应用	135
题型四 求高阶导数	55	§ 3.4 反常积分	135
题型五 导数几何意义的应用	57	★ 常考知识点精讲	136

★ 常考题型及其解法与技巧	137	★ 常考知识点精讲	201
题型一 概念的理解	137	★ 常考题型及其解法与技巧	201
题型二 反常积分的计算	138	第五章知识点、考点测试	204
第三章知识点、考点测试	140	参考答案与提示	206
参考答案与提示	143	第六章 无穷级数	207
第四章 多元函数微积分学	144	§ 6.1 数项级数	207
§ 4.1 多元函数微分法	144	★ 常考知识点精讲	208
★ 常考知识点精讲	144	★ 常考题型及其解法与技巧	211
★ 常考题型及其解法与技巧	151	题型一 概念、性质的理解	211
题型一 概念、性质的理解	151	题型二 数项级数敛散性的判定	213
题型二 多元函数的偏导数与全微分	153	题型三 数项级数敛散性的证明	217
§ 4.2 多元函数极值	160	其他	219
★ 常考知识点精讲	160	§ 6.2 幂级数	220
★ 常考题型及其解法与技巧	162	★ 常考知识点精讲	221
题型一 概念、性质的理解	162	★ 常考题型及其解法与技巧	225
题型二 求多元函数极值	163	题型一 阿贝尔定理的应用	225
其他	166	题型二 收敛半径、收敛区间、收敛域	225
§ 4.3 二重积分	166	题型三 函数项级数求收敛域	228
★ 常考知识点精讲	167	题型四 幂级数求和函数	229
★ 常考题型及其解法与技巧	170	题型五 将函数展开成幂级数	233
题型一 概念、性质的理解	170	第六章知识点、考点测试	238
题型二 交换积分次序	171	参考答案与提示	241
题型三 计算二重积分	172	第二部分 线性代数	243
题型四 二重积分证明题	178	第一章 行列式	244
其他	179	★ 常考知识点精讲	244
第四章知识点、考点测试	180	一、行列式的定义与性质	244
参考答案与提示	184	二、行列式的展开定理	246
第五章 常微分方程	184	三、几种特殊行列式的值	247
§ 5.1 一阶微分方程	184	四、有关行列式的若干个重要公式	248
★ 常考知识点精讲	185	五、克拉默法则	248
★ 常考题型及其解法与技巧	186	★ 常考题型及其解法与技巧	249
题型一 求解一阶微分方程	186	题型一 关于行列式的概念	249
题型二 一阶微分方程综合题型	189	题型二 关于高阶行列式的几种计算方法	251
§ 5.2 高阶线性微分方程	191	题型三 关于代数余子式的计算	256
★ 常考知识点精讲	191	题型四 抽象行列式的计算	257
★ 常考题型及其解法与技巧	193	★ 第一章知识点、考点测试	258
题型一 线性微分方程解的结构定理的理解	193	参考答案与提示	261
题型二 求解二阶常系数线性微分方程	194	第二章 矩阵	262
题型三 常系数线性微分方程反问题	197	★ 常考知识点精讲	262
§ 5.3 差分方程	197	一、矩阵的概念与线性运算	262
★ 常考知识点精讲	198	二、矩阵的其他运算	263
★ 常考题型及其解法与技巧	199	三、矩阵的秩	265
§ 5.4 微分方程的应用	201	四、分块矩阵	266

五、矩阵的初等变换与初等矩阵	268	四、实对称矩阵	334
★ 常考题型及其解法与技巧	271	★ 常考题型及其解法与技巧	335
题型一 矩阵的概念及运算	271	题型一 求矩阵的特征值与特征向量	335
题型二 有关逆矩阵的计算与证明	272	题型二 关于相似及相似对角化问题	340
题型三 矩阵方程	274	题型三 求 A 中参数或反求 A	344
题型四 三阶数字矩阵的高次幂运算	277	题型四 实对称矩阵	346
题型五 有关矩阵秩的命题	280	题型五 综合题	349
题型六 初等变换与初等矩阵	281	第五章知识点、考点测试	351
题型七 与伴随矩阵 A^* 有关的命题	283	参考答案与提示	353
第二章知识点、考点测试	284	第六章 二次型	355
参考答案与提示	286	★ 常考知识点精讲	355
第三章 n 维向量	290	一、二次型及其表示法	355
★ 常考知识点精讲	290	二、二次型的标准形与规范形	357
一、 n 维向量的概念及其运算	290	三、正定二次型及其判定	360
二、向量组的线性相关性	291	★ 常考题型及其解法与技巧	361
三、极大无关组与向量组的秩	294	题型一 二次型的基本概念与合同关系	361
四、内积与施密特(Schmidt)正交化	296	题型二 二次型化标准形与惯性定理	363
★ 常考题型及其解法与技巧	297	题型三 关于正定二次型	367
题型一 关于线性表出的命题	297	题型四 综合题	370
题型二 关于向量组的相关性的命题	299	第六章知识点、考点测试	371
题型三 求向量组的秩与极大无关组	302	参考答案与提示	373
题型四 施密特正交化	305	第三部分 概率论与数理统计	377
第三章知识点、考点测试	306	第一章 随机事件与概率	378
参考答案与提示	307	★ 常考知识点精讲	378
第四章 线性方程组	309	一、随机事件及其运算	378
★ 常考知识点精讲	309	二、概率及其基本性质	378
一、线性方程组的 4 种表示形式	309	三、概型、条件概率与独立性	379
二、线性方程组有解的判别条件	310	★ 常考题型及其解法与技巧	380
三、线性齐次方程组解的结构	310	题型一 关于事件运算及古典概型	380
四、线性非齐次方程组 $AX=b$ 解的结构	311	题型二 关于概率基本性质的应用	380
五、高斯消元法	311	题型三 关于条件概率的计算	381
★ 常考题型及其解法与技巧	312	题型四 关于事件独立性的问题	382
题型一 用高斯消元法求解方程组	312	第一章知识点、考点测试	383
题型二 有关解的概念、性质、判别条件	314	参考答案与提示	384
题型三 关于基础解系与通解	318	第二章 离散型随机变量	384
题型四 关于公共解与同解问题	319	★ 常考知识点精讲	384
题型五 综合题	322	一、一维情形基本概念与常见分布	384
第四章知识点、考点测试	324	二、二维情形基本概念及函数分布	385
参考答案与提示	327	★ 常考题型及其解法与技巧	387
第五章 矩阵的特征值与特征向量	330	题型一 关于分布函数的问题	387
★ 常考知识点精讲	330	题型二 关于常见分布的问题	387
一、特征值与特征向量	330	题型三 关于联合分布及相关问题	389
二、矩阵的相似	332	题型四 关于函数分布问题	390
三、矩阵的相似对角化	333	第二章知识点、考点测试	391

参考答案与提示	392	题型二 关于方差与协方差的计算	406
第三章 连续型随机变量	393	题型三 关于相关系数的计算及其与独立性 的关系问题	407
★ 常考知识点精讲	393	题型四 期望与方差的计算——分解法	409
一、一维情形基本问题与常见分布	393	第四章 知识点、考点测试	410
二、二维情形基本问题及函数分布	394	参考答案与提示	412
★ 常考题型及其解法与技巧	395	第五章 大数定律与中心极限定理	412
题型一 概率计算、密度函数及分布函数问题 (一维)	395	★ 常考知识点精讲	412
题型二 关于常见分布的问题(一维)	396	一、基本概念与定理	412
题型三 关于函数分布的问题(一维)	396	★ 常考题型及其解法与技巧	413
题型四 概率计算、密度函数及分布函数问题 (二维)	397	题型一 关于切比雪夫不等式的问题	413
题型五 边际分布、条件分布及独立性问题 (二维)	398	题型二 关于大数定律的问题	413
题型六 关于函数分布的问题(二维)	399	题型三 关于中心极限定理的问题	413
题型七 离散化函数分布及其他问题 (二维)	400	第五章 知识点、考点测试	414
第三章 知识点、考点测试	401	参考答案与提示	415
参考答案与提示	403	第六章 数理统计	415
第四章 数字特征	404	★ 常考知识点精讲	415
★ 常考知识点精讲	404	一、基本概念与抽样分布定理	415
一、数学期望与函数期望	404	二、参数估计	418
二、方差与协方差	405	三、假设检验	419
三、相关系数	405	★ 常考题型及其解法与技巧	423
★ 常考题型及其解法与技巧	405	题型一 关于抽样分布定理的问题	423
题型一 数学期望与函数期望的计算	405	题型二 关于参数估计的问题	424
		题型三 假设检验	426
		第六章 知识点、考点测试	427
		参考答案与提示	430

第一部分

微 积 分

第一章 函数、极限、连续

本章重点是掌握函数的极限概念,熟练地进行极限运算,运用极限进行无穷小的比较,函数连续性与间断点类型的判断.本章难点在于利用极限与连续函数的性质证明某些命题或函数的某些性质.

§ 1.1 函 数

本节重点是掌握函数的表示法,掌握基本初等函数的性质及其图形,了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

★ 常考知识点精讲

一、函数的定义

设在某个过程中,有两个变量 x 和 y ,对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某一个确定的对应关系总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

评注:两个函数相同,当且仅当定义域相同,并且对应关系 f 相同.

二、函数的性质

1. 奇偶性

定义 设 $y=f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称,如果对于 I 内任意一点 x 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 I 内的偶函数;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为 I 内的奇函数.

评注:(1) 在直角坐标系中,偶函数的图像关于 y 轴对称;奇函数的图像关于原点对称;

(2) 可导奇函数的导函数是偶函数;

(3) 可导偶函数的导函数是奇函数;

(4) 奇函数的原函数是偶函数;

(5) 偶函数的原函数不一定是奇函数.

2. 有界性

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 M ,当 $x \in X$ 时,恒有 $f(x) \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 m ,当 $x \in X$ 时,恒有 $f(x) \geq m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 $M > 0$,当 $x \in X$ 时,恒有 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

命题 1 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

命题 2 如果存在数列 $\{x_n\}$ ($x_n \in I$),使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$,则 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

评注:(1) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在极限,则存在该点的一个去心邻域 U ,在该邻域内 $f(x)$ 有界;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 任一个邻域内无界,反之不成立.

(3) 闭区间上的连续函数必定为有界函数.如果 $f(x)$ 为 $(a, +\infty)$ 内的连续函数,且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 为 $(a, +\infty)$ 内的有界函数.

3. 周期性

定义 设 $f(x)$ 定义在 I 上,若存在 $T>0$,对任意的 $x \in I$,必有 $x \pm T \in I$,并且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数.使得上关系式成立的最小正数 T ,称为 $f(x)$ 的最小正周期,简称为函数 $f(x)$ 的周期.

评注:若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数,则其导函数也是以 T 为周期的周期函数.

4. 单调性

定义 设 $f(x)$ 定义在区间 I 内,如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$,恒有 $f(x_1) < (>) f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加(减少).

评注:判定函数 $f(x)$ 单调性的方法为:

- (1) 简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定;
- (2) 复杂的初等函数或可导的抽象函数,用微分学的单调性判定定理来判定.

例 1.1 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续奇函数,且满足 $|f(x)| \leq M$,其中常数 $M > 0$,则函数 $F(x) = \int_0^x te^{-t^2} f(t) dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的

- (A) 有界奇函数 (B) 有界偶函数 (C) 无界偶函数 (D) 无界奇函数

分析 由于 $F(-x) = \int_0^{-x} te^{-t^2} f(t) dt \stackrel{t=-y}{=} - \int_0^x -ye^{-y^2} f(-y) dy = - \int_0^x ye^{-y^2} f(y) dy = -F(x)$,

所以 $F(x)$ 是奇函数.对任意 $x \geq 0$,有

$$|F(x)| \leq \int_0^x te^{-t^2} |f(t)| dt \leq M \int_0^x te^{-t^2} dt = \frac{M}{2}(1 - e^{-x^2}) \leq \frac{1}{2}M.$$

利用 $F(x)$ 的对称性,当 $x \leq 0$ 时,上面不等式也成立,从而函数是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数.所以应选(A).

例 1.2 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \neq 0$,且 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$,则在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $f(x)$ 是

- (A) 以 π 为周期的函数 (B) 以 2π 为周期的函数
(C) 以 3π 为周期的函数 (D) 不是周期函数

解 由题设知 $f(x+\pi) \neq f(x)$,所以(A)不正确.

由于 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$,所以

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= f[(x+\pi)+\pi] = f(x+\pi) + \sin(x+\pi) \\ &= [f(x) + \sin x] - \sin x = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数.故应选(B).

三、反函数、复合函数、初等函数、分段函数

1. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,值域为 R .若任意 $y \in R$,有唯一确定的 $x \in D$,使得 $y=f(x)$,则记为 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数.

评注:(1) 有时,也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.在同一坐标系中, $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在 D 上单调,值域为 R ,则在 R 上 $y=f(x)$ 存在单调的反函数.

2. 复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D ,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 \bar{D} ,值域为 \bar{R} .若 $D \cap \bar{R} \neq \emptyset$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数,它的定义域为 $\{x | x \in \bar{D} \text{ 且 } \varphi(x) \in D\}$.

3. 初等函数

定义 由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的,并能用一个数学表达式表示的

函数,称为初等函数.

评注:六类基本初等函数为:

$$y = C (\text{常数}); \quad y = x^a; \quad y = a^x (a > 0, a \neq 1); \quad y = \log_a x (a > 0, a \neq 1); \\ y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x; \quad y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arc} \cot x.$$

4. 分段函数

定义 在定义域内的不同范围用不同表达式表示的函数叫分段函数.

评注:常见的分段函数有:

$$(1) \text{ 绝对值函数 } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 符号函数 } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

例 1.3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

$$\text{解 } f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases} \quad \text{即 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0; \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases} \quad \text{即 } g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

例 1.4 设 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

分析 分段函数求反函数,只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

解 由 $y = x, -\infty < x < 1$ 可得 $x = y, -\infty < y < 1$;

由 $y = x^2, 1 \leq x \leq 4$ 可得 $x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16$;

由 $y = 2^x, 4 < x < +\infty$ 可得 $x = \log_2 y, 16 < y < +\infty$.

于是 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数为

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

★ 常考题型及其解法与技巧

题型一 求函数表达式

I. 已知 $f(x), g(x)$ 的表达式求 $f[g(x)]$ 的表达式

这类题解题一般思路是:用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x , 可得 $f[g(x)]$ 的表达式.

例 1.1.1 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f[f(x)]$.

解 将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代, 这种构成复合函数的方法叫代入法, 该方法适用于初等函数之间的复合.

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

例 1.1.2 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x+x^2, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 求出复合函数的表达式这种方法称为分析法. 适应于分段函数参与的复合函数求表达式.

$$f[f(x)] = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x) + f^2(x), & f(x) > 0, \end{cases} \quad \text{而 } f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0, f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$\text{所以 } f[f(x)] = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ f(x) + f^2(x), & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x + 2x^2 + 2x^3 + x^4, & x > 0. \end{cases}$$

II. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式, 求 $f(x)$ 的表达式.

这类题解题一般思路是: ① 作变量代换, 即令 $g(x) = t$, 解出 $x = g^{-1}(t)$, 求出 $f(t)$ 的表达式; ② 然后再将 t 换成 x 可得 $f[g(x)]$ 的表达式.

例 1.1.3 已知 $f(\ln x) = x^2(1 + \ln x)$, 求 $f(x)$.

解 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, 从而 $f(t) = e^{2t}(1+t)$, 所以 $f(x) = e^{2x}(1+x)$.

III. 已知 $f(x)$, $f[g(x)]$ 的表达式, 求 $g(x)$ 的表达式.

这类题解题一般思路是: ① 将 $g(x)$ 代替 $f(x)$ 中的自变量 x , 得到 $f[g(x)]$ 的表达式; ② 令其与已知的 $f[g(x)]$ 的表达式相等, 即可解得 $g(x)$ 的表达式.

例 1.1.4 已知 $f(x) = 3\ln x$, $f[g(x)] = \ln(1 - 2\ln x)$, 求 $g(x)$

解 由 $f(x) = 3\ln x$ 可得 $f[g(x)] = 3\ln g(x)$, 又 $f[g(x)] = \ln(1 - 2\ln x)$, 所以

$$3\ln g(x) = \ln(1 - 2\ln x),$$

由上式可得 $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2\ln x}$.

IV. 已知 $f(x)$ 满足某关系式求 $f(x)$ 表达式

例 1.1.5 设对一切实数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) + 2f(1-x) = (x-1)^2$, 求 $f(x)$.

解 此题可利用函数的表示法与变量用何字母表示无关这一特性来解决.

所给关系式的左端含有 $f(x)$, $f(1-x)$ 两项, 将 $x, 1-x$ 互换, 即令 $1-x = t$ 代入原式可得

$$f(1-t) + 2f(t) = t^2,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = (x-1)^2, \\ f(1-x) + 2f(x) = x^2, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

由(1)、(2)两式可解得 $f(x) = \frac{2x^2 - (x-1)^2}{3}$.

评注: 求函数表达式有时需涉及导数、积分、级数、微分方程等知识, 对于这些题型将在后面的章节中讨论.

题型二 函数性质的理解

例 1.1.6 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

- (A) 无穷小量 (B) 无穷大量
(C) 有界量非无穷小量 (D) 无界但非无穷大

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在, 但在这个极限过程中重复取值 0, 1, 显然不选 (A)、(B)、(C).

事实上, 令 $x_n = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 由此排除 (A)、(C);

又令 $y_n = \frac{1}{n\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, $f(y_n) = 0$, 由此排除 (B);

因此应选 (D).

评注: 本题关键在于弄清楚无穷大与无界的区别; 无穷小与有界的区别 (前者都能推出后者, 但后者推不出前者), 所以正确理解定义是关键.

例 1.1.7 函数 $f(x) = xe^{-x^2}(2 - \cos x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是

- (A) 有界的偶函数 (B) 无界的偶函数 (C) 有界的奇函数 (D) 无界的奇函数

解 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 x 是奇函数, $e^{-x^2}(2 - \cos x)$ 是偶函数, 于是

$f(x) = xe^{-x^2}(2 - \cos x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

又因 $1 \leq |2 - \cos x| \leq 3$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界取决于 $g(x) = xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界. 因 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 故应选 (C).

例 1.1.8 已知实数域 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 为单调增加函数, $g(x)$ 为单调减少函数, 下列复合函数单调减少的是

- (A) $f[-g(x)]$ (B) $g[f(x)]$ (C) $f[f(x)]$ (D) $g[g(x)]$

解 对于 (A), 若 $x_1 < x_2$, 由于 $g(x)$ 为单调减少函数, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$, 从而 $-g(x_1) < -g(x_2)$. 又因为 $f(x)$ 为单调增加函数, 所以 $f[-g(x_1)] < f[-g(x_2)]$, 因此 $f[-g(x)]$ 是单调增加的;

对于 (B), 若 $x_1 < x_2$, 由于函数 $f(x)$ 为单调增加函数, 所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 又由于 $g(x)$ 为单调减少函数, 所以 $g[f(x_2)] < g[f(x_1)]$, 从而 $g[f(x)]$ 单调减少;

对于 (C), 若 $x_1 < x_2$, 由于函数 $f(x)$ 为单调增加函数, 所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 从而有 $f[f(x_2)] > f[f(x_1)]$, 因此 $f[f(x)]$ 单增;

对于 (D), 若 $x_1 < x_2$, 由于 $g(x)$ 为单调减少函数, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$, 从而有 $g[g(x_1)] < g[g(x_2)]$, 因此 $g[g(x)]$ 单增.

故应选 (B).

例 1.1.9 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 _____

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数;
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数;
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数;
(D) 当 $f(x)$ 是单增函数时, $F(x)$ 必是单增函数;

解 由于奇函数的原函数必定是偶函数, 偶函数的原函数不一定是奇函数; 偶函数的导函数一定是奇函数, 奇函数的导函数一定是偶函数. 所以应选 (A).

例 1.1.10 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数, $f(1) = a$, 且对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$f(x+2) = f(x) + f(2).$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$.

(2) a 取何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 由题设 $f(x)$ 是奇函数, 且

$$f(x+2) = f(x) + f(2), \quad (1)$$

故当 $x = -1$ 时, 由 $f(1) = f(-1) + f(2)$ 可得 $f(2) = 2f(1) = 2a$.

在(1)式中令 $x = 1$ 得 $f(3) = f(1) + f(2)$, 所以 $f(3) = 3a$; 再在(1)式中令 $x = 3$ 得 $f(5) = f(2) + f(3)$, 从而 $f(5) = 5a$.

(2) 由 $f(2) = 2a$ 知当且仅当 $a = 0$ 时 $f(2) = 0$, 此时 $f(x+2) = f(x)$, 故当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

§ 1.2 无穷大与无穷小

本节重点是理解无穷小、无穷大及无穷小的阶的概念, 会用等价无穷小代换求极限.

★ 常考知识点精讲

一、无穷小的判定

函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

二、无穷小的性质

1. 有限多个无穷小的和、差、积仍然是无穷小.
2. 有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

例 2.1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

解 由于 $\sin \sqrt{n^2+1}\pi = \sin[(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi) + n\pi]$
 $= (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi)$
 $= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n},$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$, 所以 $\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$ 是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 又 $(-1)^n$ 有界, 于是 $(-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$ 是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{n^2+1}\pi = 0$.

三、无穷小比较

设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是无穷小, 且 $\beta(x) \neq 0$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ ($c \neq 0$ 为常数), 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.

评注: 上面各式中 $x \rightarrow x_0$ 可更换为 $x \rightarrow \infty$.

例 2.2 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量
 (C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

分析 $x \rightarrow 0$ 时, 显然 $f(x)$ 是一个无穷小量, 比较 $f(x)$ 与 x 的阶数, 需要根据极限值进行判定.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2^x \ln 2 + 3^x \ln 3) = \ln 6 \neq 1$,

所以 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量, 故应选(B).

四、等价无穷小的替换定理

定理 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x)$ 都是无穷小, 且 $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x), \beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}.$$

评注: (1) 求极限时, 整个式子的乘、除因子可用其等价无穷小来代换, 加、减时不能用等价无穷小代换, 部分式子的乘、除因子也不能用等价无穷小代换;

(2) 几个常用的等价无穷小代换

设 $x \rightarrow x_0$ 时, $u = u(x) \rightarrow 0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时

$$\sin u \sim u, \arcsin u \sim u, \tan u \sim u, \arctan u \sim u, 1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2,$$

$$\ln(1+u) \sim u, a^u - 1 \sim u \ln a, e^u - 1 \sim u, (1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u.$$

例 2.3 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

解 (A) $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, (D) $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$, 由排除法应选(B).

事实上 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t^2) - \ln(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1-t} \right) = 1.$

例 2.4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2 + e^{\sin^2 x} - 1}{\sin x \cdot \ln(1 + \tan x)}$.

分析 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式求极限, 若直接用洛必达法则会比较复杂, 应先用等价无穷小代换化简, 用等价无穷小代换化简时应注意所代换的部分必须为分子或分母中的乘积因式.

解 原极限 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sin x \cdot \ln(1 + \tan x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin x \cdot \ln(1 + \tan x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x \tan x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 2.$

五、无穷小的阶

定义 设 α, β 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 若存在 $k > 0$ 使得 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta^k} = c$ (非零的常数), 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 α 是 β 的 k 阶无穷小.

例 2.5 $1 + x^2 - e^{x^2}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时是 x 的 _____ 阶无穷小(填数字).

分析 确定 $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时是 x 的多少阶无穷小, 即确定常数 n 使得极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}$ 为非零常数.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2xe^{x^2}}{nx^{n-1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{x^2}}{nx^{n-2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{nx^{n-2}}$,

要使上极限值是非零常数充要条件是 $n-2=2$, 即 $n=4$, 所以是 4 阶无穷小.

六、极限和无穷小的关系

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

例 2.6 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = m$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = m$, 由极限和无穷小的关系得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = m + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0,$$

于是

$$f(x) = [m + \alpha(x)]g(x),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [m \cdot g(x) + \alpha(x) \cdot g(x)] = 0.$$

七、无穷大

定义 任给 $M > 0$, 存在小正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

命题 如果存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ (常数), 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

例 2.7 判断 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = x \sin x$ 是否为无穷大?

解 取 $x_n = 2n\pi$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 而 $f(x_n) = 2n\pi \sin(2n\pi) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, 于是 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = x \sin x$ 不是无穷大.

八、无穷大与无穷小的关系

命题 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

★ 常考题型及其解法与技巧

题型一 无穷小比较

I. 对给定的两个无穷小进行比较

给出两个无穷小, 探讨它们谁是高阶, 谁是低阶, 或讨论它们是否同阶或等价, 这类题只要按定义去讨论即可.

例 1.2.1 选择题