(原书第二版)

数学名著译丛

环与模范畴

〔美国〕F.W.安德森 K.R.富勒尔 著

王 尧 任艳丽 译

科学出版社
www.sciencep.com

图字:01—2007—3538 号

内 容 简 介

本书介绍了环与模的基本知识和一般环的经典结构理论,介绍了模范畴之间的函子变换、模范畴的对偶与等价,以及投射模、内射模和它们的分解理论等现代环论基础知识与研究方法. 本书内容丰富,知识自包含,并附有大量习题.

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师以及从事数学、信息科学等研究工作的人员阅读参考.

Translation from the English Language edition:
Rings and Categories of Modules by Frank W. Anderson and Kent R. Fuller

图书在版编目(CIP)数据

环与模范畴/〔美国〕F. W. 安德森,K. R. 富勒尔著. 北京:科学出版社,2008
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-020267-3

Ⅰ. 环… Ⅱ. ①安…②富…③王…④任… Ⅲ. ①环②模(数学)
Ⅳ. O153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 026326 号

责任编辑:张 扬/责任校对:李奕萱
责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 5 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张:23
印数:1—4 000 字数:438 000

定价:58.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

序

环以及其上的模是代数学中最基本的研究对象. 作为一本系统地介绍环以及其上模的一般理论的专著, **F.W.Anderson** 和 **K.R.Fuller** 的著作《**Rings and Categories of Modules**》(《环与模范畴》) 的第一版由德国 **Springer** 公司作为美国研究生教材 (黄皮书之 **GTM 13**) 于 **1974** 年出版. 由于它被环论和模论等研究方向的众多专家学者广泛引用, 影响很大. 这本著作被 **Springer** 公司于 **1992** 年再次出版. 该书论述简洁易懂, 只要有一般近世代数的知识即可阅读, 且知识自包含. 该书内容丰富, 它不仅用现代环论方法, 比较详细地介绍了环、模的基本概念、基本理论和基本方法, 介绍了有限维代数的表示理论的基础, 介绍了同调代数的基本知识, 包括内射模、投射模以及它们的分解, 模范畴的等价和对偶等, 而且用这些现代环论工具重新阐述经典环论理论, 如环的 Jacobson 理论、 Artin 环理论等, 书后还附有大量习题. 它既是一本不可多得的研究生好教材, 也是代数研究工作者必备的一本工具性参考书. 从美国数学会的网站 (**MathSciNet**) 中检索知, 这本著作的两个版本迄今已被引用了近 500 余次. 因此, 该书不失为一本有关环论的经典性、基础性名著.

我在 1982 年写的书《环与代数》(科学出版社, 1983), 在其出版后的 20 多年中被国内环论方面的研究生作为教科书或参考书广泛使用着, 这本书基本上用元素和理想的语言来研究环与代数的结构问题而绕过了同调代数, 这在当时就是一个严重的缺陷, 现今更显得陈旧, 这本书再版时, 将增加若干章, 以示同调代数、函子及范畴等是研究环与代数的非常有力的工具, 为此有限维代数表示论的基础当是首选内容. Anderson-Fuller 的这本书, 则是强调了环论中的同调代数方法, 应该说, 这两本书有很好的互补性. 我和 Fuller 教授是老相识, 20 世纪 90 年代初他曾来北京师范大学讲学, 我也应他的邀请在 Lowa 大学访问过. 我和 Fuller 教授都是一般环论出身, 也都是看重和喜欢代数表示

论的：代数表示论不但是一个非常有生命力的方向，而且为一般环论提供许多有启发性的具体例子，这是一般环论本身不具有的．对于初学环论的人，同时学习或参考 Anderson-Fuller 的书和我的《环与代数》是有益的．

多年来，国内外许多学者都希望能见到该著作的中译本．王尧教授、任艳丽教授结合教学实践，正是在再版的基础上对这本著作进行了翻译．我相信他们的这本译著将会给国内的环论工作者 (特别是环论方向的研究生) 的学习和研究带来诸多方便．所以，我非常乐意推荐本译著的出版，并以此作序．

刘绍学

2007 年 3 月

于北京师范大学

前　　言

本书旨在介绍环与模的一般理论，其内容完整，自成体系，可作为一本入门教材或高年级的教材. 我们假定读者熟悉在大学代数课程中教授的环的知识，我们处理问题使用的是范畴方法，而不是算术方法. 本书的主题是研究一个环可能拥有的单边理想结构和它的模范畴的表现间的联系.

本书首先简短概述集合理论和范畴基础，然后介绍环、模和同态的基本定义和性质，重点论述了直和、有限条件、Wedderburn-Artin 定理、Jacobson 根、hom 和 tensor 函子、Morita 等价和对偶、内射模和投射模的分解理论、以及半完备环和完备环等理论. 在本书的再版中，我们增加一章，讨论了 Artin 环已有的研究成果. 这些成果有助于构成 Artin 环和有限维代数当代表示理论的研究基础. 为了更好地阐述和延伸本书内容，在书中我们还相应地配了大量习题，其中包括有一定难度的习题. 当然，也有许多关于环和模的重要理论本书没有涉及到，例如同调、商环以及交换环理论.

本书的取材主要来自我们过去几年使用过的讲义和研究结果. 在撰写本书的过程中，我们受到了学生和同事的启发，对他们的鼓励深表谢意. 在此，我们也衷心地感谢那些曾经在一、二版编辑过程中给予我们帮助的人，还要感谢那些在前期编写过程中，给我们提出修改意见的人.

最后，我们要向那些被引用了著作，但没有被署名的作者表示歉意. 实际上，本书所有的研究成果均以某种形式在有关文献中出现，它们均可在参考文献所列参考书目或文章中找到，也可以在我们总参考文献中找到.

F.W. 安德森于尤金市

K.R. 富勒尔于衣阿华市

1992 年 1 月

目　录

§ 0. 准　　备

本节集中给出各种概念、术语以及相关背景信息. 当然, 以后根据需要我们可以改变概念和术语, 那时将做自我说明, 而不需要任何进一步的解释.

关于范畴, 我们将只涉及非常特殊的具体范畴, 并且对于范畴代数的运用也只是术语上的初级的运用, 可以把它只看作是一个术语. 这里我们给出经常用到的基本术语和略多的知识. 我们强调尽管范畴的实际运用将逐步发展, 但我们希望是很自然的发展. 因此, 刚开始时不需要努力掌握它.

0.1 函数　一般我们写函数 “在左边”, 但也不总是这样. 即如果 f 是 A 到 B 的函数, 并且 $a \in A$, 我们用 $f(a)$ 表示 f 在 a 点的值. 记法 $f: A \to B$ 表示 A 到 B 的函数. 一个函数 $f: A \to B$ 按元素作用定义为

$$f: a \mapsto f(a) \quad (a \in A).$$

从而, 如果 $A' \subseteq A$, f 在 A' 上的限制 $(f \mid A')$ 定义为

$$(f \mid A'): a' \mapsto f(a') \quad (a' \in A').$$

给定 $f: A \to B$, $\quad A' \subseteq A$, $\quad B' \subseteq B$, 我们记

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}, \quad f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}.$$

两个函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 的 **合成** 或者 **积** 我们记为 $g \circ f$, 或者当没有歧义时, 记为 gf; 从而, $g \circ f: A \to C$ 定义为 $g \circ f: a \mapsto g(f(a))$ $(a \in A)$. 无论在哪里定义, 函数的运算都满足结合律. A 到它自身的 **恒等函数** 记为 1_A. A 到 B 所有函数的集合记为 B^A 或 $Map\ (A, B)$:

$$B^A = Map\ (A, B) = \{f \mid f: A \to B\}.$$

因此 A^A 在合成运算下是一个幺半群 (= 有单位元的半群).

称集合和函数组成的图表 **可交换** 或是 **交换的**, 如果从一点到另一点与路径选择无关. 例如, 下面第一个图表可交换当且仅当 $f = hg$. 如果第二个可交换,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[dl, "j"] \\ D \arrow[r, "i"] & E \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

特别地, 从 A 到 E 与路径的选择无关, 则 $jgf = ih$.

称函数 $f: A \to B$ 是 **单射的 (满射的)** 或是一个 **单射 (满射)**, 如果它有 **左 (右) 逆** $f': B \to A$, 即对于某个 $f': B \to A$, 如果 $f'f = 1_A(ff' = 1_B)$. 因此 (见 (0.2)) $f: A \to B$ 是单射 (满射) 当且仅当 f 是一对一的 (到 B 上的). 称函数 $f: A \to B$ 是 **双射的** 或一个 **双射**, 如果 f 既是单射又是满射, 即当且仅当存在 (唯一的) 逆函数 $f^{-1}: B \to A$ 使得 $ff^{-1} = 1_B, f^{-1}f = 1_A$.

如果 $A \subseteq B$, 则函数 $i = i_{A \subseteq B}: A \to B$ 定义为 $i = (1_B \mid A): a \mapsto a$(对于任意 $a \in A$), 称其为 A 到 B 中的 **包含映射**. 注意, 如果 $A \subseteq B, A \subseteq C$, 且 $B \neq C$, 则 $i_{A \subseteq B} \neq i_{A \subseteq C}$. 当然, $1_A = i_{A \subseteq A}$.

对于每对 $(0,1)$ 都有一个 Kronecker**符号**, 即所有序对组成的类上的函数 $\delta: (\alpha, \beta) \mapsto \delta_{\alpha\beta}$ 定义为

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

无论什么时候我们用 Kronecker 符号, 上下文都将清楚介绍元素对 $(0,1)$ 的意义.

0.2 选择公理　设 A 是一个集合, $\mathscr{S}$ 是 B 中非空子集构成的集族, σ 是 A 到 $\mathscr{S}$ 的一个函数, 则 **选择公理** 是指存在一个函数 $g: A \to B$, 使得

$$g(a) \in \sigma(a) \quad (a \in A).$$

现在假设 $f: B \to A$ 是到 A 上的, 即 $f(B) = A$, 则对于每个 $a \in A$, 都存在非空子集 $\sigma(a) = f^{-1}(\{a\}) \subseteq B$. 对 A, 函数 $\sigma: a \mapsto \sigma(a)$ 和 B 的子集族 $\mathscr{S}$ 应用选择公理产生了 f 的右逆 g, 因此正如 (0.1) 中所述, f 是满射.

设 $\sim$ 是集合 A 上的等价关系. 称 A 的子集 R 是关系 $\sim$ 的 **表示的 (完全) 无冗余集**, 如果对于每个 $a \in A$, 都有唯一的 $\sigma(a) \in R$ 使得 $a \sim \sigma(a)$. 选择公理确保了每个等价关系的表示的无冗余集的存在性.

0.3 笛卡儿积　函数 $\sigma: A \to X$ 有时称为 **指标集 (在X内被A加标)** 或 A **-多元组 (X内的)**, 并记作

$$\sigma = (x_\alpha)_{\alpha \in A},$$

其中 $x_\alpha = \sigma(\alpha)$. 如果 $A = \{1, \cdots, n\}$, 则我们使用标准记法 $(x_\alpha)_{\alpha \in A} = (x_1, \cdots, x_n)$. 设 $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 X 的非空子集的指标集, 则 $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 的 **(笛卡儿) 积** 是

$$\times_A X_\alpha = \{\sigma: A \to X \mid \sigma(\alpha) \in X_\alpha \ (\alpha \in A)\}.$$

即 $\times_A X_\alpha$ 恰是所有 A - 多元组 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 组成的集合, 其中 $x_\alpha \subseteq X_\alpha \ (\alpha \in A)$. 由选择公理知 $\times_A X_\alpha$ 是非空的. 如果 $A = \{1, \cdots, n\}$, 则我们改变记法记作

$$\times_A X_\alpha = X_1 \times \cdots \times X_n.$$

注意，如果 $X = X_\alpha \quad (\alpha \in A)$，则笛卡儿积 $\times_A X_\alpha$ 就是 X^A，即 $A \to X$ 的所有函数组成的集合. 对于每个 $\alpha \in A$，α-**投射** $\pi_\alpha : \times_A X_\alpha \to X_\alpha$ 定义为

$$\pi_\alpha : \sigma \mapsto \sigma(\alpha) \quad (\sigma \in X_A X_\alpha).$$

在 A - 多元组的记法中，$\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta \in A}) = x_\alpha$. 选择公理的一个简单应用表明每个 π_α 都是满射. 注意，如果 σ 和 σ' 都在笛卡儿积中，则 $\sigma = \sigma'$ 当且仅当对于所有 $\alpha \in A$，有 $\pi_\alpha \sigma = \pi_\alpha \sigma'$. 这个事实确定了下述结果的唯一性. 我们常用这个结果 **按坐标** 给出某些定义，我们省略该结果的简单证明.

0.4 设 $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是非空集合的指标集，Y 是一个集合，而且对于任意 $\alpha \in A$，设 $f_\alpha : Y \to X_\alpha$，则存在唯一的 $f : Y \to X_A X_\alpha$，使得对于每个 $\alpha \in A$，都有 $\pi_\alpha f = f_\alpha$.

0.5 偏序集和格 称集合 P 上的关系 $\leqslant$ 是 **偏序关系**，如果 $\leqslant$ 是自反的 $(a \leqslant a)$、传递的 $(a \leqslant b$，且 $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c)$、反对称的 $(a \leqslant b$，且 $b \leqslant a \Rightarrow a = b)$. 把集合和这个集合上的偏序关系组成的对 $(p, \leqslant)$ 称为 **部分序集** 或 **偏序集**，记作 $(P, \leqslant)$. 如果这个偏序集是全序集 (对于每对 a, b，有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$)，则称它是一个 **链**. 如果 $(P, \leqslant)$ 是偏序集，且 $P' \subseteq P$，$(P', \leqslant')$ 是 $\leqslant$ 在 P' 上的限制，则称 $(P', \leqslant')$ 是偏序子集. 因此，我们通常认为偏序集 $(P, \leqslant)$ 和它的基础集 P 是一致的.

设 P 是偏序集，$A \subseteq P$，称元素 $e \in A$ 是 A 中的 **最大元 (最小元)**，如果对于所有的 $a \in A$，有 $a \leqslant e$ $(e \leqslant a)$. 并不是偏序集的每个子集都有最大元或最小元，但是如果存在，则一定是唯一的 (见下面的例子 (2).). 称元素 $b \in P$ 是 A 的 **上界 (下界)**，如果对于所有的 $a \in A$，有 $a \leqslant b$ $(b \leqslant a)$. 因此，如果 A 的最大元 (最小元) 存在，则它一定是 A 的上界 (下界). 如果 A 的上界组成的集合有最小元，则称这个最小元为 A 的 **最小上界**(lub),**并** 或者 **上确界**(sup); 如果 A 的下界组成的集合有最大元，则称这个最大元为 A 的 **最大下界**(glb),**交**、或者 **下确界**(inf).**格 (完全格)** 是指偏序集 P 的任意元素对 (任意子集) 在 P 内既有最小上界又有最大下界.

例 (1) 设 X 是一个集合. X 的幂集合是指 X 中所有子集组成的集合 $\mathscr{P}(X)$，在集合包含关系为偏序关系下 $\mathscr{P}(X)$ 是偏序集. 偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 是完全格，这是因为如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的子集，则 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{P}(X)$ 内的最小上界是 $\cup\mathscr{A}$，最大下界是 $\cap\mathscr{A}$.

例 (2) 设 X 是一个集合，$\mathscr{F}(X)$ 是 X 中一切有限子集构成的集合，则 $\mathscr{F}(X)$ 关于集合包含关系是偏序集，并且 $\mathscr{F}(X)$ 是格. 这是因为如果 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，则 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 是它们的最小上界和最大下界，由于 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 也是 A, B 在 $\mathscr{P}(X)$ 内的最小上界和最大下界，从而 $\mathscr{F}(X)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的子格. 但是注意，如果 X 是无限的，则 $\mathscr{F}(X)$ 不是完全格.

例 (3) 设 X 是实线数值上单位闭区间，则 X 内所有闭区间构成的集合 $\mathscr{J}(X)$ 显然是 $\mathscr{P}(X)$ 的偏序子集，而且 $\mathscr{J}(X)$ 的任何子集的交 (= 在 $\mathscr{P}(X)$ 的最大下界) 还在 $\mathscr{J}(X)$ 内. $\mathscr{J}(X)$ 的任意子集 $\mathscr{A}$ 的并的凸闭包在 $\mathscr{J}(X)$ 内，而且也是 $\mathscr{A}$

在 $\mathscr{J}(X)$ 内的最小上界，因此 $\mathscr{J}(X)$ 是完全格. 但是 $\mathscr{J}(X)$ 不是 $\mathscr{P}(X)$ 的子格，这是因为 $\mathscr{J}(X)$ 的某个元素对在 $\mathscr{J}(X)$ 的最小上界并不是 $\mathscr{P}(X)$ 内的最小上界 (= 并).

例 (4) 设 X 是二维实向量空间，$\mathscr{S}(X)$ 是所有子空间构成的集合，则 $\mathscr{S}(X)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的偏序子集，而且 $\mathscr{S}(X)$ 的任意子集的交还在 $\mathscr{S}(X)$ 内. $\mathscr{S}(X)$ 的任意子集 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{S}(X)$ 内的最小上界是由 $\cup\mathscr{A}$ 生成的子空间 (不一定是 $\cup\mathscr{A}$ 本身). 因此 $\mathscr{S}(X)$ 是完全格但不是 $\mathscr{P}(X)$ 的子格.

设 P 是格，则每对 $a, b \in P$ 在 P 内都有最小上界和最大下界，我们分别记为 $a \vee b$ 和 $a \wedge b$. 这样通过以下方式定义的 $P \times P$ 到 P 的映射 $\vee$ 和 $\wedge$

$$(a, b) \mapsto a \vee b, \quad (a, b) \mapsto a \wedge b,$$

就都是 P 上的二元运算. 易见 $(P, \vee)$ 和 $(P, \wedge)$ 是交换半群，其中

$$a \vee a = a \wedge a \quad (a \in P).$$

称格是 **模格**, 如果格满足 **模律**: 对于所有的 $a, b, c \in P$,

$$\text{由 } a \geqslant b \text{ 可推出 } a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c).$$

我们遇到的大多数格是模格 (但是上面的 (3) 不是). 称格是 **分配的**, 如果它满足更强的性质：对于所有 $a, b, c \in P$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

例如 (1) 和 (2) 是分配的，但 (4) 不是.

0.6 如果偏序集 P 有最小上界 (即 P 含有一个最大元), 而且 P 的每个非空子集在 P 内都有最大下界，则 P 是完全格.

证明 只需证明如果 $B \subseteq P$, 则 B 在 P 内有最小上界. 设 $e \in P$ 是 P 中的最大元，则对于所有的 $x \in P$, 有 $e \geqslant x$. 特别地,B 的上界构成的集合是非空的，因此 B 的上界有最大下界. 显然 B 的上界的最大下界是 B 的一个上界，因此也是 B 的最小上界. □

0.7 格同态 设 P 和 P' 是偏序集，称映射 $f : P \to P'$ 是 **保序的 (反保序的)**, 如果由 P 中 $a \leqslant b$ 可推出 P' 中 $f(a) \leqslant f(b)(f(b) \leqslant f(a))$. 如果 P 和 P' 是格，称 f 是 **格同态 (格反同态)**, 如果 $a, b \in P$, 有

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad (f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \quad (f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b)).$$

易见 (运用 $a \leqslant b \Leftrightarrow a = a \wedge b$) 格同态是保序的. 但反之不成立 (运用 (0.5) 中例 (3) 的包含映射 $g(x) \to \mathscr{P}(\mathrm{x})$). 双射的格 (反) 同态是 **格 (反) 同构**. 容易证明下面这个有用的结果.

0.8 设 P 和 P' 是格，$f: P \to P'$ 是双射，它的逆映射为 $f^{-1}: P' \to P$, 则 f 是格同构当且仅当 f 和 f^{-1} 是保序的.

0.9 极大值原理 设 P 是偏序集，称元素 $m \in P$ 是 P 中的 **极大元 (极小元)**, 如果 $x \in P$, 而且由 $x \geqslant m$ ($x \leqslant m$) 可推出 $x = m$. 显然，P 中的最大元 (最小元) 如果存在，则一定是 P 中的极大元 (极小元). 另一方面，偏序集可能有许多极大元 (极小元) 但没有最大元 (最小元).

称偏序集 P 是 **归纳的**, 如果 P 的每个子链在 P 内都有上界，即对于 P 的每个全序子集 C(全序关系为 P 中的偏序关系), 存在 P 中的一个元素大于或者等于 C 中的每个元素. **极大值原理**(经常称为 Zorn 引理) 是选择公理的等价形式 (详见 Stoll [63]). 极大值原理的叙述是:

每个非空的归纳的偏序集至少有一个极大元.

0.10 基数 称两个集合 A 和 B 是 **基数等价** 的或 **有相同的基数**, 如果存在 A 到 B 的一个双射 (因此也存在一个 B 到 A 的双射). 由于基数等价这一关系是集合之间的一个等价关系，从而所有集合的类 (见 (0.11)) 可以按基数等价划分为若干个集合的类，这些不同集合的类就是不同的 **基数**. 集合 A 的类记为 $card\ A$:

$$card\ A = \{B \mid \text{ 存在一个双射 } A \to B\}.$$

给了两个集合 A 和 B, 我们记作

$$card\ A \leqslant card\ B,$$

如果存在一个 A 到 B 的单射 (或者等价地存在 B 到 A 的一个满射). 显然此定义与代表元 A 和 B 的选择无关. 给了集合 A 和 B, 总存在一个到另一个的单射. Cantor-Schröder-Bernstein 定理的叙述是:

如果 $card\ A \leqslant card\ B$, 且 $card\ B \leqslant card\ A$, 则 $card\ A = card\ B$.

从而关系 $\leqslant$ 关于基数的类是一个全序集.

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 是自然数，它的基数通常记为 $card\ \mathbb{N} = \aleph_0$. 称集合 A 是 **有限的**, 如果 $card\ A < card\ \mathbb{N}$. 当然 $card(\{1, \cdots, n\}) = n$, $card\ \varnothing = 0$. 如果 $card\ A \leqslant card\ \mathbb{N}$, 则 A 是 **可数的**. 如果 $card\ A \geqslant card\ \mathbb{N}$, 则 A 是 **无限的**.

基数的算术运算定义为

$$card\ A + card\ B = card((A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})),$$

$$card\ A \cdot card\ B = card(A \times B),$$

$$(card\ A)^{(card\ B)} = card(A^B),$$

如果 A 和 B 是有限集，则上述运算等同于普通的加法，乘法和取幂. 而且，它们满足:

(1) 如果 A 是无限集，则 $card\ A + card\ B = \max\{card\ A, card\ B\}$.

(2) 如果 A 是无限集，且 $B \neq \varnothing$, 则

$$card\ A \cdot card\ B = \max\{card\ A, card\ B\}.$$

(3) 对于所有集合 A, B 和 C, 有

$$((card\ A)^{(card\ B)})^{(card\ C)} = (card\ A)^{(card\ B)\cdot(card\ C)}.$$

(4) 如果 $card\ B \geqslant 2$, 则 $(card\ B)^{(card\ A)} > card\ A$.

很容易在幂集合 $\mathscr{P}(A)$ 和由 A 到 $\{1,2\}$ 的函数组成的集合之间建立一个双射. 从而有 $card\ (\mathscr{P}(A)) = 2^{(card\ A)} > card\ A$. 然而，任何无限集合 A 的一切有限子集构成的集合和 A 有相同的基数. 详见 Stoll[63].

0.11 范畴　"类" 同 "集合" 一样，我们不做定义. 每个集合都是一个类，而且存在一个类包含所有集合. 注意，如果 A 是集合，$\mathscr{C}$ 是类，则 $\mathscr{P}(A)$ 中的指标类 $(A_C)_{C\in\mathscr{C}}$ 的交和并在 A 内. 设 $\mathscr{C}$ 是类，对于每对 $A, B \in \mathscr{C}$, 设 $mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ 是集合，$mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ 的元素记为 "射" $f : A \to B, A$ 称为 **定义域**,B 称为 **值域**. 最后，假设对于三元组 $A, B, C \in \mathscr{C}$, 存在函数

$$\circ : mor_{\mathbf{C}}(B, C) \times mor_{\mathbf{C}}(A, B) \to mor_{\mathbf{C}}(A, C).$$

则我们把由一对 "射"

$$g : B \to C \quad , \quad f : A \to B$$

确定的 "射" 记为 $gf : A \to C$. 称由类 $\mathscr{C}$, 映射 $mor_{\mathbf{C}} : (A, B) \mapsto mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ 以及规则 $\circ$ 组成的系统 $\mathbf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 是一个 **范畴**, 如果它满足

(C.1) 对于每个三元组 $h : C \to D, g : B \to C, f : A \to B$, 有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(C.2) 对于每个 $A \in \mathscr{C}$, 如果 $f : A \to B \quad g : C \to A$, 则

存在唯一的 $1_A \in mor_{\mathbf{C}}(A, A)$ 使得

$$f \circ 1_A = f \quad , \quad 1_A \circ g = g.$$

如果 $\mathbf{C}$ 是范畴，则类 $\mathscr{C}$ 中的元素称为此范畴的 **对象**,"射" $f : A \to B$ 称为 **态射**, 部分映射 $\circ$ 称为 **合成**, 态射 1_A 称为范畴的 **单位元**. 称 $\mathbf{C}$ 内的态射 $f : A \to B$ 为 **同构**, 如果 $\mathbf{C}$ 内存在 (一定是唯一的) 态射 $f^{-1} : B \to A$ 使得 $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$.

我们最感兴趣的范畴是某些 "具体" 范畴. 设 $\mathbf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 是范畴. 说 $\mathbf{C}$ 是 **具体范畴**, 如果存在从 $\mathscr{C}$ 到集合类的函数 u 使得对于每个 $A, B \in \mathscr{C}$, 有

$$mor_{\mathbf{C}}(A, B) \subseteq Map\ (u(A), u(B)),$$

$$1_A = 1_{u(A)},$$

并且$\circ$是通常的函数的合成. 这里同构 $f: A \to B$ 就是一个双射 $f: u(A) \to u(B)$.

例 (1) 设 $\mathscr{S}$ 是所有集合的类, 对于每对 $A, B \in \mathscr{S}$, 令 $mor_{\mathbf{S}}(A,B) = Map\ (A,B)$, 而且对于一切 $A,B,C \in \mathscr{S}$, 设 $\circ: mor_{\mathbf{S}}(B,C) \times mor_{\mathbf{S}}(A,B) \to mor_{\mathbf{S}}(A,C)$ 是函数的合成, 则 $\mathbf{S} = (\mathscr{S}, mor_{\mathbf{S}}, \circ)$ 是具体范畴, 其中对于每个 $A \in \mathscr{S}$, 有 $u(A) = A$. 称 $\mathbf{S}$ 为 **集合范畴**.

例 (2) 设 $\mathscr{G}$ 是所有群组成的类, $mor_{\mathbf{G}}(G,H)$ 是 G 到 H 的所有群同态构成的集合, 而且令 $\circ$ 是通常的函数的合成, 则 $\mathbf{G} = (\mathscr{G}, mor_{\mathbf{G}}, \circ)$ 是具体范畴, 即 **群范畴**, 其中 $u(G)$ 是 G 的基础集.

例 (3) 实向量空间V的范畴 是 $(\mathscr{V}, mor_{\mathbf{V}}, \circ)$, 其中 $\mathscr{V}$ 是实向量空间组成的类, $mor_{\mathbf{V}}(U,V)$ 是 U 到 V 的线性变换构成的集合, $\circ$ 是通常的合成. 此范畴是具体范畴, 其中 $u(V)$ 是 V 的基础集.

例 (4) 设 $\mathscr{P}$ 是所有偏序集组成的类, $mor_{\mathbf{P}}(P,Q)$ 是所有单调映射 (保序的和反保序的) 构成的集合, $\circ$ 是通常的合成, 则 $(\mathscr{P}, mor_{\mathbf{P}}, \circ)$ 不是范畴, 这是因为$\circ$不符合要求——两个单调函数的合成不一定是单调的.

如果 $\mathbf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 是具体范畴, 则集合 $u(A)$ 称为 $A \in \mathscr{C}$ 的基础集.

称范畴 $\mathbf{D} = (\mathscr{D}, mor_{\mathbf{D}}, \circ)$ 是 $\mathbf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 的 **子范畴**, 如果 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$, 对于每对 $A, B \in \mathscr{D}$, 有 $mor_{\mathbf{D}}(A,B) \subseteq mor_{\mathbf{C}}(A,B)$, $\mathbf{D}$ 内的 $\circ$ 是 $\circ$ 在 $\mathbf{C}$ 中的限制. 如果再加上对于每对 $A, B \in \mathscr{D}$, 有 $mor_{\mathbf{D}}(A,B) = mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ 这一条件, 则 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{C}$ 的 **完全子范畴**.

显然 Abel 群组成的类是群范畴的一个完全子范畴的对象类, 而且此范畴有对象是有限 Abel 群的完全子范畴. 代数中最普遍的做法是认为范畴中的对象和它的基础集是一致的. 例如, 我们通常认为由集合 G 和运算 $\circ$ 组成的群 $(G,\circ)$ 与它的基础集 G 是一致的. 但是注意群范畴并不是集合范畴的子范畴, 这是因为对于 $\mathscr{G}$ 内的群 $(G,\circ),(H,\circ)$, 有

$$mor_G((G,\circ),(H,\circ)) \subseteq Map\ (G,H),$$

$$mor_G((G,\circ),(H,\circ)) \nsubseteq Map\ ((G,\circ),(H,\circ)).$$

0.12 函子　函子可以看作"范畴的同态". 设 $\mathbf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 和 $\mathbf{D} = (\mathscr{D}, mor_{\mathbf{D}}, \circ)$ 是两个范畴, 称函数对 $F = (F', F'')$ 是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的一个 **共变函子**, 如果 F' 是从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个函数, F'' 是从 $\mathbf{C}$ 中的态射到 $\mathbf{D}$ 中的态射的一个函数, 对于所有的 $A,B,C \in \mathscr{C}$, 所有的 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$, 且 $f, g \in \mathbf{C}$, 有

(F.1) $F''f: F'(A) \to F'(B)$ 在 $\mathbf{D}$ 中;

(F.2) $F''(g \circ f) = F''(g) \circ F''(f)$;

(F.3) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

从而，一个共变函子把对象映成对象，态射映成态射，单位元映成单位元，且“保持可换三角形”：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F'(A) \arrow[rr, "F''(f)"] \arrow[dr, "F''(g\circ f)"'] & & F'(B) \arrow[dl, "F''(g)"] \\ & F'(C) & \end{tikzcd}$$

一个 **反变函子** 是一对 $F=(F',F'')$, 满足：

$(F.1)^*$ $F''(f):F'(B)\to F'(A)$ 在 $\mathbf{D}$ 中；

$(F.2)^*$ $F''(g\circ f)=F''(f)\circ F''(g)$；

$(F.3)$ $F''(1_A)=1_{F'(A)}$.

因此一个反变函子“颠倒了射”.

例 (1) 给了范畴 $\mathbf{C}=(\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$, 就存在 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的 **单位函子**$1_{\mathbf{C}}=(1'_{\mathbf{C}},1''_{\mathbf{C}})$, 定义为 $1'_{\mathbf{C}}(A)=A$, $1''_{\mathbf{C}}(f)=f$.

例 (2) 设 $\mathbf{C}=(\mathscr{C}, mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ 是具体范畴，对于每个 $A\in\mathscr{C}$, 令 $F'(A)=u(A)$ 是 A 的基础集. 对于 $\mathbf{C}$ 中的每个态射 f, 令 $F''(f)=f$, 则显然 $F=(F',F'')$ 是 $\mathbf{C}$ 到集合范畴的一个共变函子，称它为 **遗忘函子**(因为它“忘记” $\mathbf{C}$ 对象上的所有“结构”). 很明显存在许多类型的“部分遗忘函子”——例如，实向量空间范畴到可换群范畴的共变函子“忘记了”标量乘法.

例 (3) 设 $(G,+)$ 是 Abel 群，如果 A 是集合，则 $(G^A,+)$ 是 Abel 群. 其中，对于 $\sigma,\tau\in G^A$, $\sigma+\tau\in G^A$ 定义为 $(\sigma+\tau):a\mapsto\sigma(a)+\tau(a)$. (注意 $(G^A,+)$ 关于按坐标进行运算的加法是 $card\ A$ 个 G 的笛卡儿积.). 定义 $F'(A)=(G^A,+)$. 如果 A,B 是集合, $f:A\to B$, 把 $F''(f):G^B\to G^A$ 定义为

$$F''(f)(\sigma)=\sigma\circ f \quad (\sigma\in G^B),$$

则 $F''(f)$ 是群同态， $F=(F',F'')$ 是从非空集合范畴到 Abel 群范畴的一个反变函子. 所有类型的反变函子都可用这种方法构造. 例如，如果 $(G,+,\circ)$ 是实向量空间，则按坐标进行运算可得 G^A 是一个向量空间，还可得到一个到实向量空间的反变函子.

给了函子 $F=(F',F'')$, 我们通常用 $F(A)$ 和 $F(f)$ 代替 $F'(A)$ 和 $F''(f)$. 对于上述替换, 应该注意的是, 范畴的一个态射 f 可能也是范畴的一个对象, 因此 $F'(f)$ 和 $F''(f)$ 有不同的意义.

0.13 自然变换 自然变换是指在相同的范畴中比较两个函子. 设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 是范畴, F 和 G 是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，比如说是共变函子. 令 $\eta=(\eta_A)_{A\in C}$ 是 $\mathbf{D}$ 内被 $\mathscr{C}$ 所标记的态射的指标类，使得对于每个 $A\in\mathscr{C}$, 有

$$\eta_A\in mor_{\mathbf{D}}(F(A),G(A)).$$

称 η 是 F 到 G 的 **自然变换**, 如果对于每对 $A, B \in \mathscr{C}$ 和每个 $f \in mor_{\mathbf{C}}(A, B)$, 图表

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

可交换, 即 $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$. 如果每个 η_A 都是同构, 则 η 称为 **自然同构** (如果 F 和 G 是反变函子, 只需颠倒射 $F(f)$ 和 $G(f)$ 即可). 函子的重要性在于"它们保持了可换三角形". 自然变换 η 实现了"可换三角形的平移":

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "\eta_A"] \arrow[dr, "F(f)"] \arrow[dd, "F(gf)"'] & & G(A) \arrow[dr, "G(f)"] \arrow[dd, "G(gf)"'] & \\
& F(B) \arrow[rr, "\eta_B"] \arrow[dl, "F(g)"] & & G(B) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(C) \arrow[rr, "\eta_C"] & & G(C) &
\end{tikzcd}$$

事实上 $\mathbf{C}$ 中的任意可换图形 $\triangle$, 当 F 和 G 作用在元素上时都会在 $\mathbf{D}$ 中产生可换图形 $F(\triangle)$ 和 $G(\triangle)$(因为 F 和 G 是函子), 从而 F 到 G 的一个自然变换 η 把 $F(\triangle)$ 可换地平移到 $G(\triangle)$ 上. 由于受现阶段知识的限制, 我们将在以后合适的时候给出更多有趣的函数的例子 (见 § 20).

一些特殊的记法

非负整数集: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
正整数集: $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$.
$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p$ 是素数 $\}$.
$\mathbb{Z} =$ 整数集.
$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
$\mathbb{Q}=$ 有理数集.
$\mathbb{R}=$ 实数集.
$\mathbb{C}=$ 复数集.
$\varnothing=$ 空集.