

非线性
动力学丛书

7

弹塑性动力学基础

杨桂通 编著



科学出版社

www.sciencep.com

0347/7

2008

非线性动力学丛书 7

弹塑性动力学基础

杨桂通 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要研究弹塑性动力学问题的基础理论和方法,全书共分7章,包括:一般概念和数学准备;可变形固体的运动学和动力学;本构方程;间断面的传播理论;直杆动力学;薄板动力学和冲击屈曲等弹塑性动力学问题的基本内容。

本书可供相关专业的高年级大学生和研究生作为教科书或教学参考书,也可供动力检测、动力设计等专业的广大工程技术人员和科学研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性动力学基础 / 杨桂通编著. —北京: 科学出版社, 2008

(非线性动力学丛书; 7)

ISBN 978-7-03-021146-0

I. 弹… II. 杨… III. ①弹性动力学 ②塑性力学: 动力学 IV. O347

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031071 号

责任编辑: 吕 虹 赵彦超 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 8 月第一次印刷 印张: 16

印数: 1—3 000 字数: 302 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(文林))

《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素, 诸如机械系统中的间隙、干摩擦, 结构系统中的材料弹塑性、构件大变形, 控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等等. 实践中, 人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统, 以求方便地获得其动力学行为的某种逼近. 然而, 被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差, 使得线性逼近成为一场徒劳. 特别对于系统的长时间历程动力学问题, 有时即使略去很微弱的非线性因素, 也会在分析和计算中出现本质性的错误.

因此, 人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题. 早期研究可追溯到 1673 年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察. 从 19 世纪末起, Poincaré、Lyapunov、Birkhoff、Andronov、Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究, Duffing、van der Pol、Lorenz、Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现. 他们的杰出贡献相辅相成, 形成了分岔、混沌、分形的理论框架, 使非线性动力学在 20 世纪 70 年代成为一门重要的前沿学科, 并促进了非线性科学的形成和发展.

近 20 年来, 非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展. 这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题, 采用非线性动力学理论和方法, 对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型, 预测其长期的动力学行为, 揭示内在的规律性, 提出改善系统品质的控制策略. 一系列成功的实践使人们认识到: 许多过去无法解决的难题源于系统的非线性, 而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解.

近年来, 非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展. 伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步, 非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高, 已逐步接近一些实际系统. 在工程科学界, 以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化. 人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响, 使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求; 而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类.

在这样的背景下, 有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书, 着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展, 特别是我国学者的研究成果,

为从事非线性动力学理论及应用研究的人员,包括硕士研究生和博士研究生等,提供最新的理论、方法及应用范例.在科学出版社的大力支持下,组织了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版),它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验.与国外的同类丛书相比,它具有整体的出版思想,每分册阐述一个主题,互不重复等特点.丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果,有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践,还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力,使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001年8月

前 言

在强动载荷作用下, 器件、结构物和构筑物呈现出一系列完全不同于静载荷作用下的动力学行为. 研究这类问题是许多工程技术领域的重要任务, 在航空航天、舰船设计、防护工程设计以及机械制造、大型建筑物等工程中, 采用弹塑性动力学理论进行分析研究、计算与设计是非常必要的. 对这类问题的研究已越来越多地受到重视, 不少高等院校和科研院所开展了关于弹塑性动力学问题的研究工作, 且有了一些重要成果. 但是, 就相关专业的研究生教育或对研究设计人员而言, 目前缺少一本便于阅读的弹塑性动力学理论基础的书. 本书希望为这些读者提供一本能为进一步学习研究和设计工作打下坚实基础的读本.

本书共分 7 章. 第 1 章除介绍一般概念外, 给出了矢量和张量分析基础; 第 2 章主要讨论可变形固体的运动学和动力学理论, 并给出了动力学基本定理; 第 3 章介绍弹塑性体的本构理论, 包括经典本构方程、最新的理论和实用的本构关系等; 第 4 章介绍间断面的传播, 以冲击波为例, 仔细讨论了这类问题; 第 5 章介绍直杆动力学, 第 6 章介绍薄板动力学, 这两章可以说是弹塑性动力学的代表性问题, 本书不仅仅给出了解题的结果, 而且给出了解题的思路和方法. 这两部分内容掌握以后, 其他弹塑性动力学问题便易于解决了. 最后, 第 7 章研究冲击屈曲, 讨论了冲击屈曲准则、动力稳定性理论和方法等.

本书在编写过程力求深入浅出, 便于自学, 对数学的要求尽量限制在理工科大学生的课程范围之内, 对艰涩的内容增加了说明. 对力学基础的要求, 则希望读者学过基础的弹塑性力学. 有了这些基础理论, 应该可以顺利地阅读本书.

本书在编写过程中, 得到了太原理工大学应用力学研究所的老师和我的学生们的帮助和支持, 在此表示感谢.

在多年的教学与科研工作中, 作者得到了国家自然科学基金委员会的大力支持与资助, 特此致以深切的谢意.

本书在编写过程中力求语言精炼、概念准确、结构合理, 但由于水平所限, 不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正.

杨桂通

2007 年 5 月于太原

目 录

第 1 章 一般概念、张量分析概要	1
1.1 动载荷	1
1.2 振动与波	1
1.3 固体材料的动力特性	3
1.4 矢量与矢量代数	6
1.5 坐标变换、基矢量	9
1.5.1 平面内的斜角直线坐标系的基矢量	9
1.5.2 坐标变换	10
1.6 张量与张量代数	13
1.7 张量的迹与转置张量	17
1.8 Christoffel 符号、协变导数	18
1.9 标量场与矢量场	19
1.10 张量场	23
1.11 常用坐标系中的物理分量	25
第 2 章 可变形固体基础理论	28
2.1 可变形固体运动学	28
2.1.1 可变形固体运动的描述	28
2.1.2 物质坐标法	29
2.1.3 空间坐标法	32
2.2 可变形固体的变形	35
2.2.1 变形与变形梯度	35
2.2.2 变形梯度的极分解	36
2.2.3 应变与应变率	39
2.2.4 小变形	43
2.3 可变形固体动力学	44
2.3.1 小变形条件下的应力与应力张量	44
2.3.2 有限变形条件下的应力张量	47
2.3.3 主应力与应力不变量	48
2.3.4 应力与应变的匹配	52
2.3.5 动力学基本定理	53

第 3 章 本构方程	60
3.1 建立本构方程的一般原则	60
3.2 能量方程、热力学定律	61
3.2.1 热力学第一定律	61
3.2.2 热力学第二定律、熵	62
3.2.3 自由能概念	63
3.3 弹塑性本构理论	65
3.3.1 准静态本构理论	65
3.3.2 热弹塑性本构理论	67
3.3.3 过应力理论	69
3.3.4 Hohenemser-Prager 黏塑性理论、Perzyna 方程	70
3.3.5 Cristescu 方程	78
3.3.6 弹塑性有限变形本构理论	80
3.4 应变梯度理论	85
3.4.1 应变梯度塑性理论——偶应力理论	85
3.4.2 偶应力张量	86
3.4.3 计入偶应力时的应变张量、旋度张量与旋转梯度	90
3.4.4 计入偶应力时的虚功原理	92
3.4.5 应变梯度塑性本构关系	93
3.4.6 最小总势能原理与最小总余能原理	94
3.4.7 应用简例	95
第 4 章 间断面的传播	98
4.1 曲面的运动	98
4.2 间断面的特性	100
4.3 几何相容条件	101
4.4 运动相容条件	104
4.5 运动物体上的间断面、动力相容条件	105
4.6 冲击波	107
第 5 章 直杆动力学	110
5.1 一维弹性波	110
5.2 弥散波	114
5.3 非线性波	117
5.4 塑性加载波与卸载波	121
5.4.1 弹塑性加载波	121
5.4.2 卸载波	126

5.5 长梁动力学理论	133
5.5.1 Boussinesq 方法	134
5.5.2 弹塑性长梁	139
5.6 圆柱形直杆动力学	149
5.6.1 波在杆中的传播	149
5.6.2 杆受撞击作用的问题	153
5.7 弹塑性梁的异常动力行为	157
第 6 章 薄板动力学	162
6.1 基本方程、弹性板的振动	162
6.2 矩形板的自由振动	164
6.3 圆板的自由振动	165
6.4 圆板屈服条件与流动法则	167
6.5 刚塑性圆板动力学	172
6.6 计入应变率效应的塑性板	184
6.7 阻尼介质中的刚塑性板	193
6.8 弹塑性无限大板、自模拟方法	197
6.9 受高速撞击的无限大板	201
6.10 波在弹性板中的传播	209
第 7 章 冲击屈曲	211
7.1 一般概念	211
7.2 Liapunov 稳定性理论	212
7.3 Liapunov 直接方法	214
7.4 Mavchan 对 Liapunov 理论的推广	215
7.5 Koiter 初始后屈曲理论	216
7.6 Budiansky-Hutchinson 动力屈曲理论	221
7.7 塑性动力屈曲分析模型	224
7.8 弹塑性圆柱壳冲击扭转屈曲	234
参考文献	238
名词索引	240

第 1 章 一般概念、张量分析概要

1.1 动 载 荷

各类设施、工件以及各种建筑物、构筑物都可能遭受不同类型的动力载荷，有的是周期性的，有的是无固定周期的，不少属于短时强载荷。例如，作用在建筑物上的爆炸压力；海浪、水下爆炸对舰船的冲击；车辆的碰撞；空间尘埃、飞行器对飞行器的撞击；陨石坠落对地面物体的撞击；地震对建筑物的作用；原子弹爆炸产生冲击波的作用，等等。

不同形式的载荷将引起弹塑性系统的不同响应，且和系统材料性质有密切关系。例如，爆炸载荷和撞击载荷都可视为短时强载荷，即作用时间很短，强度或速度很高，输入系统的能量就很大，引起系统的应力和变形超出了弹性极限，进入塑性状态。因而，需要研究系统的塑性动力响应、塑性波效应、塑性动力失效等问题。

对于载荷强度和撞击速度不高及一般周期性载荷等，则可能只需研究系统的弹性振动的有关问题，例如，需要关注是否会出现振动失稳或共振失效等问题。

我们将重点讨论短时强载荷作用下的弹塑性动力学中的简单问题，作为进一步深入研究的基础。

1.2 振 动 与 波

当弹塑性系统受某种动载荷作用时，静力学不同，物体运动的惯性不可忽略。对于理想弹性体，当动力载荷的峰值不大于使系统进入塑性状态所需的载荷时，系统将呈现弹性振动状态。对于弹塑性体，尽管外荷载的峰值远远超过静力极限载荷，但由于载荷的持续时间较短，输入系统的能量有限，则由于塑性变形的吸能效应，系统仍可处于许可的工作状态。

从物理角度看，波就是扰动的传播，或能量的传播。实际上，若在物体的某一局部受到突加的扰动，则受扰动点将立刻把这种扰动传给与之相邻的质点，也就是说，把扰动质点所携带的能量传递给它的邻域，依此传开，这种扰动就以波的形式以有限的速度向远处传播，称为波动现象。根据初始扰动的性质和物体材料性质以及物体结构的形式，波形、波速特征和传播的特点都有很大的不同。

波的传播只是扰动的传递, 并没有物质的传动. 波只能在介质内部运动, 而不可能跑到介质之外. 波的传播速度根据介质的性质不同而不同, 例如, 在弹性介质中传播, 波的速度是弹性波速, 介质的力学性质不同, 波速也不同. 波速通常记作 c .

前面已经说过, 波的传播是由于一质点的运动所携带的能量传递给其原处于静止状态的邻点, 引起该质点在其平衡位置附近的运动. 运动的速度称为质点运动的速度, 通常记作 v . 质点速度远小于波速, 即 $v \ll c$.

如上所述, 固体应力波的传播就是能量的传播, 波经过的任一点处的瞬时动能与内能密度相等. 若令波在传播过程中任一时刻的功率为 $P = \pm cw$, 此处 w 为总内能密度, c 为波速, 当取正号时波向初始干扰的正方向传播, 取负号时则相反. 故应力波的传播过程也称为能流.

如果介质是无界的, 扰动将一直传播出去. 然而, 实际的物体总是有界的, 当扰动到达边界时, 将与边界发生相互作用而产生反射. 由于多次的来回反射, 使得整个物体呈现出在其平衡位置附近的一种周期性的振荡现象. 对弹性体来说, 这就是物体的弹性振动. 由此可见, 振动和波动存在着本质的内在联系. 可以看成是同一物理问题在不同条件下不同结果的表现形式.

从数学角度看, 运动方程的解常可分别采用波动解和振动解. 波动解具有行波的形式, 在一维情况下, 其波函数形如 $f(x \pm ct)$, 这种解给波动过程以直观的描述. 在振动解中, 一般可写成级数的形式, 每一项代表了一个在空间具有固定模式并按一定频率振动的驻波. 可这样理解, 振动解是用众多驻波的叠加描述了行波的传播; 而驻波是由相同频率的简谐行波叠加而成. 这两种波可用 Fourier 级数联系起来.

对与弹塑性体, 且外作用已使物体的某些部分已经超出了弹性极限, 则问题的解将出现较复杂的塑性动力响应或弹塑性波传播的复杂情况. 我们以后要进行专门研究.

现在以几种特殊情况给出问题提法的特点:

(1) **自由振动.** 对于弹塑性物体, 在没有外力作用的情况下, 即在边界 S_o 上, $F_i = 0$, $\sigma_{ij} n_j = 0$, 部分边界 $S_u = 0$, 另一部分 S_u 上给定初始条件, 在给定位移较小而不致引起塑性变形又无阻尼作用的条件下, 则物体将开始在其平衡位置附近振荡. 因为没有外力作用, 故只可能做弹性自由振动. 若初始位移较大, 以致引起系统的塑性变形, 则系统将在塑性变形基础上做弹性自由振动.

(2) **强迫振动.** 在给定外力的情况下, 则根据外力的不同特征, 将出现不同的情况. 若体力 F_i 和面力 p_i 以及给定点的位移 $\bar{u}_i$ 都是时间的周期函数

$$F_i = F_i^0 \varphi(t), \quad p_i = p_i^0 \varphi(t), \quad \bar{u}_i = u_i^0 \varphi(t),$$

其中,带上角标“0”的量均与时间无关,可有

$$\varphi(t) = \exp(ipt),$$

显然,问题的解是周期函数,且可写成 Fourier 级数的形式.

若作用到系统上的体力 F_i 或面力 p_i 以及给定点的位移 $\bar{u}_i$ 都不是时间的周期函数,例如,给定面力 p_i 是短时强载荷,则物体出现较为复杂的动力响应,根据载荷强度和物体的具体情况,塑性变形的特征有很大的不同.以后我们将专门进行讨论.

(3) **波的传播.** 前已述及,若在物体的某一局部受到外力的扰动,则受扰动点将立刻将这种扰动传给与之相邻的质点,也就是说,把扰动质点所携带的能量传递给它的邻域,依此传开,在不计阻尼的情况下,这种扰动就以波的形式以有限的速度一直向远处传播,称为波动现象.根据初始扰动的性质和介质的物理性质,以及物体结构的形式,波形、波速的特征和传播的特点都会有很大的不同.

1.3 固体材料的动力特性

物体受动载荷作用与受静载荷后的反应是不同的.动载荷与静载荷并没有严格的分界线.可以认为使物体变形的应变率在 $10^{-1}/s$ 以下为准静态加载,应变率在 $10^{-1}/s \sim 10^1/s$ 为中等应变率状态, $10^1/s \sim 10^4/s$ 为高应变率状态,实现这种状态的加载用杆撞击就可以.例如,使用分离式 Hopkinson 压杆装置的高速加载.要实现更高的应变率(称为超高速加载),则需采用氢气炮或爆炸导致的平板撞击才可以.应变率越高,所需加载的速度越高,完成加载的时间越短.例如,要实现应变率为 $10^2/s$,则产生 1% 的应变,所需加载时间为 $10^{-10}/s$. 准静态加载时,产生 1% 的应变所需时间约 10s 以上.

固体材料在高速载荷作用下呈现出一系列力学特性:

- (1) 瞬时应力随应变率的提高而提高,如图 1.1(a)~(c)所示;
- (2) 屈服极限随应变率的提高而提高,如图 1.1(d)~(e)所示;
- (3) 对应变历史有记忆功能,如图 1.2 所示;
- (4) 温度越高屈服极限和瞬时应力越低,如图 1.3 所示.

以上前两项称为应变率效应,第三、四项称为应变历史效应和温度效应.

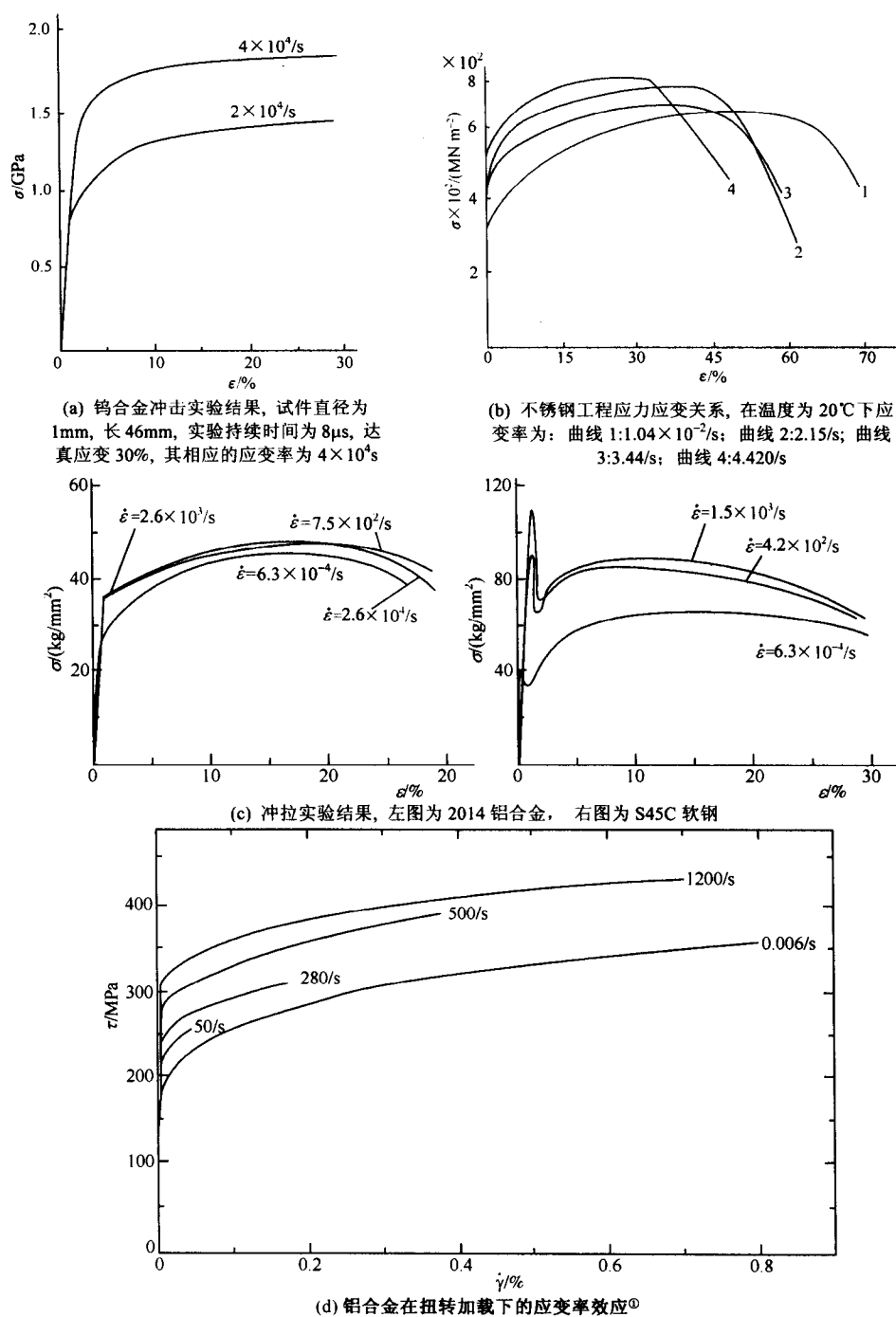
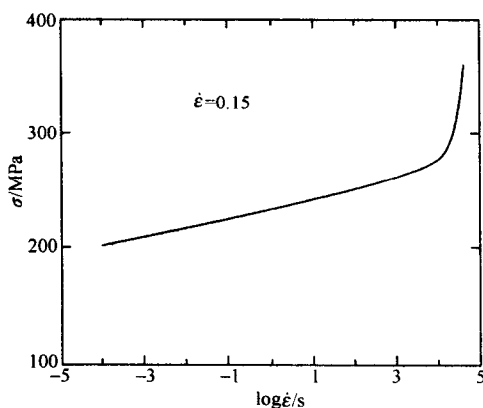


图1.1



(e) 压应力与压应变率在应变为0.15时的关系, 用SHPB
技术应变率达 $10^5/\text{s}$

图1.1(续)

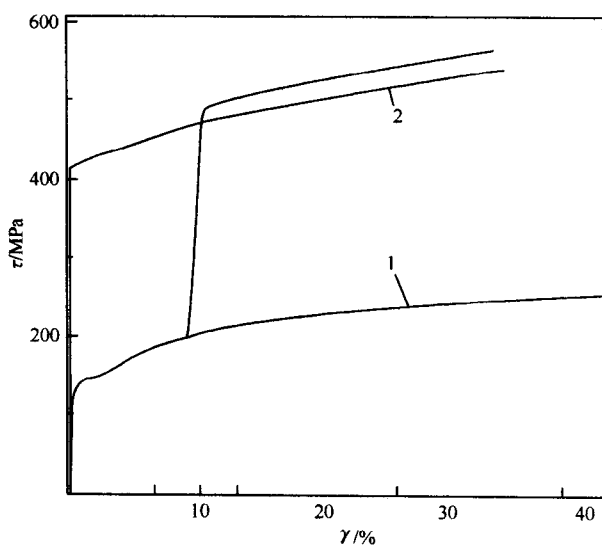


图1.2 应变历史效应

曲线1: $T = 295\text{K}$; 曲线2: $T = 83\text{K}$, $\dot{\gamma} = 5 \times 10^{-4}$

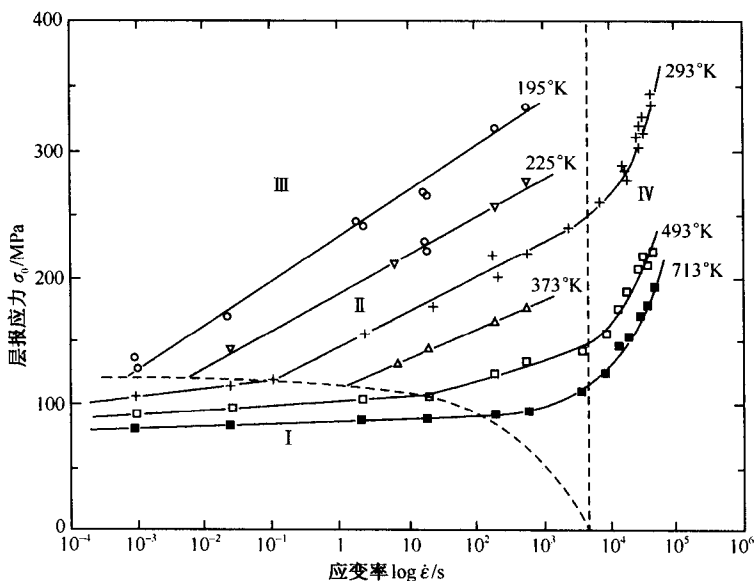


图1.3 温度效应

I 区: 低应变率时, 温度与应变率关系不大; II 区: 屈服应力随温度的提高而降低, 且成线性变化; III 区: 实验未达区; IV 区: 在高应变率条件下, 温度的升高引起屈服应力的急剧下降, 且不再成线性关系. 应变率与温度之间有

下列关系: $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_0 \exp\{-\psi(\sigma^*, T)/kT\}$, 此处 ψ 为自由能, $\dot{\epsilon}_0$ 与可动位错密度有关的极限应变率

1.4 矢量与矢量代数

今后将经常采用矢量和张量的表示法将冗长的公式写得简洁明了, 同时约定用黑体字母表示矢量和张量, 而上下标的记法则按 Einstein 求和约定, 即重复一次的上、下标表示求和(例如 i)若在 N 维空间, 则 $i = 1, 2, \dots, N$, 例如

$$S = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_N b^N, \quad (1.1)$$

求和指标又称为哑指标. 这种指标采用什么字母是无关紧要的, 即

$$a_i b^i = a_j b^j = a_m b^m = \dots \quad (1.2)$$

求和约定也可用来表示双重和式、多重和式等.

$$a_{ij} x^j = b_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

中的指标 i 称为自由指标, 它在此方程中每项只出现一次, 不符合求和约定. 方程组(1.3)的展开为

$$\begin{cases} a_{1j}x^j = b_1, \\ a_{2j}x^j = b_2, \\ a_{3j}x^j = b_3. \end{cases} \quad (1.4)$$

方程(1.4)按求和约定可以展开, 例如, 第一式为

$$a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = b_1.$$

现在介绍矢量与矢量代数

矢量是用来表示有大小和方向的物理量, 通常用黑体字母表示, 在三维空间中则是一条带箭头的直线. 矢量的和按平行四边形法则. 矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的和服从交换律和结合律, 即有

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (1.5)$$

矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的差为 $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \quad (1.6)$$

若 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, 则显然有 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = 0$.

此外, 数乘以矢量也满足分配律和结合律, 即有

$$(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}, \quad m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b} \quad (1.7)$$

和

$$m(n\mathbf{a}) = mn\mathbf{a}. \quad (1.8)$$

由此可见, 在同一空间的矢量组 $\mathbf{a}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的线性组合 $\sum_i^n m_i \mathbf{a}_i$ 必仍为该空间的矢量. 这时, 当且仅当实数 $m_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时才称这组 n 个矢量是线性无关的, 即

$$\sum_i^n m_i \mathbf{a}_i = 0. \quad (1.9)$$

若实数 m_i 不全为零, 而使得式(1.9)成立, 则称矢量组 $\mathbf{a}_i$ 线性相关. 显然, 在 n 维空间可有 n 个线性无关的矢量, 而在二维(三维)空间则最多只可能有两个(三个)线性无关的矢量.

若定义 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为沿 x, y, z 轴方向的单位矢量, 则任一矢量 $\mathbf{u}$ 可表示为

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}. \quad (1.10)$$

定义两矢量 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{u}$ 的点积为

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{F}| |\mathbf{u}| \cos(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}), \quad (1.11)$$

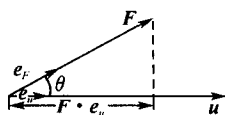


图1.4 两矢量的点积

式(1.11)中 $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})$ 表示矢量 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{u}$ 之间的夹角(图 1.4).

两矢量的点积服从交换律和结合律, 即有

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

及

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad (1.13)$$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|. \quad (1.14)$$

式(1.14)称为 Schwartz 不等式.

定义两矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的叉积是垂直于它们构成平面的另一矢量 $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

其中, $\mathbf{w}$ 为垂直与 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 平面的矢量, 其方向按右手法则确定. 如图 1.5 所示.

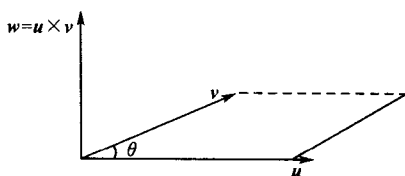


图1.5 两矢量的叉积

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

叉积的模为

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (1.16)$$

若交换叉积的顺序, 则相应的叉积应反号. 此外, 叉积满足分配律, 但不满足结合律. 例如