ZHONGXUE SHUXUE JIAOYU JIAOXUE LUNCONG

中学数学教育教学论丛

下

■ 刘云汉 著

云南民族出版社

ZHONGXUE SHUXUE JIAOYU JIAOXUE LUNCONG

中学数学教育教学论丛

下

刘云汉 著

云南民族出版社

谨以本书作为对耿马一中建校 50 周年的献礼。

同时也将本书献给数学教育工作者、关心数学教育的人们和广大中学生朋友。

目　　录

初中数学专题研究

从高考试题谈轨迹方程的求法

求轨迹方程是解析几何中的一个重要问题，因此历年高考中都有涉及动点轨迹的考题．我们知道，曲线可看作是具有某些共同性质的点的轨迹，求轨迹方程就是要找到动点 P（x，y）所具有的几何性质，找出等量关系，将这些关系坐标化，从而得到关于 x、y 的方程．

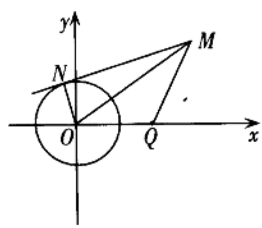
求轨迹方程的方法，最常用的有：直接法、定义法、相关点法、参数法和待定系数法，此外还有几何法、复数法、极坐标法等．

一、直接法

如果题设条件中有明显的等量关系，可用直接法求出轨迹方程．

例 1 已知直角坐标平面上一点 Q（2，0）和圆 C：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 C 的切线长等于圆 C 的半径与 $|MQ|$ 的和，求动点 M 的轨迹方程，说明它表示什么曲线，并画出草图．

［1994 年全国高考试题（理）］



解：如图，设 M（x，y）为轨迹上的任意一点，切线长 $|MN|=\sqrt{OM^2-ON^2}$.

根据题意，得 $\sqrt{OM^2-ON^2}=|MQ|+1$，

即 $\sqrt{x^2+y^2-1}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}+1$，

化简，整理，得$\dfrac{(x-\frac{4}{3})^2}{\frac{1}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \qquad (x\geqslant\frac{5}{3})$.

它表示以点（$\frac{4}{3}$，0）为中心，实轴在 x 轴上的双曲线的右支.

二、定义法

如果能够确定动点的轨迹满足某种已知曲线的定义，那么就可用曲线的定义写出方程，这种方法叫做定义法.

例 2 一动圆与两定圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切，则动圆圆心的轨迹为（ ）.

A. 抛物线； B. 圆； C. 双曲线一支； D. 椭圆.

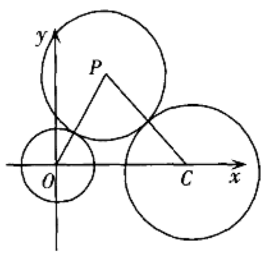
分析：如图，设动圆圆心为 P（x，y）.

圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 可化作

$$(x-4)^2+y^2=4.$$

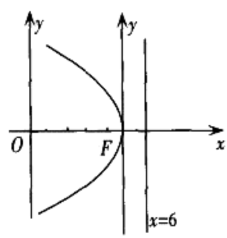
可见，圆心为 C（4，0），半径为2.

则有 $|PC|-|PO|=1$.



根据双曲线的定义，P 点的轨迹是以 O、C 为焦点，实轴长为 1 的双曲线的左支. 故选 C.

例 3 到椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 右焦点的距离与到直线 $x=6$ 的距离相等的动点轨迹的方程是________. [1988 年上海高考试题]



分析：由抛物线的定义知，动点的轨迹是抛物线. 抛物线的焦点就是椭圆的右焦点.

在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 中，$a^2=25$，$b^2=9$，

$c^2=a^2-b^2=16$. $c=4$.

$\therefore$ 抛物线的焦点为 F（4，0）.

抛物线的准线为 $x=6$.

$\therefore p=2$，顶点为（5，0），开口向左.

$\therefore$ 所求的轨迹方程为　$y^2=-2\cdot2(x-5)$.

即　$y^2=-4(x-5)$.

三、相关点法

如果轨迹动点 $P(x,y)$ 依赖于另一动点 $Q(x_0,y_0)$，而 $Q(x_0,y_0)$ 又在某已知曲线上，则可先列出关于 x、y、x_0、y_0 的方程组，利用 x、y 表出 x_0、y_0，再把 x_0、y_0 代入已知的曲线方程便得动点 P 的轨迹方程. 这种方法称为相关点法或代入法.

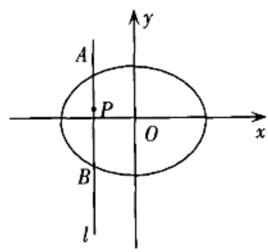
例 4　设动直线 l 垂直于 x 轴，且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A、B 两点，P 是 l 上满足 $|PA|\cdot|PB|=1$ 的点，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

［1992 年上海高考试题］

解： 如图，设点 P 的坐标为 (x,y)，点 A 的坐标为 (x,y_1)，则点 B 的坐标为 $(x,-y_1)$.

$\because A$、B 两点在椭圆上，

$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{{y_1}^2}{2}=1$　①



$\Rightarrow\ 1-\frac{x^2}{4}=\frac{{y_1}^2}{2}\ \Rightarrow\ 1-\frac{x^2}{4}\geqslant0.$

$-2<x<2.$

$\because |PA|=|y_1-y|$，　$|PB|=|y_1+y|$，

$|PA|\cdot|PB|=1$，

$\therefore |y_1-y|\cdot|y_1+y|$，$\Rightarrow|{y_1}^2-y^2|=1$，

$\Rightarrow y_1{}^2 - y^2 = \pm 1$，$\Rightarrow$ $y_1{}^2 = y^2 \pm 1$.

将 $y_1{}^2 = y^2 + 1$ 和 $y_1{}^2 = y^2 - 1$ 分别代入①式，得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 和 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$（$-2 < x < 2$）.

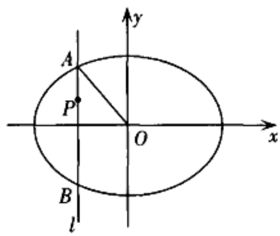
可见，所求的轨迹是椭圆$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 及椭圆$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 夹在两直线 $x = 2$，$x = -2$ 之间的部分.

四、参数法

当动点的坐标 x、y 之间的直接关系不易建立时，可以选取与动点密切相关的另一个变量 t 作为参数，建立轨迹的参数方程，消去参数 t 后就得轨迹的普通方程. 这种方法称为参数法.

例 5 设动直线 l 垂直于 x 轴，且与椭圆$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 A、B 两点，P 是 l 上满足 $|PA| \cdot |PB| = 1$ 的点，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

［1992 年上海高考题］



解：如图，椭圆$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 就是椭圆$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = \sqrt{2}\sin\theta. \end{cases}$

因此，可设 A（$2\cos\theta$，$\sqrt{2}\sin\theta$），B（$2\cos\theta$，$-\sqrt{2}\sin\theta$），P（$2\cos\theta$，y）.

$\because |PA| \cdot |PB| = 1$，

$\therefore |y - \sqrt{2}\sin\theta| \cdot |y + \sqrt{2}\sin\theta| = 1$，

即 $y^2 = 2\sin^2\theta \pm 1$.

$\therefore$ P 点的轨迹的参数方程为：

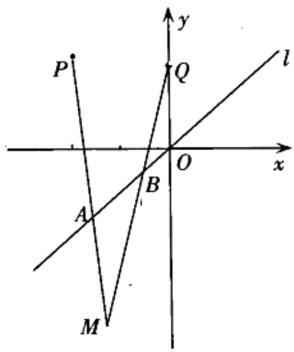
$$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y^2 = 2\sin^2\theta \pm 1. \end{cases}$$

消去参数 θ，得$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$（$-2<x<2$）

及 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

即 P 点的轨迹是椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 及椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 夹在两直线 $x=\pm2$ 之间的部分.

例6 已知两点 $P(-2, 2)$、$Q(0, 2)$ 以及一条直线 l：$y=x$. 设长为$\sqrt{2}$的线段 AB 在直线 l 上移动，求直线 PA 和 QB 交点 M 的轨迹方程.



解：如图，设 $A(t, t)$，则 $B(t+1, t+1)$.

可得直线 AP：$y-2=\frac{t-2}{t+2}(x+2)$，

直线 BQ：$y-2=\frac{t-1}{t+1}x$，

将上述两直线方程联立，解得

$$\begin{cases} x=\frac{t^2-t-2}{t}, \\ y=\frac{t^2-t+2}{t}. \end{cases}$$

这就是 M 的轨迹的参数方程.

消去参数 t（由 $x=y-\frac{4}{t}$，得 $t=\frac{4}{y-x}$代入上式，整理）得所求点 M 的轨迹方程为：

$$x^2-y^2+2x-2y+8=0.$$

五、待定系数法

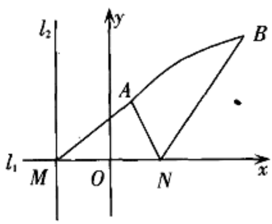
待定系数法在解析几何中有着非常广泛的应用，在求轨迹方

程中也常用到待定系数法.

例7 如图，直线 l_1 和 l_2 相交于点 M，$l_1 \perp l_2$，点 $N \in l_1$，以 A、B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形，$|AM| = \sqrt{17}$，$|AN| = 3$，且 $|BN| = 6$. 建立适当的坐标系，求曲线段 C 的方程.

[1998 年全国高考试题]

解： 以 l_1 为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系如图.



依题意知，曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛物线的一段，其中 A、B 分别为 C 的端点.

设曲线段 C 的方程为：

$y^2 = 2px$ （$p > 0$，$x_A \leqslant x \leqslant x_B$，$y > 0$）其中 x_A、x_B 分别为 A、B 的横坐标.

$p = |MN|$，

$\therefore M\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$，$N\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

由 $|MN| = \sqrt{17}$，$|AN| = 3$ 得

$$\begin{cases} \left(x_A + \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_A = 17, & ① \\ \left(x_A - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_A = 9. & ② \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{4}{p}$$

代入①，并由 $p > 0$，解得

$$\begin{cases} p = 4, \\ x_A = 1. \end{cases} \text{或} \begin{cases} p = 2, \\ x_A = 2. \end{cases}$$

$\because \triangle AMN$ 是锐角三角形，

$\therefore \frac{p}{2} > x$， 故舍去$\begin{cases} p=2, \\ x_A=2. \end{cases}$

$\therefore p=4$，$x_A=1$.

由点 B 在曲线段 C 上，设 $x_B=|BN|-\frac{p}{2}=4$.

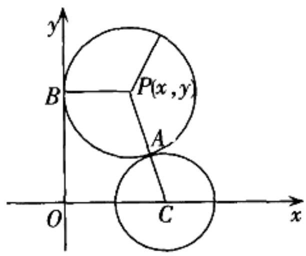
故曲线 C 的方程为 $y^2=8x$.（$1\leqslant x\leqslant 4$，$y>0$）.

六、几何法

充分利用平面几何知识，分析轨迹所满足的几何条件，从而求出轨迹方程，这种方法叫几何法.

例 8 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 外切，且与 y 轴相切的动圆圆心 P 的轨迹方程为________.

［1996 年上海高考试题］



分析：如图，设 $P(x, y)$

$(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(2, 0)$.

依题意，得

$|PC|-|CA|=|PA|=|PB|$，

即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x$，

化简，整理得 $y^2=6x-3$.

例 9 已知一动圆和定圆 C_1：$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 外切，并且和定圆 C_2：$x^2+y^2-10x-4y-71=0$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程.

解：设动圆圆心 C 的坐标为 (x, y)，半径为 r.

已知定圆 C_1：$(x+1)^2+(y-2)^2=4$，

$$C_2: (x-5)^2+(y-2)^2=100.$$

因⊙C 和⊙C_1 外切，⊙C 和⊙C_2 内切，由平面几何知识知，

$|C_1C|=r+2$，$|C_2C|=10-r$.

由此得$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=(r+2)^2 & ①\\(x-5)^2+(y-2)^2=(10-r)^2 & ②\end{cases}$

①-②得　　$r=\frac{x+6}{2}$.　　③

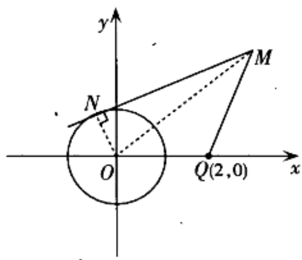
③代入①得　$3x^2+4y^2-12x-16y-80=0$.

这就是动圆圆心 C 的轨迹方程.

因 $B^2-4AC=-48<0$，故这是一个椭圆.

七、复数法

将问题的已知条件转化为复数关系式，通过复数运算，得出复数形式的轨迹方程，然后再化为直角坐标系下的方程，这种方法称为复数法.



例 10　已知直角坐标平面上一点 Q（2，0）和圆 C：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 C 的切线长等于圆 C 的半径与 $|MQ|$ 的和，求动点 M 的轨迹方程，说明它表示什么曲线，并画出草图.

［1994 年全国高考试题（理）］

解：如图，设动点 M（x，y）所对应的复数为 $Z=x+yi$（x，$y\in R$），切点 N 所应的复数为 Z_N.

则由已知条件得

$|Z-Z_N|=|Z-2|+1$，

两边平方，得 $|Z-Z_N|^2=|Z-2|^2+2|Z-2|+1$.

又　$|Z-Z_N|^2=|Z|^2-1^2$

$\therefore |Z|^2-1=|Z-2|^2+2|Z-2|+1$

$=(Z-2)(\overline{Z-2})+2|Z-2|+1$，

$Z\overline{Z}-1=(Z-2)(\overline{Z}-2)+2|Z-2|+1$.

$\Rightarrow\ |Z-2|=Z+\overline{Z}-3$.

将 $Z=x+yi$ 代入，得 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2x-3 \quad (x\geqslant\frac{3}{2})$.

化简，整理，得$\dfrac{(x-\frac{4}{3})^2}{\frac{1}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \ (x\geqslant\frac{3}{2})$.

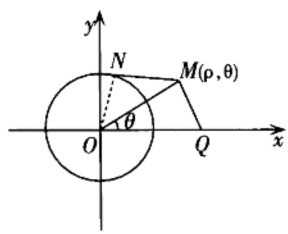
它表示以点（$\frac{4}{3}$，0）为中心，实轴在 x 轴上的双曲线的右支.

八、极坐标法

选取适当的极坐标系，求得极坐标系内的轨迹方程，这种方法称为极坐标法．极坐标法求轨迹方程常用于绕定点旋转的轨迹问题．

例 11　已知直角坐标平面上点 Q（2，0）和圆 C：$x^2+y^2=1$. 动点 M 到圆 C 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 λ（$\lambda>0$），求动点 M 的轨迹方程，说明它表示什么曲线．

［1994 年全国高考试题（文）］



解：以 O 为极点，x 正半轴为极轴，建立极坐标系，则圆 C 的方程为 $\rho=1$.

设点 M 的坐标为（ρ，θ），

已知点 Q 的坐标为（2，0）.

连结 ON，在 $Rt\triangle ONM$ 中，

$|MN|=\sqrt{\rho^2-1}$.

在$\triangle OQM$ 中，由余弦定理得

$|MQ|=\sqrt{4+\rho^2-4\rho\cos\theta}$.

$\because \dfrac{|MN|}{|MQ|}=\lambda \ (\lambda>0)$,

即$\dfrac{\sqrt{\rho^2-1}}{\sqrt{4+\rho^2-4\rho\cos\theta}}=\lambda.$

两边平方，化简，得（$1-\lambda^2$）$\rho^2+4\rho\lambda^2\cos\theta-1-4\lambda^2=0.$

当$\lambda\neq1$时，方程可化为：

$$\rho^2-2\cdot\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\rho\cos\theta+\left(\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{\lambda^2-1}\right)^2=0.$$

即 $$x^2+y^2-2\cdot\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}x+\left(\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{\lambda^2-1}\right)^2=0,$$

$$\left(x-\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{\lambda^2-1}\right)^2.$$

表示以（$\dfrac{2\lambda}{\lambda^2-1}$，0）为圆心，半径$r=\dfrac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{|\lambda^2-1|}$的圆.

当$\lambda=1$时，方程化为$\rho\cos\theta=\dfrac{5}{4}$，即$x=\dfrac{5}{4}$，表示过点（$\dfrac{5}{4}$，0）且垂直于$x$轴的直线.