

ZHONGXUE SHUXUE JIAOYU JIAOXUE LUNCONG

中学数学教育 教学论丛

下

■ 刘云汉 著

云南民族出版社

ZHONGXUE SHUXUE JIAOYU JIAOXUE LUNCONG

中学数学教育 教学论丛

下

■ 刘云汉 著

云南民族出版社

谨以本书作为对耿马一中建校 50 周年的献礼。

同时也将本书献给数学教育工作者、关心数学教育的人们和广大中学生朋友。



目 录

从高考试题谈轨迹方程的求法	(1)
利用圆锥曲线的定义解题	(11)
求双曲线方程的方法和技巧	(17)
抛物线的焦点弦问题	(25)
例说韦达定理在解析几何中的应用	(35)
曲线的对称性及其应用	(41)
一元二次方程根的判别式的应用举例	(49)
切线问题	(57)
解立体几何问题的一个重要方法	
——平面化方法	(74)
应用方程的思想解立体几何问题举隅	(78)
变换观察角度, 寻求简捷解法	(84)
解排列组合应用问题的几种分析思考方法	(91)
非常规的排列组合问题例析	(99)
二项式定理及其应用	(108)
一些有趣的组合恒等式的证明及其应用	(116)
随机事件概率计算中的几类典型问题	(123)
漫谈解数学题中的智与巧	(130)
解复数问题的若干策略	(137)
复数相等的充要条件的应用	(148)
复数、轨迹与平面区域	(153)
公开教学教案(一)	(161)
公开教学教案(二)	(165)

初中数学专题研究

浅谈因式分解教学中思维能力的培养	(175)
------------------------	-------

因式分解的思维体操	(182)
巧拆项, 妙分解	(186)
列方程解应用题的教学探讨	(189)
算术平方根与二次根式	(202)
怎样用数形结合思想分析问题	(208)
图像法解方程(组)	(213)
应用韦达定理解二元二次方程组	(215)
求二次函数解析式的方法和技巧	(218)
二次函数式中的 a 、 b 、 c 与图像的关系	(223)
解方程的若干方法和技巧	(232)
平面几何问题添加辅助线的几种思路	(240)
从近两年中考题看有关切线和圆幂定理的应用	(247)

附录一 刘云汉数学教育教学论文发表及获奖情况

一览表	(261)
-----------	-------

附录二 诗歌小集

春日登白塔山	(275)
春游	(275)
如梦令(春游有感)	(275)
即事(二首)	(276)
有感	(276)
假期隐居读书即事	(276)
读怀高编《中学物理例题与习题》及题咏, 戏和之	(277)
题《论文习作》扉页	(277)
春城遇友	(277)
庆祝第一个教师节兼纪念当教师二十五周年	(278)
住院, 辗转病床, 仿陆放翁诗抒怀	(278)
永遇乐	
——纪念耿马一中建校 30 周年	(278)
夏日油毛毡教室中上课(二首)	(278)

寄女	(279)
观本校高考成绩有感 诚后来少年 (二首)	(279)
南京览胜	(279)
立秋日游鼋头渚	(280)
重到杭州	(280)
游西湖	(280)
夜雨	(280)
京云民族中学重建落成感怀	(281)
初次到北京	(281)
正月十五日游颐和园	(281)
圆明园遗址怀古	(281)
游杜甫草堂	(282)
入云南	(282)
鹧鸪天 (怀远)	(282)
赠朝龙	(282)
述怀	(283)
白塔山怀远	(283)
重阳节呈母亲 (二首)	(283)
春兰	(284)
题美琼小照	(284)
学数学三题	(284)
(一) 联想	(284)
(二) 解题	(284)
(三) 顿悟	(284)
除夕夜思	(284)
病中吟	(285)
住院思归	(285)
示儿 (二首)	(285)
读近代史有感	(286)
摊破浣溪沙 (庆祝香港回归祖国)	(286)
寻仙源	(286)

(一) 童叟问答	(286)
(二) 悟彻	(286)
浣溪沙(夏日)	(287)
观电视水情遥寄人民解放军官兵	(287)
游贵州黄果树瀑布	(287)
车阻无量山(二首)	(287)
观耿马电视台专题节目《三十三年耕耘路》，美琼 被评为云南省优秀教师有赠(二首)	(288)
闻被评为特级教师有感	(288)
耿马京云民族中学建校四十周年感怀	(288)
耿马一中一九七九届高中同学聚会有赋(寄调永遇乐)	(289)
庆祝澳门回归	(289)
寄语青年学生组诗(五首)	(289)
退休感怀	(292)
应邀参加耿中一九八一届高中同学聚会即席有赋(二首)	(294)
二〇〇二年岁末撰联抒怀	(295)
庆祝第十九个教师节(寄调临江仙)	(295)
重阳节寄小妹	(295)
寄杨凯	(296)
新年登广州白云山	(296)
春晓	(296)
白马广场抒情	(297)
重阳楼抒情(二首)	(297)
寄杨庚明、黄文兴(二首)	(297)
读《民族时报》总第215期专题载文：《普洱“唐时 代”，庆阳归来》	(298)
《中学数学教育教学论丛》即将出版感怀	(299)
后记	(301)

从高考题谈轨迹方程的求法

求轨迹方程是解析几何中的一个重要问题，因此历年高考中都有涉及动点轨迹的考题。我们知道，曲线可看作是具有某些共同性质的点的轨迹，求轨迹方程就是要找到动点 $P(x, y)$ 所具有的几何性质，找出等量关系，将这些关系坐标化，从而得到关于 x, y 的方程。

求轨迹方程的方法，最常用的有：直接法、定义法、相关点法、参数法和待定系数法，此外还有几何法、复数法、极坐标法等。

一、直接法

如果题设条件中有明显的等量关系，可用直接法求出轨迹方程。

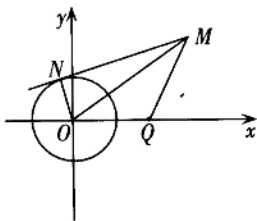
例1 已知直角坐标平面上一点 $Q(2, 0)$ 和圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，动点 M 到圆 C 的切线长等于圆 C 的半径与 $|MQ|$ 的和，求动点 M 的轨迹方程，说明它表示什么曲线，并画出草图。

[1994 年全国高考试题 (理)]

解：如图，设 $M(x, y)$ 为轨迹上的任意一点，切线长 $|MN| = \sqrt{OM^2 - ON^2}$ 。

根据题意，得 $\sqrt{OM^2 - ON^2} = |MQ| + 1$ ，

$$\text{即 } \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 1,$$



化简, 整理, 得 $\frac{(x - \frac{4}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \quad (x \geq \frac{5}{3}).$

它表示以点 $(\frac{4}{3}, 0)$ 为中心, 实轴在 x 轴上的双曲线的右支.

二、定义法

如果能够确定动点的轨迹满足某种已知曲线的定义, 那么就可由曲线的定义写出方程, 这种方法叫做定义法.

例2 一动圆与两定圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 都外切, 则动圆圆心的轨迹为 ().

A. 抛物线; B. 圆; C. 双曲线一支; D. 椭圆.

分析: 如图, 设动圆圆心为 $P(x, y)$.

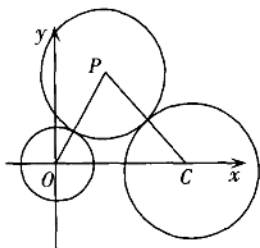
圆 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 可化作

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4.$$

可见, 圆心为 $C(4, 0)$, 半径为 2.

则有 $|PC| - |PO| = 1$.

根据双曲线的定义, P 点的轨迹是以 O, C 为焦点, 实轴长为 1 的双曲线的左支. 故选 C.

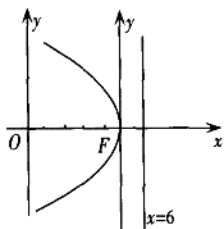


例3 到椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 右焦点的距离与到直线 $x = 6$ 的距离相等的动点轨迹的方程是_____. [1988 年上海高考试题]

分析: 由抛物线的定义知, 动点的轨迹是抛物线. 抛物线的焦点就是椭圆的右焦点.

在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16. \quad c = 4.$$



$\therefore$ 抛物线的焦点为 $F(4, 0)$.

抛物线的准线为 $x=6$.

$\therefore p=2$, 顶点为 $(5, 0)$, 开口向左.

$\therefore$ 所求的轨迹方程为 $y^2 = -2 \cdot 2(x-5)$.

即 $y^2 = -4(x-5)$.

三、相关点法

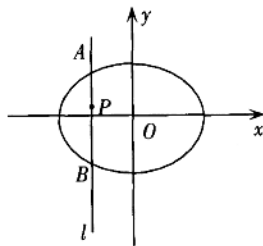
如果轨迹动点 $P(x, y)$ 依赖于另一动点 $Q(x_0, y_0)$, 而 $Q(x_0, y_0)$ 又在某已知曲线上, 则可先列出关于 x, y, x_0, y_0 的方程组, 利用 x, y 表出 x_0, y_0 , 再把 x_0, y_0 代入已知的曲线方程便得动点 P 的轨迹方程. 这种方法称为相关点法或代入法.

例4 设动直线 l 垂直于 x 轴, 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 A, B 两点, P 是 l 上满足 $|PA| \cdot |PB| = 1$ 的点, 求点 P 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.

[1992 年上海高考试题]

解: 如图, 设点 P 的坐标为 (x, y) , 点 A 的坐标为 (x, y_1) , 则点 B 的坐标为 $(x, -y_1)$.
 $\therefore A, B$ 两点在椭圆上,

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad ①$$



$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{y_1^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{4} \geq 0.$$

$$-2 < x < 2.$$

$$\therefore |PA| = |y_1 - y|, \quad |PB| = |y_1 + y|,$$

$$|PA| \cdot |PB| = 1,$$

$$\therefore |y_1 - y| \cdot |y_1 + y| = 1 \Rightarrow |y_1^2 - y^2| = 1,$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y^2 = \pm 1, \Rightarrow y_1^2 = y^2 \pm 1.$$

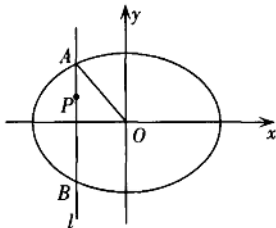
将 $y_1^2 = y^2 + 1$ 和 $y_1^2 = y^2 - 1$ 分别代入①式, 得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 和 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($-2 < x < 2$).

可见, 所求的轨迹是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 及椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 夹在两直线 $x=2$, $x=-2$ 之间的部分.

四、参数法

当动点的坐标 x 、 y 之间的直接关系不易建立时, 可以选取与动点密切相关的另一个变量 t 作为参数, 建立轨迹的参数方程, 消去参数 t 后就得轨迹的普通方程. 这种方法称为参数法.

例 5 设动直线 l 垂直于 x 轴, 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 A 、 B 两点, P 是 l 上满足 $|PA| \cdot |PB| = 1$ 的点, 求点 P 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.



[1992 年上海高考题]

解: 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 就是椭圆 $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = \sqrt{2}\sin\theta. \end{cases}$

因此, 可设 $A(2\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$, $B(2\cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta)$, $P(2\cos\theta, y)$.

$$\because |PA| \cdot |PB| = 1,$$

$$\therefore |y - \sqrt{2}\sin\theta| \cdot |y + \sqrt{2}\sin\theta| = 1,$$

$$\text{即 } y^2 = 2\sin^2\theta \pm 1.$$

$\therefore P$ 点的轨迹的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y^2 = 2\sin^2\theta \pm 1. \end{cases}$$

消去参数 θ , 得 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($-2 < x < 2$)

及 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

即 P 点的轨迹是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 及椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 夹在两直线 $x = \pm 2$ 之间的部分.

例6 已知两点 $P(-2, 2)$ 、 $Q(0, 2)$ 以及一条直线 $l: y = x$. 设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 l 上移动, 求直线 PA 和 QB 交点 M 的轨迹方程.

解: 如图, 设 $A(t, t)$, 则 $B(t+1, t+1)$.

可得直线 $AP: y - 2 = \frac{t-2}{t+2}(x+2)$,

直线 $BQ: y - 2 = \frac{t-1}{t+1}x$,

将上述两直线方程联立, 解得

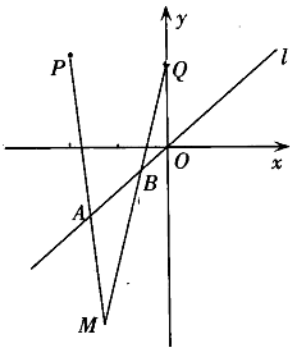
$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - t - 2}{t}, \\ y = \frac{t^2 - t + 2}{t}. \end{cases}$$

这就是 M 的轨迹的参数方程.

消去参数 t (由 $x = y - \frac{4}{t}$, 得 $t = \frac{4}{y-x}$ 代入上式, 整理) 得

所求点 M 的轨迹方程为:

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 8 = 0.$$



五、待定系数法

待定系数法在解析几何中有着非常广泛的应用, 在求轨迹方

程中也常用到待定系数法.

例7 如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 M , $l_1 \perp l_2$, 点 $N \in l_1$, 以 A 、 B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|AM| = \sqrt{17}$, $|AN| = 3$, 且 $|BN| = 6$. 建立适当的坐标系, 求曲线段 C 的方程.

[1998 年全国高考试题]

解: 以 l_1 为 x 轴, MN 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系如图.

依题意知, 曲线段 C 是以点 N 为焦点, 以 l_2 为准线的抛物线的一段, 其中 A 、 B 分别为 C 的端点.

设曲线段 C 的方程为:

$y^2 = 2px$ ($p > 0$, $x_A \leq x \leq x_B$, l_1 为 x 轴, O 为原点, M 在 x 轴负半轴, N 在 x 轴正半轴) 其中 x_A 、 x_B 分别为 A 、 B 的横坐标.

$$p = |MN|,$$

$$\therefore M\left(-\frac{p}{2}, 0\right), N\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

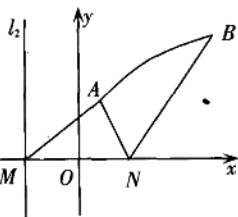
由 $|MN| = \sqrt{17}$, $|AN| = 3$ 得

$$\begin{cases} (x_A + \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 17, & \text{①} \\ (x_A - \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 9. & \text{②} \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{4}{p}$$

代入①, 并由 $p > 0$, 解得

$$\begin{cases} p=4, \\ x_A=1. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} p=2, \\ x_A=2. \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN$ 是锐角三角形,



$$\therefore \frac{p}{2} > x, \quad \text{故舍去} \begin{cases} p=2, \\ x_A=2. \end{cases}$$

$$\therefore p=4, x_A=1.$$

由点 B 在曲线段 C 上, 设 $x_B = |BN| - \frac{p}{2} = 4$.

故曲线 C 的方程为 $y^2 = 8x$. ($1 \leq x \leq 4, y > 0$).

六、几何法

充分利用平面几何知识, 分析轨迹所满足的几何条件, 从而求出轨迹方程, 这种方法叫几何法.

例8 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 外切, 且与 y 轴相切的动圆圆心 P 的轨迹方程为_____.

[1996 年上海高考试题]

分析: 如图, 设 $P(x, y)$

$(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 C

$(2, 0)$.

依题意, 得

$$|PC| - |CA| = |PA| = |PB|,$$

$$\text{即 } \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 1 = x,$$

$$\text{化简, 整理得 } y^2 = 6x - 3.$$

例9 已知一动圆和定圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 外切, 并且和定圆 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 4y - 71 = 0$ 内切, 求动圆圆心的轨迹方程.

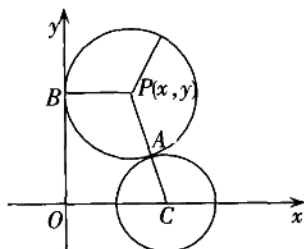
解: 设动圆圆心 C 的坐标为 (x, y) , 半径为 r .

已知定圆 $C_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$,

$$C_2: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 100.$$

因 $\odot C$ 和 $\odot C_1$ 外切, $\odot C$ 和 $\odot C_2$ 内切, 由平面几何知识知,

$$|C_1C| = r + 2, \quad |C_2C| = 10 - r.$$



$$\text{由此得} \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2 & \textcircled{1} \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 = (10-r)^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } r = \frac{x+6}{2}. \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 3x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 80 = 0.$$

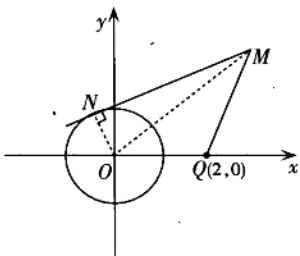
这就是动圆圆心 C 的轨迹方程.

因 $B^2 - 4AC = -48 < 0$, 故这是一个椭圆.

七、复数法

将问题的已知条件转化为复数关系式, 通过复数运算, 得出复数形式的轨迹方程, 然后再化为直角坐标系下的方程, 这种方法称为复数法.

例 10 已知直角坐标平面上一点 $Q(2, 0)$ 和圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 动点 M 到圆 C 的切线长等于圆 C 的半径与 $|MQ|$ 的和, 求动点 M 的轨迹方程, 说明它表示什么曲线, 并画出草图.



[1994 年全国高考试题 (理)]

解: 如图, 设动点 $M(x, y)$ 所对应的复数为 $Z = x + yi$ ($x, y \in R$), 切点 N 所应的复数为 Z_N .

则由已知条件得

$$|Z - Z_N| = |Z - 2| + 1,$$

两边平方, 得 $|Z - Z_N|^2 = |Z - 2|^2 + 2|Z - 2| + 1.$

$$\text{又 } |Z - Z_N|^2 = |Z|^2 - 1^2$$

$$\therefore |Z|^2 - 1 = |Z - 2|^2 + 2|Z - 2| + 1$$

$$= (Z - 2)(\overline{Z} - 2) + 2|Z - 2| + 1,$$

$$\overline{Z}Z - 1 = (Z - 2)(\overline{Z} - 2) + 2|Z - 2| + 1.$$

$$\Rightarrow |Z - 2| = Z + \overline{Z} - 3.$$

将 $Z = x + yi$ 代入, 得 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2x - 3 \quad (x \geq \frac{3}{2})$.

化简, 整理, 得 $\frac{(x - \frac{4}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \quad (x \geq \frac{3}{2})$.

它表示以点 $(\frac{4}{3}, 0)$ 为中心, 实轴在 x 轴上的双曲线的右支.

八、极坐标法

选取适当的极坐标系, 求得极坐标系内的轨迹方程, 这种方法称为极坐标法. 极坐标法求轨迹方程常用于绕定点旋转的轨迹问题.

例 11 已知直角坐标平面上点 $Q(2, 0)$ 和圆 $C: x^2 + y^2 = 1$. 动点 M 到圆 C 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 λ ($\lambda > 0$), 求动点 M 的轨迹方程, 说明它表示什么曲线.

[1994 年全国高考试题 (文)]

解: 以 O 为极点, x 正半轴为极轴, 建立极坐标系, 则圆 C 的方程为 $\rho = 1$.

设点 M 的坐标为 (ρ, θ) ,

已知点 Q 的坐标为 $(2, 0)$.

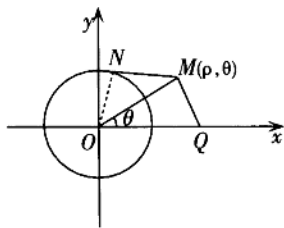
连结 ON , 在 $Rt\triangle ONM$ 中,

$$|MN| = \sqrt{\rho^2 - 1}.$$

在 $\triangle OQM$ 中, 由余弦定理得

$$|MQ| = \sqrt{4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta}.$$

$$\therefore \frac{|MN|}{|MQ|} = \lambda \quad (\lambda > 0),$$



$$\text{即 } \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\sqrt{4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta}} = \lambda.$$

两边平方, 化简, 得 $(1 - \lambda^2) \rho^2 + 4\rho\lambda^2\cos\theta - 1 - 4\lambda^2 = 0$.

当 $\lambda \neq 1$ 时, 方程可化为:

$$\rho^2 - 2 \cdot \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \rho\cos\theta + \left(\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{\lambda^2 - 1}\right)^2 = 0.$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1} x + \left(\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{\lambda^2 - 1}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{\lambda^2 - 1}\right)^2.$$

表示以 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}, 0\right)$ 为圆心, 半径 $r = \frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{|\lambda^2 - 1|}$ 的圆.

当 $\lambda = 1$ 时, 方程化为 $\rho\cos\theta = \frac{5}{4}$, 即 $x = \frac{5}{4}$, 表示过点

$\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 且垂直于 x 轴的直线.