普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等几何

第三版

梅向明 刘增贤 王汇淳 王智秋 编

3

高等几何的主要内容是射影几何，它起源于绘画和建筑学中的透视学，对早期射影几何学做出重要贡献的是两位法国数学家——德萨格和帕斯卡。射影几何产生后不久，很快就让位于代数、解析几何和微积分，德萨格等人的工作与结果也渐被人们所遗忘，到19世纪才又被人们重新发现……

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等几何

第三版

梅向明　刘增贤　王汇淳　王智秋　编

高等教育出版社

内容提要

本书是在第二版的基础上修订而成的，与第二版不同之处在于：新版中给出了欧氏几何的公理体系，具体到三维的情形；将原版的附录改编成第九章：实数域上的欧氏几何；将原第九章改成第十章：几何公理体系，这是包括三种几何公理体系的完整的几何公理体系。

本书可供高等师范院校数学系用作教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/梅向明等编.—3版.—北京：高等教育出版社，2008.4

ISBN 978-7-04-023600-2

Ⅰ.高… Ⅱ.梅… Ⅲ.高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 023881 号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张申申
责任绘图 吴文信　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 殷　然
责任印制 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	1983年11月
开　本	850×1168　1/32		2008年4月第3版
印　张	9.625	印　次	2008年4月第1次印刷
字　数	240 000	定　价	14.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 23600-00

第三版序言

这一版与第二版不同的地方是:我们在这一版中给出了欧氏几何的公理体系。具体到三维的情形,也就是人们熟悉的 Hilbert 几何公理体系。这样,我们就给出了完整的几何公理体系:其中包括了射影几何的公理体系、仿射几何的公理体系和欧氏几何的公理体系。

我们将第二版的附录改编成第九章:实数域上的欧氏几何,并把第二版的第九章改成第十章:几何公理体系。这是包括三种几何公理体系的完整的几何公理体系。

在第八章中,我们对仿射空间的概念作了一些调整。摒弃了旁集空间的提法,而把它定义为:挖去了无穷远超平面的射影空间。

本书 1983 年出版的时候,作者有一个想法,就是把传统的实数域上的二维和三维高等几何改造成一本一般数域上的高维高等几何。这一版的出版完成了这个任务,我相信:本书的内容将对读者进一步学习近代几何有所帮助。

希望使用本书的教师和学生,以及其他读者对本书的不足之处多提意见。

梅向明

2007 年 7 月于首都师范大学

第二版序言

“高等几何”是高等师范院校数学专业的基础课程之一。我们编写的《高等几何》(第一版),作为这门课程的教材,自从1983年出版以来,被许多兄弟院校所采用,我们表示衷心感谢。

但是,应该承认第一版教材从数学理论来检验是有缺陷的。因为我们采用的体系是从欧氏空间出发,然后添加无穷远元素,于是得到射影空间的概念。因此,我们第一版教材中介绍的射影几何不过是建立在欧氏几何的基础上的一种特殊的射影几何模型。从纯粹数学的观点来看,应该把叙述的顺序倒过来,先给出射影几何;然后去掉无穷远元素得到仿射几何;最后再引进度量得到欧氏几何。

高等几何、高等代数、数学分析统称“三高”,是高等师范院校数学专业的三门基础课程。但是,高等几何与其他两门课程相比,在数学专业中的地位就相形见绌了。其原因是多方面的,不过很重要的一个原因是:这门课程的内容,基本上是19世纪的遗产,太陈旧了,跟不上时代发展的要求。因此,多年来我们在高等几何课的教学过程中,不断地在探索这门课程内容的改革途径。

本教材第一版所采用的叙述方法是解析法,也就是用代数方法来讨论几何问题。因此,我们改革教材内容的主要想法是:把高等几何内容的更新和高等代数的发展接轨。这一版的内容我们从两个方面作了更新:第一,线性代数是本世纪高等代数中发展得比较成熟的部分,在高等几何中可以充分使用。因此我们可以直接讨论高维的射影几何和仿射几何,没有必要局限于低维;第二,传统的射影几何和仿射几何的内容都是在实数域上讨论的,最多是

扩充一些复元素。我们可以充分利用高等代数中"域"的知识,来讨论其他数体或数域上的射影几何和仿射几何。

这一版《高等几何》的内容大体上可以分成三部分:

第一部分是前六章介绍一维和二维射影几何和仿射几何的基本内容。我们保留了传统的讲法,也就是在欧氏平面的基础上介绍一维和二维射影几何和仿射几何,这是学生接受这两种几何最容易的方法。我们保留这部分内容的主要目的是:使学生对射影几何和仿射几何有初步、直观、具体的认识,在他们进一步学习抽象的高维射影几何和仿射几何理论时,脑子里有具体的模型。

第二部分是第七、八两章。在这两章中,我们介绍一般数体和数域上的高维射影几何和仿射几何,也就是把前六章的内容从维数和数域两方面进行推广。此外,我们改变了原来的叙述顺序,先在第七章中介绍射影几何,然后在第八章中介绍仿射几何,最后在附录中介绍实数域上的欧氏几何。第二部分内容是建立在向量空间概念的基础上的,为了方便读者,我们在第七章一开始扼要地复习了与本教材有关的群、体、域和向量空间的知识,对于熟悉这部分内容的读者来说,可以把它们略去。

为了帮助学生建立起抽象的射影几何和仿射几何的概念,我们在第三部分,即第九章,介绍了几何公理化方法,并给出了射影几何和仿射几何的公理体系。我们还严格论证了:用公理化方法定义的射影几何和仿射几何与第二部分中介绍的一般数体和数域上的射影几何和仿射几何是同构的,这就使我们的教材从理论上保持了完整性。此外,我们在附录的最后一节中介绍了 Hilbert 几何公理体系。它比起实三维仿射几何的公理体系只多了一组"合同公理",这组公理使我们可以在实三维仿射几何中引进度量,从而得到了实三维欧氏几何。因此,Hilbert 公理体系就是我们熟知的实三维欧氏几何的公理体系。最后还要说明的一点,我们在介绍各组几何公理时,遵循 Hilbert 的思想,比较详尽地讨论了它们之间的相容性、独立性和完备性,这可能是这本教材的一个特色。

这一版教材的第一、二、三、六章由刘增贤执笔,第四、五章由王智秋执笔,第七、八章由王汇淳执笔,第九章和附录由梅向明执笔。

使用这本教材时,我们有如下建议:如果教学计划中规定的高等几何课程的课时不够,则可以只讲授前六章,把其余三章作为一门选修课的教材;如果在解析几何课程中已经讲授了前六章的部分内容,则讲授高等几何课程时可以选讲前六章的部分内容,着重讲授后三章。

这一版《高等几何》教材是我们对传统高等几何课程内容改革的尝试,由于缺乏教学实践,存在缺点和错误在所难免。我们衷心希望使用这本教材的兄弟院校的老师们提出批评并给予指正。

梅向明

1998 年 9 月于首都师范大学

目　　录

第一章　仿射坐标与仿射变换

本章将阐明仿射变换的概念，并在仿射坐标系下研究图形经仿射变换后的不变量和不变性质.

§1　透视仿射对应

定义 1.1　共线三点 P_1, P_2, P 的单比表示为 (P_1P_2P)，我们定义

$$(P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_2P}$$

其中 P_1P, P_2P 是有向线段的数量，称 P_1, P_2 为基点，P 为分点.

显然，当 P 在 P_1、P_2 之间时，$(P_1P_2P) < 0$，否则 $(P_1P_2P) > 0$.

当 P 与 P_1 重合时，$(P_1P_2P) = 0$；P 与 P_2 重合时，(P_1P_2P) 不存在.

当 P 为线段 P_1P_2 的中点时，$(P_1P_2P) = -1$.

如果已知 P_1, P_2 两点，且 (P_1P_2P) 为定值时，则 P 点在直线 P_1P_2 上的位置唯一确定.

定义 1.2　在一平面上设有直线 a 和 a'，l 为此平面上与 a, a' 均不平行的另一直线，通过直线 a 上各点 $A, B, C, \cdots$ 分别作与 l 平行的直线，顺次交 a' 于 $A', B', C', \cdots$，这样便得到直线 a 上点到 a' 上点的一个一一对应，称为透视仿射对应，如图 1－1.

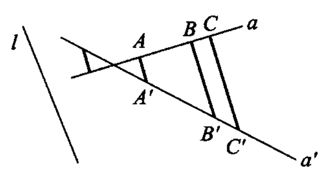

图 1－1

如果直线 a 和 a'相交,则交点是自对应点或称不变点(二重点).

仿此,可得空间二平面 π 和 π'间的透视仿射对应,如图1-2.

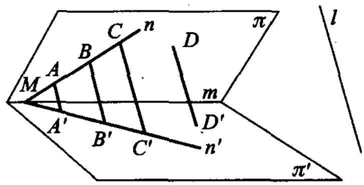

图 1-2

如果平面 π 和 π'相交于直线 m,则 m 上的每个点都是自对应点,并且在平面 π 和 π'间的透视仿射对应下的所有自对应点都在其交线 m 上,直线 m 叫做透视轴,简称轴. 如果平面 π 和 π'平行则无自对应点,也不存在透视轴了.

透视仿射对应的性质:

(1) 透视仿射对应保持同素性.

透视仿射对应使点对应点,直线对应直线,我们称这个性质为同素性.

(2) 透视仿射对应保持结合性.

如图 1-2 上,点 A,B,C 在直线 n 上,经过透视仿射对应后,其对应点 A',B',C'在对应直线 n'上,这就是说,透视仿射对应保持点和直线的结合关系.

(3) 透视仿射对应保持共线三点的单比不变.

在图 1-2 中,平面 π 内的共线三点 A,B,C,经过透视仿射对应后变为平面 π'内的共线三点 A',B',C',由于 AA',BB',CC'互相平行,所以有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

即

$$(ABC) = (A'B'C')$$

因此得到,透视仿射对应保持共线三点的单比不变.

(4) 透视仿射对应保持二直线的平行性.

如图 1-3,在平面 π 内,直线 $a /\!/ b$,$c /\!/ d$,经过平面 π 和 π' 间的透视仿射对应后,a 对应 a',b 对应 b',c 对应 c',d 对应 d',容易证明 $a' /\!/ b'$,$c' /\!/ d'$.

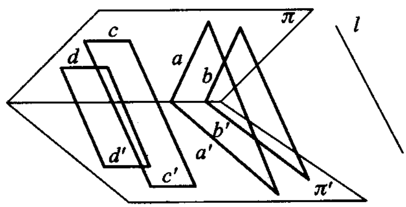

图 1-3

§2 仿射对应与仿射变换

定义 2.1 设同一平面内有 n 条直线 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,如图 1-4. $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2,a_2 到 a_3,$\cdots$,a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射对应,经过这一串透视仿射对应,使 a_1 上的点与 a_n 上的点建立了一一对应,这个对应称为 a_1 到 a_n 的仿射对应,用 φ 表示,于是有

$$\varphi = \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} \cdot \cdots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

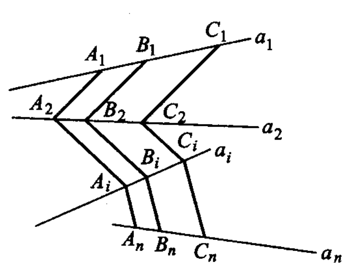

图 1-4

如果直线 a_1 与 a_n 重合,则 a_1 到 a_n 的仿射对应叫做直线 a_1 到自身的仿射变换.

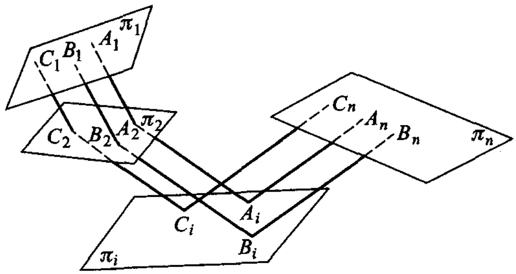

图 1－5

仿此可以得到二平面间的仿射对应，如图 1－5. 平面 π_1 到 π_n 的仿射对应 $\varphi=\varphi_{n-1}\cdot\varphi_{n-2}\cdot\cdots\cdot\varphi_2\cdot\varphi_1$.

所以两平面间的仿射对应也是有限次透视仿射对应的结果.

当 π_1 与 π_n 重合时，φ 称为平面 π_1 到自身的仿射变换.

由于仿射对应和仿射变换都是一串透视仿射对应的乘积（称为透视仿射对应链），因此不难证明它们具有下列性质：

（1）保持同素性和结合性；

（2）保持共线三点的单比不变；

（3）保持直线的平行性.

但对两个点集来讲，在仿射对应下，对应点连线不一定平行.

我们也可以直接用前两个性质定义仿射对应（变换）.

定义 2.2 若两个平面间（平面到自身）的一个点对应（变换）保持同素性、结合性和共线三点的单比不变，则这个点对应（变换）称为仿射对应（变换）.

注意 在这个定义下，可以证明仿射对应（变换）保持两直线的平行性.

据此还可以证明，平行四边形经仿射对应（变换）后，对应图形仍为平行四边形；两条平行线段经仿射对应（变换）后，其长度之比不变.