线性代数与几何

XIANXING DAISHU YU JIHE

[德]威廉·克林根贝尔格 著

沈纯理 郑 宇 译

XIANXING DAISHU YU JIHE

高等教育出版社

线性代数与几何

[德] 威廉·克林根贝尔格 著

沈纯理 郑宇 译

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/（德）克林根贝尔格著；沈纯理，郑宇译. —北京：高等教育出版社，1998. 9

ISBN 7-04-007340-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①克… ②沈… ③郑… Ⅲ. ①线性代数②几何 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 27442 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 320 000

1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 142

定价 25.00 元

(京)112号
图字：01—1995—332号

本书是线性代数和古典几何学的一本入门教材. 作者将这两门学科的内容有机地融合在一起，除了介绍线性代数、双线性代数的基础知识外，深入讨论了 Jordan 标准形及其应用，也涉及诸如 Hilbert 空间理论中的一些内容. 本书还包括了古典几何学，即仿射和欧氏几何以及射影几何，也介绍了按照 Klein 的观点所导出的两种非欧几何.

本书选材丰富、表述精练，不仅可以作为教师讲授此类课程的参考，也极适合于读者自学.

本书可作为大学、尤其是师范院校数学系的基础教材，也可供数学工作者参考.

译者的话

数学分析、高等代数和解析几何是高等院校数学专业最主要的三门基础课程. 随着科学技术的不断发展, 多年来人们一直致力于这些课程的更新和改造. 这三门课程的内容彼此有机地交叉联系着. 例如, 从本质上看, 解析几何中的二次曲线、二次曲面的分类与线性代数中的二次型的分类可以说是一回事. 人们一直希望能将这两门课程的内容有机地融合起来.

Klingenberg的“线性代数与几何”一书就是沿着这条思路所作出的一种尝试. 将此书从德文译成中文的目的就是向国内读者介绍这种改革的思路, 读者可以从中得到一些启发.

19世纪数学的重大成果之一是射影几何的发展及非欧几何的发现. 这是数学中的瑰宝. 然而近年来无论在国内还是在国外, 这一学科的内容渐渐地从大学的课程中消退. 除了少数师范院校外, 一般已不再向大学生讲授这方面的内容. Klingenberg的书本着删繁就简、保存精华的精神对这些内容按近代的观点加以处理后介绍给读者. 本书的内容也不单纯地限于经典的线性代数和几何学, 也涉及了诸如Hilbert空间理论等重要内容. 因此这本书是有相当的参考价值的.

本书是根据《Lineare Algebra und Geometrie》的第三版译出的. 在翻译的过程中, 作者又对第三版作了不少的修改, 译文中也作了相应的修改.

本书的作者Wilhelm Klingenberg教授是一位国际著名的、享有很高声誉的微分几何学家. 译者之一有幸在他所领导的德国波恩大学几何组工作过两年. 在此期间, 译者在学术、生活等方面曾得到Klingenberg教授极大的帮助. 如果这本书能对国内读者有所帮助的话, 那也就是译者对Klingenberg教授的一种很好的回报.

译者　沈纯理　郑宇

1998年7月于华东师范大学

第三版前言

怀着自豪和愉快的心情，我可以预告这本书的第三版即将出版．下述观念常能得以证实：线性代数并不单纯以其自身为目的，而是作为分析的基本辅助工具，而且首先是为了几何学而提出的．

我已经改正了少量我所发现的印刷错误．

柏林， 1992年5月　　　　威廉·克林根贝尔格

第二版前言

新版在三个方面有所改善．首先修正了一些错误，并使有些证明更一目了然．我的学生们给了我帮助，依靠了他们，我在三个学期的授课和讨论班中讲授了这些材料．进而，现在在每一章的最后可以找到习题； Hans-Bert Rademacher对此给了我以支持．最后，这本书是由Barbara Strahl以全新的方式用 TEX方法排版的 —— 我认为这是一个很大的进展．她做了这些，并提出了一些批评性的意见，并使许多材料显得层次分明．于是我可以希望我的这本最近的数学教科书会再一次受到重视．

波恩， 1989年5月　　　　威廉·克林根贝尔格

第一版前言

放在面前的这本书是从我在 Göttingen, Mainz 和 Bonn 多次讲过的课程中形成的. Mainz 的讲义是 1963/64 年由 K. H. Bartsch, K. Steffen 和 P. Klein 整理写成的. P. Klein 写出了代数部分的一个扩充的文本, 于 1971/73 年联名在文献研究所出版. 几何部分的出版计划没有实现.

随着我教学工作终点的临近, 我现在提交一个完整的文本, 我把它理解成 "解析几何". 这个文本以完全一般的形式将下列内容放在一起: 线性和双线性代数, 但也包括古典几何, 即仿射和欧氏几何以及射影几何和据此按照 Felix Klein 的观点所导出的两种非欧几何.

由于古典几何的范围很广, 我在讲课中自然只能展现其基础部分. 而且即使对基础部分, 我也只能讲到欧氏几何, 没有一次能讲到射影几何. 但无论如何我能清楚地做到, 只要将以前所发展的线性和双线性代数处置成它们今日的形态, 就能让大量的古典材料成为一目了然和容易理解.

现在我们在这本书中写得很多, 这些内容在两个学期中并不能全被讲完. 通过自学或在第三学期的讨论班的范围内, 学生能熟悉在今天已被强烈地忽视了的古典几何. 对此他不需要费力地与以前一代的那种陈旧的、冗长的文风打交道. 他在这里能找到下述许多内容, 例如三角形的接触圆、圆锥曲线、二次曲面、Dandelin 球面、仿射和射影几何的基本定理、非欧几何的共形模型、Clifford 曲面, 直至像 Morley 定理那样的珍品. 而且集所有这些于一卷的内容乃是人们从 (双) 线性代数中所必需知道的.

从一开始, 这些材料就按照随后所需要的一般性而被展现出来. 我已经放弃了教学预备阶段及动机说明. 对此我确信:

一个好事物的本身也说明了它自己. 一个还过得去的学生对接受一些"抽象"的定义并不会感到困难: 当他在课程的进程和应用中看到被导入的概念是如此地有用和十分重要, 因而他也会熟悉和学习它们, 并用它们来处理问题.

于是在整本书的一开始就介绍群. 作为由自身双射所得到的一种结构, 群的出现是完全自然的. 对向量空间, 首先没有限制维数是有限的, 因为函数空间乃是向量空间的最重要的例子. 随后可以清楚地看到, 放弃维数的有限性能通过一个附加结构而在相当大的程度上得到补偿; 对Hilbert空间, 这种结构甚至是完备的.

对复的及实的情形的Jordan标准型是用初等的方式来导出的. 我们用它来解常系数线性微分方程组, 且描述了对零解是稳定的这类方程组.

严格地说, 几何部分是从第7章开始的. 首先在一般的向量空间上考虑仿射空间和射影空间. 我们将二次型予以分类并证明, 在实数情形下, 余维数为1的二次型是刚性的. 仿射和射影几何的主要定理 (可用它来特征一般的直射变换)将通过 v. Staudt关于将射影直线上的调和四点列仍变换成调和四点列的双射的特征的定理而得到补充. 随后, 交比将在非欧几何中起着重要的作用.

在欧氏向量空间上的仿射空间给出了欧氏几何; 在它的射影空间上导致了椭圆几何. 当作为基础的向量空间带有一个Lorentz度量时, 我们得到了双曲几何. 共形模型和三角学的基本公式可被导出. 对于平面几何的运动群, 复数是重要的, 而对于空间几何的运动群, 四元数是重要的.

关于内容的进一步的细节, 可参阅下面的内容目录及索引.

最后我还想强调一次, 我更多地希望这本书仅仅作为一

本线性代数的进一步的、而且还是相当完整的教科书. 此外, 学生 —— 这里特别是指未来的教师 —— 应当熟悉古典几何. 这是我们欧洲文化的一个巨大的成就. 在年轻一代的头脑中, 古典几何被人讲成已经消亡了. 对此我想保存古典几何.

我的助手们已帮我读了校样. 有些错误在整个工作临近结尾时被我的同事 A. M. Pastore发现. Christine Sacher 打印了手稿, 这是一件艰苦的工作. 他们理应得到我的感谢.

波恩, 1983年11月　　　　威廉·克林根贝尔格

内容目录

第 1 章　一般基础概念
1.1　集合和映射 …… 1
1.2　群 …… 4
1.3　群态射 …… 7
1.4　等价关系和商群 …… 10
1.5　环和域 …… 15
习题 …… 19
第 2 章　向量空间
2.1　模和向量空间 …… 21
2.2　线性映射 …… 24
2.3　生成系和自由系 …… 27
2.4　基系 …… 30
2.5　有限维向量空间 …… 33
2.6　线性补 …… 36
习题 …… 39
第 3 章　矩阵
3.1　线性映射的向量空间 …… 42
3.2　对偶空间 …… 44
3.3　转置映射 …… 49
3.4　矩阵 …… 54
3.5　矩阵乘积 …… 59
3.6　秩 …… 63
习题 …… 67
第 4 章　线性方程和行列式
4.1　线性方程组 …… 70

4.2 Gauss消去法 …… 73
4.3 对称群 …… 76
4.4 行列式 …… 80
4.5 行列式展开定理 …… 87
习题 …… 90
第 5 章 特征值和标准型
5.1 特征值 …… 94
5.2 标准型、初等理论 …… 97
5.3 Hamilton-Cayley定理 …… 102
5.4 Jordan标准形 …… 106
5.5 常系数线性微分方程组 (复的情形) …… 115
5.6 **R**上的Jordan标准形 …… 118
5.7 线性常系数微分方程组 (实的情形) …… 124
习题 …… 127
第 6 章 度量向量空间
6.1 酉向量空间 …… 131
6.2 赋范向量空间 …… 139
6.3 Hilbert空间 …… 148
6.4 线性算子、酉群 …… 157
6.5 埃尔米特形式 …… 167
习题 …… 173
第 7 章 仿射几何
7.1 仿射空间 …… 178
7.2 仿射变换与直射变换、基本定理 …… 184
7.3 线性函数 …… 192
7.4 仿射二次型 …… 201
习题 …… 213

第 8 章　欧几里得几何
8.1　仿射 - 西空间 …… 218
8.2　线性函数和二次函数 …… 225
8.3　角度 …… 233
8.4　附录：四元数和 $SO(3)$, $SO(4)$ …… 243
8.5　三角学 …… 248
8.6　圆锥曲线 …… 260
习题 …… 277
第 9 章　射影几何
9.1　射影空间 …… 284
9.2　仿射空间的射影扩张 …… 288
9.3　附录：一般射影和仿射平面 …… 298
9.4　交比，v. Staudt 定理 …… 306
9.5　二次型和配极 …… 317
习题 …… 328
第 10 章　非欧几何
10.1　双曲空间 …… 331
10.2　双曲空间的共形模型 …… 341
10.3　椭圆几何 …… 357
10.4　椭圆空间的共形模型 …… 363
10.5　Clifford 平行线 …… 371
10.6　球面几何和三角学 …… 379
习题 …… 386

文献提示 …… 387
文献目录 …… 388
索引 …… 390

第 1 章

一般基础概念

1.1 集合和映射

我们考察集合 A, B, C, $\cdots$. 对于集合，我们不去讨论其形式化的叙述，只是把集合 A 看成将对象 x, y, z, $\cdots$ 收集在一起. 对我们来说，这样的叙述应该已经是足够的了. 集合中的对象 x 称为元素，我们把 x 属于集合 A 记为 $x \in A$. 有时我们也把集合 A 写成形如 $\{x, y, z, \cdots\}$, 即我们将 A 中的元素详尽地列举出来.

我们称集合 A 是集合 B 的一个子集，是指 A 中每个元素 x 也是 B 中的元素，记成： $A \subset B$. 当 $A \subset B$ 时，则用 $B \backslash A$ 表示由 $x \in B$, 但 $x \notin A$ 的元素 x 所构成的集合.

把空集记为 $\emptyset$ 是有用处的，它是一个没有元素的集合.

定义 1.1.1 设 A 和 B 是两个集合. 映射 $f: A \to B$ 是一种规则，它把每一个 $x \in A$ 恰好对应于一个 $y \in B$. 我们将这个 y 表示成 $f(x)$, 或者简单地记为 fx, 且称它为 x 的象. 如果 $fx = y$, 则称 x 为 y 的原象.

例 1.1.2 1. 设 $A = \mathbf{N} =$ 自然数集合 $\{0, 1, 2, \cdots\}$, 设 m 是一个固定的自然数. 用 "规则" $f(x) = mx$ 给出了一个映射 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

2. 称 $\mathrm{id}_A : A \to A$; $x \mapsto x$ 为从 A 到 A 上的恒同映射.

例 1.1.3 设 $f: A \to B$ 是一个映射.

1. 如果 $f(A) = \{f(x); x \in A\} = B$, 则称 f 为满射.

2. 如果对 A 中所有的偶 (x, x'), 从 $f(x) = f(x')$ 能推出 $x = x'$, 则称 f 为单射.

3. 如果 f 同时是满射和单射，则称 f 为双射.

命题1.1.4 如果$f:A\to B$是双射，则存在所谓的逆映射$f^{-1}:B\to A$: 当$y=f(x)$时，令$f^{-1}(y)=x$. f^{-1}也是双射.

证明: 因为f是满射，所以对每个$y\in B$, 存在$x\in A$使得$f(x)=y$. 又因为f是单射，所以对$y\in B$, 仅存在唯一的x, 使得$f(x)=y$. 因而f^{-1}是一个映射. 剩下部分是显然的. □

例1.1.5 1. 1.1.2中的映射$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$对每个$m>0$均为单射，这是因为由$mx=mx'$可推出$m(x-x')=0$, 于是$x-x'=0$. 但是对$m>1$, f不是满射.

2. 设$\mathbf{Z}$是所有整数的集合$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 映射

$$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N};\qquad x\mapsto\begin{cases}x, & \text{对 } x\geq 0\\ -x, & \text{对 } x\leq 0\end{cases}$$

是满射，但不是单射，因为对所有x, 有$f(-x)=f(x)$.

3. 设$\mathbf{Q}$是有理数集合$\left\{0,\pm\frac{p}{q};p,q\in\mathbf{N}^+=\mathbf{N}\backslash\{0\}\right\}$. 读者可验证映射:

$$f:x\in\mathbf{Q}\mapsto mx\in\mathbf{Q},\quad m\in\mathbf{N}\backslash\{0\}$$

是双射.

定义1.1.6 设$f:A\to B$, $g:B\to C$是两个映射. 于是可用$x\mapsto g(f(x))$构造出一个映射$g\circ f$. 称$g\circ f:A\to C$为f和g的复合.

注: 对于f和g的复合，请注意其次序是$g\circ f$, 而不是$f\circ g$. 这种记法的缘由是我们已约定记$f(x)$而不是$x(f)$.

命题1.1.7 设

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$$

是一些映射. 于是成立

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f,$$

因而我们就将它简记为$h\circ g\circ f$.

证明: 利用复合的定义:

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(x) &= h(g(f(x))) \\ &= (h\circ g)(f(x)) = ((h\circ g)\circ f)(x).\end{aligned}$$

□

命题1.1.8 如果$f:A\to B$和$g:B\to C$是

$$\left.\begin{array}{l}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{array}\right\},\qquad \text{则}\ g\circ f\ \text{也是}\left\{\begin{array}{l}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{array}\right..$$

证明: 设f和g是单射. 由$(f\circ g)(x)=(f\circ g)(x')$可得出$g(x)=g(x')$, 于是$x=x'$.

设f和g是满射. 因为$f(A)=B$, $g(B)=C$, 于是我们有$(g\circ f)(A)=C$. □

例1.1.9 在1.1.4中我们已指出, 对每一个双射$f:A\to B$, 存在着逆映射$f^{-1}:B\to A$. 于是有

$$f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_A;\qquad f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_B.$$

下列命题提供了反过来的事实.

命题1.1.10 设$f:A\to B$, $g:B\to A$为映射, 且$f\circ g=\mathrm{id}_B$. 于是f是满射, g是单射.

证明: 把$y\in B$写成$f(g(y))=y$, 于是f为满射. 由$g(y)=g(y')$可得出$y=f(g(y))=f(g(y'))=y'$, 于是g为单射. □

系1.1.11 $f:A\to B$为双射的充要条件是存在一个$g:B\to A$, 使得$f\circ g=\mathrm{id}_B$, $g\circ f=\mathrm{id}_A$, 且有$g=f^{-1}$. □

系1.1.12 设$f:A\to B$是双射. 于是$(f^{-1})^{-1}=f$.

证明: 由 1.1.9 及 $(f^{-1})^{-1}$ 的定义知道

$$f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_A;$$
$$f \circ f^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

应用 1.1.11 后即得. □

1.2 群

现在我们来看具有附加结构的集合的第一个，而且同时又是很重要的例子. 在定义中我们将用到由两个集合 A 和 B 所定义的所谓乘积集合 $A \times B$. 它是偶 (x, y) 的集合，其中 $x \in A$ 和 $y \in B$.

定义 1.2.1 群 G 是一个具有连接关系

$$G \times G \to G$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

的集合 (我们同样地用 G 来表示), 它满足下列的所谓群的公理:

1. 对 G 中所有的 x, y, z, 成立结合律

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

2. 存在一个所谓中性元 $e \in G$, 使得对所有 $x \in G$, 有

$$e \cdot x = x \cdot e = x.$$

3. 对每个 $x \in G$, 存在一个 $y \in G$, 使得

$$y \cdot x = e.$$

称y为x的左逆元.

例1.2.2 设M是一个任意的集合. 双射的集合S_M或Perm M(也被称为置换)构成一个群，这时我们已选用复合$g\circ f$作为其连接关系$f\cdot g$ (参见 1.1.6). 事实上，由1.1.7可知结合律成立， id_M是中性元，且按照1.1.9, f^{-1}是左逆元.

例1.2.3 如果对所有$(x,y)\in G\times G$, 成立$x\cdot y=y\cdot x$, 则称G是Abel群或交换群.

在这种情形下，我们常把$x\cdot y$写成$x+y$.

例1.2.4 1. 整数集合$\mathbf{Z}$在结合关系$(x,y)\mapsto x+y$下成为一个Abel群. 0是中性元， $-x$是x的左逆元.

2. 非零有理数集合$\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\backslash\{0\}$在结合关系$(x,y)\mapsto x\cdot y$下成为一个Abel群. 1是中性元， $\frac{1}{x}$是左逆元.

3. 三个元素的置换群$S_3\equiv S\{1,2,3\}$不是Abel群. 可以证明：例如，置换

$$\{1\mapsto 2,2\mapsto 1,3\mapsto 3\}\quad 和\quad \{1\mapsto 1,2\mapsto 3,3\mapsto 2\}$$

是不交换的.

命题1.2.5 1. 在群G中只存在唯一的中性元.

2. 在群G中，对$x\in G$, 只存在唯一的左逆元y, 且它亦为右逆元，即$x\cdot y=e$.

注: 对于x的唯一确定的右和左逆元y, 我们也写成x^{-1}或(当G是Abel群，且用+表示连接关系时) 写成$-x$. 我们也把$x+(-y)$写成$x-y$.

证明: 对1.: 设e, e'是G中的中性元，于是$e=e\cdot e'=e'$.

对2.: 设$y\cdot x=e$. 于是$y\cdot x\cdot y=e\cdot y=y$. 设$z$是$y$的左逆元. 应用结合律后，我们发现$x\cdot y=z\cdot y\cdot x\cdot y=z\cdot y=e$. 最后可从$y\cdot x=y'\cdot x$得出 $y\cdot x\cdot y=y'\cdot x\cdot y$, 于是$y=y'$. □

系1.2.6 $(x^{-1})^{-1}=x$; $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$.