中国计算机学会教育专业委员会 推荐
全国高等学校计算机教育研究会 出版

高等学校规划教材

离散数学

陈光喜　丁宣浩　古天龙　编著

计算机学科教学计划

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校规划教材

离散数学

陈光喜　丁宣浩　古天龙　编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内容简介

“离散数学”是研究离散量结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的重要组成部分，是计算机科学与技术的理论基础。本书包括离散数学中的五部分内容：数理逻辑、集合论与关系、组合数学与数论初步、图论和代数结构。离散数学也是计算机科学与技术专业研究生入学考试、全国计算机等级考试四级（软件方向）、同等学历人员申请硕士学位全国统考的内容。本教材还包括了历年计算机等级考试中的试题和同等学历硕士学位全国统考的模拟试题。

本书可作为普通高校计算机科学与技术、信息与计算科学等专业本科生教材，也可作为全国计算机等级考试（四级）与同等学历人员申请硕士学位的全国统考教材。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/陈光喜，丁宣浩，古天龙编著. —北京：电子工业出版社，2008.1
高等学校规划教材
ISBN 978-7-121-05654-3

I. 离… Ⅱ. ①陈…②丁…③古… Ⅲ. 离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 196097 号

策划编辑：童占梅
责任编辑：童占梅
印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：21.25　字数：522 千字
印　　次：2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：29.50 元

前　言

“离散数学”课程是计算机科学与技术、信息与计算科学等专业的基础理论核心课程。它是计算科学与理论研究必不可少的工具。随着计算技术理论研究的不断深入和应用领域的不断扩展，“离散数学”课程在计算机教育中的作用也日益突出。Computing Curriculum 2005(CC 2005)将离散结构作为其独立、首要和核心的教学模块。

“离散数学”课程根本的目标是培养和训练学生的抽象思维能力和逻辑推理能力；培养和加强学生的数学思维能力和离散方法及其应用能力。为后续专业课做好必要的数学知识准备，为学生从事信息技术以及相关行业应用或研究提供扎实的理论基础。

本书在内容体系结构上包括数理逻辑、集合论与关系、组合数学与数论初步、图论、代数结构等离散结构的基础知识和基本方法及典型应用。既注重基础理论的介绍又兼顾实践教学要求，对重要方法和典型算法采用离散算法描述，多数情形下给出了具体应用，分析了程序的实现技巧和策略。

本书内容丰富、取材得当，在阐述基本理论的同时力图给出方法和应用实例，使读者更好地理解抽象的理论。各部分都配备了**大量的例题和习题**，便于教学过程中选用和学生自学。在每部分的习题最后，还给出了针对本篇知识的**应用实践性习题**，鼓励学生综合利用相关学科的知识完成实践练习，以达到提高学习兴趣和加强应用的目的，也可以**作为实验课程的应用题目或课程设计的课题**。

附录 A 给出了各部分具有**典型性、基础性的题目解析**和针对性练习题，可以作为课堂教学有用的辅助材料。附录 B 选取了**部分全国计算机专业在职硕士研究生模拟试题**作为综合测试使用。附录 C **有选择地给出了各部分习题的参考答案**。附录 D 给出了命题公式逻辑运算的一个程序实现。

本书是作者多年来在桂林电子科技大学讲授离散数学课程的讲义基础上，参考国内外大量优秀文献编写而成的，目的是为计算机科学与技术、信息与计算科学等专业提供一本适合一般院校专业培养目标的教材。按照我们的教学经验，每周 4 课时，一学期(64 ~ 80 学时)可讲完本教材的内容，其中部分内容属于较高要求，我们以“ * ”号标出，便于使用者根据自己的需要进行教学。

在编写过程中，我们参考了众多国内外离散数学教材与专著，对这些文献作者的工作表示深深的谢意。同事曾玲、毛睿、毕忠勤、谢春光、唐敏、张潮等在本书编写及讲义试用过程中提出了许多宝贵的建议和意见，在此表示感谢！同时也感谢唐敏老师与研究生成彦、陈金雄、符一平、王瑛皓、尹柳、余立新等所做的文字录入与校对工作。特别感谢出版社童占梅女士对本书后期制作付出的辛勤劳动。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏，请广大读者批评指正。作者 E-mail：chgx@guet.edu.cn。

编著者

目　录

第1篇　数理逻辑

第2篇　集合论与关系

第3篇 组合数学与数论初步

第4篇 图 论

第5篇 代数结构

第1篇 数理逻辑

逻辑是我们经常用到的一个术语。比如，某人说他早上八点在北京，而八点半在桂林，我们就会说他的话不合乎逻辑。从北京到桂林，乘飞机也要近两个小时，怎么可能半个小时从北京赶到桂林？

逻辑是什么？逻辑就是思维的规律。逻辑学是探索、阐述和确立有效推理原则的学科，最早是由古希腊学者亚里士多德创建的。用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科就叫做数理逻辑，也叫符号逻辑。

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在17世纪就有人提出过。莱布尼茨就曾经设想过能不能创造一种“通用的科学语言”，可以把推理过程像数学一样利用公式来描述，从而得出正确的结论。由于当时的社会条件所限，他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽，从这个意义上讲，莱布尼茨可以说是创立数理逻辑学科的先驱。

1847年，英国数学家布尔出版了《逻辑的数学分析》一书，建立了“布尔代数”，并创立了一套符号系统，来表示逻辑中的各种概念。布尔还建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

19世纪末20世纪初，数理逻辑有了比较大的发展。1884年，德国数学家弗雷格出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词符号，使数理逻辑的符号系统更加完备。对建立这门学科作出贡献的，还有美国人皮尔斯，他也在著作中引入了逻辑符号，从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。

数理逻辑学科建立以后，发展迅速，促进它发展的因素是多方面的。比如，非欧几何的建立，激发人们去研究非欧几何和欧氏几何的无矛盾性，从而促进了数理逻辑的发展。

集合论的产生是近代数学发展中的重大事件，但是在集合论的研究过程中，出现了数学史上的第三次危机。这次危机源于发现了集合论的悖论。什么是悖论呢？悖论就是逻辑矛盾。集合论是论证很严格的一个分支，被公认为是数学的基础。

1903年，英国唯心主义哲学家、逻辑学家、数学家罗素对集合论提出了以他名字命名的“罗素悖论”，它的提出几乎动摇了整个数学科的基础。

罗素悖论中有许多例子，其中一个很通俗也很有名的例子就是“理发师悖论”。某乡村有一位理发师，有一天他宣布：只给不自己刮胡子的人刮胡子。这就产生了一个问题：理发师究竟给不给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，他就是自己刮胡子的人，按照他的原则，他又不该给自己刮胡子；如果他不给自己刮胡子，那么他就是不自己刮胡子的人，按照他的原则，他又应该给自己刮胡子。这就产生了矛盾。

悖论的提出，促使许多数学家去研究集合论的无矛盾性问题，从而产生了数理逻辑的一个重要分支——公理集合论。

非欧几何的产生和集合论悖论的发现，说明数学本身还存在许多问题，为了研究数学系统的无矛盾性问题，需要以数学理论体系的概念、命题、证明等作为研究对象，研究数学系统的逻

辑结构和证明的规律，这样又产生了数理逻辑的另一个分支——证明论。

数理逻辑后来还发展出了许多新的分支，如递归论、模型论等。递归论主要研究可计算性理论，它和计算机的发展和应用有密切的关系。模型论主要研究形式系统和数学模型之间的关系。

数理逻辑近年来发展尤其迅速，主要原因是这门学科对于数学其他分支，如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大影响，特别是对计算机科学的发展起了推动作用。反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展。

众所周知，计算机处理大量信息都是由程序来完成的，但是读者知道程序是怎么设计的吗?我们可以用下面的两种方式描述：

程序 = 算法 + 数据

算法 = 逻辑 + 控制

这样，

程序 = 逻辑 + 控制 + 数据

如果读者要学习计算机程序设计、数据结构、数据库、数字电路、人工智能等课程，并期望指挥计算机去做一些聪明人才能做的事，那么你就必须学好数理逻辑。当然，如果你想成为一名侦破案件的专家，也必须学好数理逻辑。

本篇主要介绍数理逻辑中两个最基本的也是最重要的部分——“命题逻辑”和“谓词逻辑”。

第1章　命题逻辑基本概念

1.1　命题与命题联结词

数理逻辑是用数学方法研究推理的前提和结论之间的形式关系的科学。推理的基本要素是命题。因而学习数理逻辑首先要从命题谈起。什么是命题呢？陈述客观世界发生的事情的陈述句就叫做命题。

请看下面给出的两个陈述句：

(1) π 是无理数。

(2) 桂林属于广东省。

这两个陈述句都表示对事件性质的判断。(1) 表示的判断是正确的，而(2) 表示的判断是错误的。像(1)，(2) 这样能够唯一确定所表达的判断是正确还是错误的陈述句称为命题。所表达的判断是正确的陈述句称为真命题，或称该命题的真值为真。所表达的判断是错误的陈述句称为假命题，或称该命题的真值为假。一个命题要么为真，要么为假，两者必居其一，且只能居其一，即不能说一个命题既真又假。

定义 1.1.1　**命题**　命题就是或为真或为假的具有唯一真值的陈述句。

不是陈述句的句子，如疑问句、感叹句、祈使句均不是命题。

真值不唯一的也不是命题。比如，当 x 是变数时，"x 加1大于5" 不是命题，因为它的真值与 x 有关，不是唯一的。

"我正在说谎。" 这句话既不为真，也不为假。假若为真，那么我说的是真话，因而我就没有说谎，因此"我正在说谎" 就不是真的；假若为假，那么我没有说谎，这样"我正在说谎" 又成为真话了。像这种不真不假的陈述句也不是命题。

在数理逻辑中，为了用数学方法研究命题，并能够应用计算机进行推理，必须将命题用数学符号表示，称为命题符号化。一般用 $p,q,r\cdots$ 或 $p_i,q_i,r_i\cdots$ 表示命题。命题的真值也用符号表示，用"1" 或"T" 表示真，用"0" 或"F" 表示假。那么，上面两个陈述句(1)，(2) 的符号化形式为

(1) p：π 是无理数。p 的真值为1(或T)。

(2) q：桂林属于广东省。q 的真值为0(或F)。

命题的真值可用一张表列出，称为真值表。另外，由简单陈述句确定的命题称为简单命题或原子命题。由若干简单命题用联结词联结起来的命题称为复合命题。

定义 1.1.2　**否定联结词**　设 p 为命题，复合命题"非 p" 称作 p 的否定式，记作 $\neg p$。符号 $\neg$ 称作否定联结词，$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。其真值表见表 1.1.1。

表 1.1.1　$\neg p$ 真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

例如，"4 不是素数" 这个命题可以符号化为 $\neg p$，其中 p 表示"4 是素数"。这里 p 的真值为0。所以 $\neg p$ 的真值

为1。

定义1.1.3 **合取联结词** 设p,q为命题,复合命题"p并且q"称为p与q的合取式,记作$p \wedge q$。符号$\wedge$称作合取联结词。$p \wedge q$为真当且仅当p与q同时为真。其真值表见表1.1.2。

表1.1.2 $p \wedge q$真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

对于合取联结词$\wedge$,要注意其在应用上的灵活性。例如,"不仅p,而且q","虽然p,但是q","既p,又q","一边p,一边q"等,都应该符号化为$p \wedge q$。

【例1.1.1】 设p:$\sin x$是奇函数,q:e^x是奇函数。将下面复合命题符号化,并且讨论它们的真值。

(1) $\sin x$和e^x都是奇函数。

(2) 不仅$\sin x$是奇函数,e^x也是奇函数。

(3) 虽然$\sin x$是奇函数,但是e^x不是奇函数。

(4) 不仅$\sin x$不是奇函数,而且e^x也不是奇函数。

解:以上4个命题分别符号化如下:

(1) $p \wedge q$,真值为0。

(2) $p \wedge q$,真值为0。

(3) $p \wedge \neg q$,真值为1。

(4) $\neg p \wedge \neg q$,真值为0。 ◆

注意:"$\wedge$"是命题联结词,用"$\wedge$"联结的命题是一个复合命题,将"$\wedge$"去掉可以分成两个命题,在自然语言中表示的是一个复合句。而自然语言中的"和"不一定是这里的"$\wedge$"。例如,张三和李四是朋友。这句话是一个简单句,不能分成两个简单句。我们不能说张三是朋友,李四是朋友。又如,直线l_1与直线l_2平行,我们不能说直线l_1平行为p,直线l_2平行为q,那么$p \wedge q$就表示直线l_1与直线l_2都平行,这显然不符合命题的原意,也不通顺。

定义1.1.4 **析取联结词** 设p,q为命题,复合命题"p或q"称为p与q的析取式,记作$p \vee q$。符号$\vee$称作析取联结词。$p \vee q$为真当且仅当p与q中至少有一个为真。其真值表见表1.1.3。

析取联结词的逻辑关系是明确的。但在自然语言中,"或"具有二义性。"p或q"中p与q有时具有相容性(p与q可以同时为真),有时具有排斥性(p与q不能同时为真)。对于具有相容性的或,应将"p或q"符号化为"$p \vee q$",而对于具有排斥性的或,应将"p或q"符号化为"$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$"。

表1.1.3 $p \vee q$真值表

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

请看下面3个例子:

(1) 李军到过桂林或云南。

(2) 数列$\{a_n\}$收敛或发散。

(3) 你选一楼的一间房或选二楼的一间房(不能既选一楼又选二楼)。

设p:李军到过桂林,q:李军到过云南。

r:数列$\{a_n\}$收敛,s:数列$\{a_n\}$发散。

t:你选一楼的一间房,u:你选二楼的一间房。

(1)中的"或"是相容或,因而(1)符号化为$p \vee q$;

(2) 中的“或”为排斥或,因而符号化为$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$;

(3) 中的“或”也是排斥或,因为t与u不能同时为真,所以(3) 只能符号化为$(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$。

下文中出现的“或”多数都指相容或。

定义 1.1.5 **蕴涵联结词** 设p,q为命题,复合命题“如果p,则q”称作p与q的蕴涵式,记作$p \to q$。称p为蕴涵式的前件,q为蕴涵式的后件,称$\to$为蕴涵联结词。$p \to q$为假当且仅当p为真q为假。其真值表见表 1.1.4。

$p \to q$的逻辑关系是:q是p的必要条件,p是q的充分条件。

表 1.1.4 $p \to q$ 真值表

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在使用蕴涵联结词时要注意以下三点:

(1) 在自然语言及数学中,q是p的必要条件有许多种不同的叙述方式,如“只要p,就q”,“因为p,所以q”,“p仅当q”,“只有q,才p”,“除非q,才p”,“除非q,否则$\neg p$”,等等,都表示q是p的必要条件,因而均符号化为$p \to q$。

(2) 在自然语言及数学中,“如果p,则q”中的p与q往往具有某种内在联系,而在数理逻辑中,p与q不一定有内在的联系。例如,如果天下雨(p),那么太阳从东边出来(q)。

(3) 在自然语言及数学中,$p \to q$往往表示p,q同时为真的推理关系。但在数理逻辑中,p和q可以表示两个完全不相干的命题。p和q既可以表示命题常项(有确定的真值),也可以表示命题变项(有变化的真值)。除了p与q同时为真时$p \to q$为真外,当p为假时,不论q为真还是为假,$p \to q$为真。例如,如果猪会飞,那么老鼠会吃猫。这个复合命题的真值为真。

思考下面的填空:

(1) $(0 \to q) = (\ )$

(2) $(p \to 1) = (\ )$

在下面的例题中,以上三点都有所体现,请注意区分。

【例 1.1.2】 将下列命题符号化,并且讨论其真值。

(1) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则数列$\{a_n\}$趋于零。

(2) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则数列$\{a_n\}$不趋于零。

(3) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$不收敛,则数列$\{a_n\}$趋于零。

(4) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$不收敛,则数列$\{a_n\}$不趋于零。

解:设p:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,$q$:数列$\{a_n\}$趋于零。

4 个命题符号化如下:

(1) $p \to q$。p为真时q也为真,因此该命题的真值为真。

(2) $p \to \neg q$。p为真时$\neg q$为假,因此该命题的真值为假。

(3) $\neg p \to q$。$\neg p$为真时q可能为真,也可能为假。当q为真时命题为真,当q为假时命题

为假。

(4) $\neg p \to \neg q$。$\neg p$ 为真时 $\neg q$ 可能为真，也可能为假。当 $\neg q$ 为真时命题为真，当 $\neg q$ 为假时命题为假。 ◆

【例 1.1.3】 将下列命题符号化，并且讨论其真值。

(1) 因为 $f(x)$ 在点 a 处可导，所以 $f(x)$ 在点 a 处连续。

(2) 如果 $f(x)$ 在点 a 处可导，那么 $f(x)$ 就在点 a 处连续。

(3) $f(x)$ 在点 a 处可导，仅当 $f(x)$ 就在点 a 处连续。

(4) 除非 $f(x)$ 在点 a 处连续，否则 $f(x)$ 在点 a 处不可导。

(5) 除非 $f(x)$ 在点 a 处连续，$f(x)$ 才在点 a 处可导。

(6) 只有 $f(x)$ 在点 a 处连续，$f(x)$ 才在点 a 处可导。

(7) 只有 $f(x)$ 在点 a 处可导，$f(x)$ 才能在点 a 处连续。

解：设 p：$f(x)$ 在点 a 处可导，q：$f(x)$ 在点 a 处连续。

命题(1) 到(6) 都表示 $f(x)$ 在点 a 处连续是 $f(x)$ 在点 a 处可导的必要条件，因此，命题(1) 到(6) 都可以符号化为 $p \to q$，这些命题的真值为真。

命题(7) 表示 $f(x)$ 在点 a 处可导是 $f(x)$ 在点 a 处连续的必要条件，因此该命题的符号化为 $q \to p$，该命题的真值依 q 和 p 的取值而定。q 为真 p 为假时该命题就为假，而此种情况是可以出现的。例如，$f(x) = |x|$ 在点 0 处连续但在点 0 处不可导。 ◆

定义 1.1.6 **等价联结词** 设 p 与 q 为命题。复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价形式，记作 $p \leftrightarrow q$。$\leftrightarrow$ 称作等价联结词。$p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同。其真值表见表 1.1.5。

表 1.1.5 $p \leftrightarrow q$ 真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系是：p 与 q 互为充要条件。

【例 1.1.4】 将下列命题符号化，并且讨论其真值。

(1) 盐是咸的当且仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数。

(2) 盐是咸的当且仅当 $\sqrt{3}$ 不是有理数。

(3) 盐不是咸的当且仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数。

(4) 两个正方形 S_1 和 S_2 面积相等当且仅当它们的边长相等。

(5) 角 A 与角 B 相等的充要条件是它们为同位角。

解：设 p：盐是咸的，q：$\sqrt{3}$ 是有理数，r：正方形 S_1 和 S_2 的面积相等，s：正方形 S_1 和 S_2 的边长相等，t：角 A 与角 B 相等，u：角 A 与角 B 是同位角。

p,q 的真值已知。即 p 为真，q 为假。各命题分别符号化为

(1) $p \leftrightarrow q$

(2) $p \leftrightarrow \neg q$

(3) $\neg p \leftrightarrow q$

(4) $r \leftrightarrow s$

(5) $t \leftrightarrow u$

(1) 中 p 真而 q 假，所以 $p \leftrightarrow q$ 的真值为 0；

(2) 中 p，$\neg q$ 均真，所以真值为 1；

(3) 中$\neg p$与q均假，所以(3) 的真值为1；

(4) 中s与t同时为真或同时为假，所以$r \leftrightarrow s$的真值为1；

(5) 中t与u不一定同真或同假，所以真值要根据t与u的真假情况而定。◆

至此，我们讨论了5种联结词$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，它们统称为联结词符，且可以看做命题间的运算，在后面的章节中有类似的讨论。复合命题中的运算符号（联结词符）的优先顺序规定如下：$\neg$最先，其次是$\vee$与$\wedge$，再其次是$\rightarrow$与$\leftrightarrow$。如有括号，括号内最优先。

1.2 命题公式及其真值表

在1.1节中，用$p,q,r\cdots$表示简单命题。真值确定的简单命题称为命题常项或命题常元。称真值可以变化的简单命题为命题变项或命题变元，仍然用$p,q,r\cdots$表示。在数理逻辑中，既研究具体的逻辑关系，也研究抽象的逻辑关系，因而要同时涉及命题常项和命题变项。

定义 1.2.1 合式公式

(1) 单个命题变项（或常项）是合式公式；

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若A,B是合式公式，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式；

(4) 有限次地应用(1) ~ (3) 形成的符号串都是合式公式。

合式公式也称命题公式，简称公式。

单独使用$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$时，括号可以省去，可写成$\neg A$，$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$，$A \leftrightarrow B$。

在定义1.2.1中，$A,B,\cdots$表示任意的合式公式。在以下论述中意义相同。

定义 1.2.2 **赋值** 设$p_1,p_2,\cdots,p_n$是公式A中的全部命题变项，给$p_1,p_2,\cdots,p_n$各指定一个真值，则该组真值称为A的一个赋值或解释。若指定的一组真值使A的真值为1，则称其为A的成真赋值（或成真解释）。若指定的一组真值使A的真值为0，则称为A的成假赋值（或成假解释）。

本书中对含n个命题变项的公式的赋值形式做如下规定：

(1) 若设A中命题变项为$p_1,p_2,\cdots,p_n$，赋值$a_1a_2\cdots a_n$（a_i为0或1）是指$p_1 = a_1, p_2 = a_2, \cdots, p_n = a_n$。

(2) 若设A中的命题变项为$p,q,r,\cdots$，赋值$a_1a_2\cdots a_n$是指$p = a_1, q = a_2, \cdots$，即按字典顺序赋值。

例如，设$A = p \rightarrow q$，则A有4组赋值：00，01，10，11，其中10是成假赋值，其余都是成真赋值。

含n个命题变项的公式有2^n组赋值。将公式A在所有赋值之下的取值情况列成一张表，称为A的真值表。表1.2.1给出了含两个原子命题的基本复合命题的真值表。

表 1.2.1 基本复合命题的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

【例 1.2.1】 求下面 3 个给定公式的真值表(如表 1.2.2 所示)。

表 1.2.2 真值表例

$p\ q\ r$	① $(p \vee q) \to r$	② $(p \to (q \vee p)) \vee r$	③ $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$
0 0 0	1	1	0
0 0 1	1	1	0
0 1 0	0	1	0
0 1 1	1	1	0
1 0 0	0	1	0
1 0 1	1	1	0
1 1 0	0	1	0
1 1 1	1	1	0

真值表是按照赋值的二进制大小从小到大依次排列。从表 1.2.2 可以看出,第 1 个公式有 5 个成真赋值 000,001,011,101,111;有 3 个成假赋值 010,100,110。第 2 个公式无成假赋值。第 3 个公式无成真赋值。 ◆

定义 1.2.3 **永真式、永假式、可满足式** 设 A 为公式,

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真(即无成假赋值),则称 A 为永真式或重言式。永真式可用 1(或 T) 表示。

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假(即无成真赋值),则称 A 为永假式或矛盾式。永假式可用 0(或 F) 表示。

(3) 若 A 至少存在一组成真赋值(或者 A 不是永假式),则称 A 是可满足式。

在例 1.2.1 中,第 1 个公式是可满足式,但不是永真式;第 2 个公式是永真式,当然也是可满足式;第 3 个公式是永假式。

定义 1.2.3 给出了形式各异的公式的一种分类方式。公式的判定问题,往往需要指出公式是否为永真式、永假式或可满足式。

【例 1.2.2】 用真值表判断公式 $(\neg P \to Q) \wedge P$ 是永真式、永假式或可满足式。

解:列出真值表如表 1.2.3 所示。

表 1.2.3 真值表例

P	Q	$(\neg P \to Q) \wedge P$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

由此可见,公式 $(\neg P \to Q) \wedge P$ 有成假赋值 00,01;成真赋值 10,11;所以该公式为可满足公式。 ◆

一般公式的可满足性判断(通常称为 SAT 问题)计算是一个复杂的数学问题。公式中命题变项个数较少时,使用真值表相对比较容易。当命题变项个数较多时,情况就复杂了。

例如,若公式 A 涉及 20 个命题变项,要判断 A 是否为永真式,真值表应该有 $2^{20} = 1048576$ 行,手工计算已经很难完成了;若命题变项达到 1000 个,最坏可能需要做 2^{1000} 次检验才能判断公式 A 是否为永真式。即使是当今世界上运算速度最快的计算机,也不可能在一个人的寿命期内(如 100 年)完成这么多的计算检验。

事实上,SAT 问题是第一个被证明的 NP 完全问题(NonPolynomial Complete Problem),在计算理论中具有极其重要的地位,其研究几十年来从未停止过;目前研究最广泛最热门的是 3SAT 问题,有兴趣的读者可参考相关文献。

由合式公式的定义可知，n 个命题变项可以形成无穷多个形式各异的公式。但是，在这些公式中，有的具有相同的真值表，即它们的真值相同。例如，公式 $p \to q$，$\neg q \to \neg p$，$\neg p \vee q$，$\neg\neg q \vee \neg p$ 等，在所有 4 个赋值中，10 是它们的成假赋值，00，01，11 是它们的成真赋值，它们的真值表是相同的。我们关心的问题是，n 个命题变项到底可以形成多少种真值不同的公式呢？为了回答这个问题，给出真值函数的概念。

定义 1.2.4 **真值函数** n 维笛卡儿积 $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n个} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i = 0 \text{ 或 } x_i = 1\}$ 为 $\{0,1\}^n$。$\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数 F 称为 n 维真值函数，记为 $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$。

关于笛卡儿积 $\{0,1\}^n$ 与函数的概念，将在集合论部分给出更详细的介绍。

$\{0,1\}^n$ 中共有 2^n 个元素，00…0，00…1，…，11…1。真值函数 F 在每个元素下只能取 0 或 1，因而 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 可生成 2^{2^n} 个不同的真值函数。每个真值函数 F 对应无穷多个含有 n 个命题变项的合式公式，这些合式公式的真值与 F 的函数值相同。

$n = 2$ 时，可生成 $2^{2^2} = 16$ 个真值函数。它们对应由 2 个命题变项 p 与 q 所构成的真值不同的合式公式。

表 1.2.4 列出了 $n = 2$ 时的全体真值函数。每个 $F_i(i = 0,1,\cdots,15)$ 对应无穷多个 p, q 所形成的公式。例如，$p \wedge \neg p$，$\neg(p \to q) \wedge q$，$q \wedge \neg q$ 等均与 F_0 真值相同（它们都是永假式），$p \vee \neg p$，$(p \to q) \vee \neg q$，$(\neg p \vee q) \vee \neg q$ 等与 F_{15} 的真值相同（它们都是永真式），而 $p \to q$，$\neg p \vee q$，$\neg q \to \neg p$ 等与 F_{13} 真值相同。

表 1.2.4 $n = 2$ 时的全体真值函数

p	q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

凡是对应同一个真值函数的公式均称为是等值的。于是 $p \to q$，$\neg p \vee q$，$\neg q \to \neg p$ 等两两都是等值的。1.3 节将给出公式 A 与 B 等值的定义。

1.3 命题逻辑等值演算

设 A, B 为公式，A, B 中共含有 n 个命题变项。若 A 与 B 对应同一个 n 维真值函数 F，即 A 与 B 在任何解释下，其真值都是相同的，则 $A \leftrightarrow B$ 无成假赋值，即 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。于是给出下面的定义。

定义 1.3.1 **等值（等价）** 若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 是等值的（或等价的），记作 $A \Leftrightarrow B$。

注意：$\Leftrightarrow$ 不是联结词符，$A \Leftrightarrow B$ 是表示 $A \leftrightarrow B$ 为永真式的一种记法。

命题公式之间的等值关系是等价关系（等价关系详见集合论部分）。n 个命题变项所形成的所有公式分属于 2^{2^n} 个不同的等价类。同一个等价类中的公式是等值的，这些公式均对应同一个真值函数。

根据已知的等值式推演出新的等值式的过程称为等值演算。在进行等值演算时，必须首先