同济大学应用数学系主编《高等数学》
（第五版）上下册同步辅导

九章丛书

同济 五版

高等数学辅导
教材习题解析

教材上下册合订本同步辅导

编写　九章系列课题组
主编　苏志平

北京工商出版社

高等数学辅导教材习题解析(同济五版)
教材上下册合订本同步辅导

编写　九章系列课题组
主编　苏志平

北京工商出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导教材习题解析(同济五版)/苏志平主编. –北京工商出版社,2004.8

ISBN 7-80012-687-0

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.H310.42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 016862 号

【内容简介】 本书是为了配合由高等教育出版社出版的同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版而编写的辅导用书。

本书对教材中各章的重点、难点做了较深刻的分析,并通过例题加深理解,对各章习题做了全面解析解答。并且每章都附有考研要求及考验训练题。本书是高等学校本科生和考研生的重要参考书,也是教师的参考用书。并可作为自学者的辅导书。

高等数学辅导教材习题解析(同济五版)

苏志平 主编

出版发行:工商出版社出版发行

地　　址:北京市丰台区夏家胡同 268 号

邮　　编:100071

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:北京廊坊华星印刷厂

开　　本:727mm×960mm　1/16

印　　张:32.5

字　　数:766 千字

版　　次:2004 年 8 月第 1 版

印　　次:2004 年 8 月第 1 次

印　　数:1—5000

书　　号:ISBN 7-80012-687-0/F·331

定　　价:28.00 元

前　　言

高等数学是大学里的一门很重要的课程，它是理科学生后继专业课的基础，也是考研的必考课，因此学好这门课是非常重要的。

本书是配合同济大学《高等数学》第五版所编，各章节内容、课后习题紧扣课本，适合于初入大学门就想学好高等数学的学子，并且使他们一步一个台阶地前进，为日后考研、再深造打下坚实的基础。

本书的"本章导学"不同于一般的"内容提要"，它是我们给初学者提供指导，使他们在学习中更有方向性，学习更轻松。学习时精读"导学"，再回到教材中；在阅读教材时，又多回想"导学"，多次反复，效果会更佳。

本书每章的结构如下：

一、本章导学：采用图表的形式，把本章节的主要内容和逻辑结构最直观的呈现出来，使学生清晰掌握本章节主要内容与逻辑结构。——明确方向。

二、本章每一节

1. 本章重点难点：覆盖了本章节的主要考试要点，研究生入学考试的考点也覆盖在内。——解题关键。

2. 本节经典例题解析：提供本章节涉及题型常用的解题思维模式和解题套路羁绊覆盖了本章节所能用到的所有常用解题方法。——举一反三。

三、本章课后习题解答

四、本章考研要求

五、本章考研训练题：提供了大量的练习题，尤其选用了一些研究生入学考试真题，并且附有详细的解题过程——深化训练。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2004 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限及连续

本章导学

极限是整个高等数学的大厦的基石，连续、定积分、偏导数、重积分、曲线积分、曲面积分和无穷积数等等，均建立在极限定义基础上. 而 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 定义的极限十分严密，但不可能被“轻而易举”地理解，许多初学者在这里被拒之千里之外，从而动摇了学好这门课的自信心.

向初学者进言：对于一些同学，一时理解不透极限的定义，可以暂时搁置，跟上课程进度，通过后面的学习再回头来体会；对于能透彻理解极限定义的不要松劲，本课程入门的标志是第二章的“初等函数的求导”！

§1.1　映射与函数

§1.1.1　本节重点难点

表 1.1.1　函数及相关概念

名称	定　　义	说　　明	注　　意
函数	设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. $W=\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域. 点集 $G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.	函数定义的两个要素： ① 定义域 D：自变量 x 的变化范围. ② 对应法则 f：给定 x 的值，求 y 值的方法. 函数的表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y=f(x)$，$u=f(v)$ 等均表示同一函数.	当且仅当两个函数的定义域及对应法则均相同时，两个函数相等.
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数. 记作 $y=f[g(x)]$ 或 $y=f\cdot g$.	复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若存在 $X^*\in X$，使得 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^*\subset U$，而 U 为 $y=f(u)$ 的定义域，则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 X^*.	若 $\varphi(x)$ 的值域不含在 $f(u)$ 的定义域内则不能复合.
反函数	设 $y=f(x)$ 定义域为 X，值域为 W，若对于任给 $y\in W$，在 X 中只有一个数 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，x 看作函数，得到的一个新函数，称为函数 f 的反函数. 记作 f^{-1}，$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$.	函数 $y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)=x$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 图形关于直线 $y=x$ 对称，f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.	只有一一对应的函数才有反函数.

表 1.1.2　函数的几种简单特性

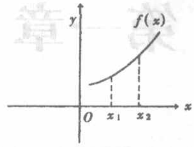
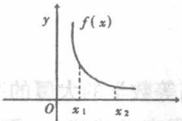
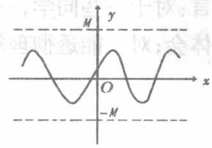
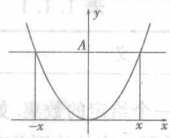
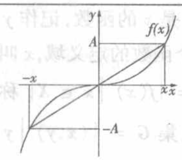
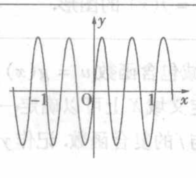
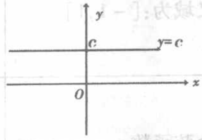
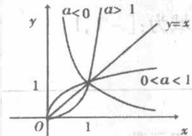
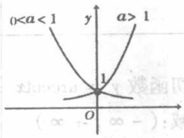
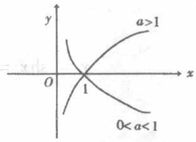
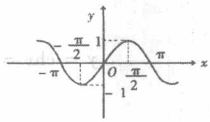
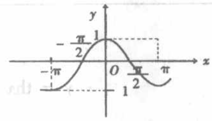
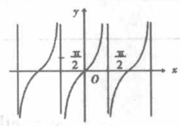
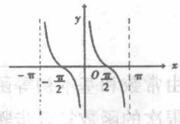
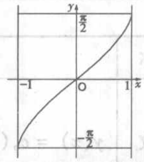
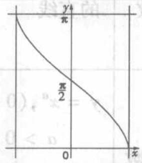
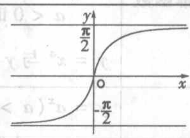
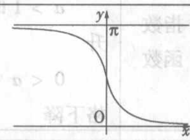
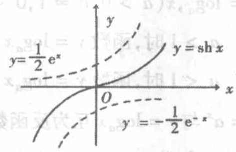
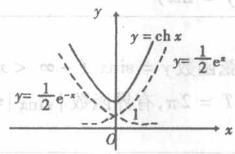
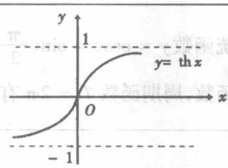
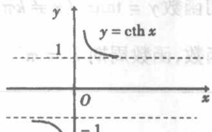
<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">定　义</th><th colspan="2">图例说明和注意</th></tr>
<tr><td rowspan="3">单调性</td><td>单调上升(单调递增)</td><td>函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1,x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>单调下降(单调递减)</td><td>函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1,x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降)</td></tr>
<tr><td>有界性</td><td colspan="2">函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\exists M>0, \forall x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$(或 $\exists m,M$，使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立)，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数</td><td colspan="2">即函数的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间</td></tr>
<tr><td>无界性</td><td colspan="2">函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\forall M>0, \exists x' \in X$，使得 $|f(x')| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界</td><td colspan="2">例：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x'=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x')=3M>M$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇偶性</td><td>偶函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D, f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.</td><td></td><td rowspan="2">函数的奇偶性是相对于区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数.</td></tr>
<tr><td>奇函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D, f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.</td><td></td></tr>
<tr><td>周期性</td><td colspan="2">设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.</td><td></td><td>一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数.
定义中，并不要求函数的定义域必须有界.</td></tr>
</table>

表 1.1.3　基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=c,(-\infty<x<+\infty)$. 平行于 x 轴，过 $(0,c)$ 点的直线	
幂函数	$y=x^a,(0<x<+\infty,a\neq 0)$ $a>0$ 时，函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<0$ 时，函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=x^a$ 与 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格上升 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.（若 $a=e$，记 $y=\log_e x$ 为 $y=\ln x$）	
三角函数	正弦函数 $y=\sin x,(-\infty<x<+\infty)$ 奇函数，函数周期 $T=2\pi$，有界函数 $\vert\sin x\vert\leqslant 1$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x),(-\infty<x<+\infty)$ 偶函数，周期函数 $T=2\pi$ 有界函数 $\vert\cos x\vert\leqslant 1$	
	正切函数 $y=\tan x,(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 奇函数，函数周期 $T=\pi$	
	余切函数 $y=\cot x,(x\neq k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 周期函数 $T=\pi$	

反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$ 定义域为:$[-1,1]$	奇函数,单调递增	值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$ 定义域为:$[-1,1]$	单调递减	值域为$[0,\pi]$	
	反正切函数 $y = \arctan x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	奇函数,有界 $\lvert\arctan x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$ 单调增函数	值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	有界函数$0 < \operatorname{arccot} x < \pi$单调递减.	值域为$(0,\pi)$	
双曲函数	双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$		
	双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$		
	双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$		
	双曲余切	$y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$		
初等函数	凡是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.			

§1.1.2　本节经典例题解析

1. 函数的两个要素

函数的对应法则与定义域是确定函数的本质,称为函数的两大要素;而变量的符号的选取并非函数的本质.

例1　下列函数$f(x)$与$g(x)$是否相同?

(1)$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}, g(x)=\dfrac{1}{x+1}$;　　(2)$f(x)=\sqrt{(1-x)^2}, g(x)=1-x$;

(3)$f(x)=x, g(x)=\ln e^x$.

解　(1)$f(x)$的定义域为$x\neq\pm1$,$g(x)$的定义域为$x\neq-1$

故$f(x)$与$g(x)$是不同函数.

(2)$f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$

所以当$x>1$时,$f(x)\neq g(x)$,即$f(x)$与$g(x)$的对应法则不相同,故$f(x)$与$g(x)$是不同函数.

(3)对$\forall x, \ln e^x=x$

所以$f(x)$与$g(x)$的定义域相同且对应法则也相同,故$f(x)$与$g(x)$是同一函数.

2. 函数定义域的求法

求初等函数的自然定义域有下列原则:

①分母不能为零;②偶次根式的被开方数不能为负数;③对数的真数不能为零或负数;④$\arcsin x$或$\arccos x$的定义域为$|x|\leqslant1$;⑤$\tan x$的定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in z$;⑥$\cot x$的定义域为$x\neq k\pi$, $k\in Z$.

由函数的解析式按以上原则可得自变量所满足的不等式组,求解不等式组即可求得函数的定义域.

例2　求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　(2)$y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

解　(1)依题意必须$\begin{cases}1-x^2\neq0\\x+2\geqslant0\end{cases}$

解得　$x\neq\pm1$,且$x\geqslant-2$

故定义域为　$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2)必须$\begin{cases}x^2-1>0\\x+1\neq0\\\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant1\end{cases}$

由$x^2-1>0$,得$x<-1$或$x>1$

由$\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant1$,得$x\leqslant-2$或$x\geqslant0$

故定义域为$(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$

例3　对于下列函数$f(x)$与$g(x)$,求复合函数$f[g(x)]$和$g[f(x)]$,并确定它们的定义域:

(1)$f(x)=\sqrt{x+1}, g(x)=x^4$;

(2)$f(x) = \sqrt{1-x}, g(x) = \sqrt{x-1}$.

解 (1)$f[g(x)] = \sqrt{x^4+1}$,定义域为$(-\infty, +\infty)$

$g[f(x)] = (\sqrt{x+1})^4 = (x+1)^2$,定义域为$x+1 \geqslant 0$

即$[-1, +\infty)$

(2)$f[g(x)] = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$

定义域满足$\begin{cases} 1-\sqrt{x-1} \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases}$即$1 \leqslant x \leqslant 2$

$g[f(x)] = \sqrt{\sqrt{1-x}-1}$

定义域满足$\begin{cases} \sqrt{1-x}-1 \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases}$即$x \leqslant 0$

3. 函数符号的运用

主要是复合函数问题,对于复合函数要搞清复合的成分或结构,有时需适当引入中间变量.

例4 设$f(x) = e^{x^2}, f(\varphi(x)) = 1-x$且$\varphi(x) \geqslant 0$,求$\varphi(x)$

解 $f(\varphi(x))$是复合函数,这里要求中间变量$\varphi(x)$与x的函数表达式

$\because f(u) = e^{u^2}$(函数与变量记号无关)

$\therefore f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)}$ 得 $e^{\varphi^2(x)} = 1-x \Rightarrow \varphi^2(x) = \ln(1-x)$

$\because \varphi(x) \geqslant 0 \quad \therefore \varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$

4. 反函数的求法

由$y = f(x)$出发解出x的表达式,然后交换x与y的位置,即可求得反函数$y = f^{-1}(x)$.

例5 求下列函数的反函数:

(1)$y = 1+\log_4 x$; (2)$y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解(1)$\log_4 x = y-1, x = 4^{y-1} = \dfrac{1}{4}4^y$

故反函数为 $y = \dfrac{1}{4}4^x$

(2)$y2^x + y = 2^x, 2^x = \dfrac{y}{1-y}, x = \log_2 \dfrac{y}{1-y}$

故反函数为 $y = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$

5. 函数的几何特性问题

函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性都有明确的几何意义,故又称为几何特性,根据它们各自的定义进行判别,而学习了后续内容后可有更好的判别法.

例6 证明函数$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在定义域$(-\infty, +\infty)$内有界.

证明 $|f(x)| = \left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right| \leqslant \dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1} = \dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1} = 1+\dfrac{2x^2}{x^4+1} \leqslant 1+1 = 2$

故$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

例7 证明:

(1) 两个偶函数的积是偶函数；　　(2) 两个奇函数的积是偶函数；

(3) 偶函数与奇函数的积是奇函数.

证明　(1) 设 $f(x), g(x)$ 为偶函数,则 $f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$

令 $\varphi(x) = f(x)g(x)$,则

$$\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = \varphi(x)$$

故 $\varphi(x)$ 是偶函数.

(2) 设 $f(x), g(x)$ 为奇函数,则 $f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$

令 $\varphi(x) = f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)]$

$= f(x)g(x) = \varphi(x)$

故 $\varphi(x)$ 是偶函数.

(3) 设 $f(x)$ 为偶函数,而 $g(x)$ 为奇函数

则 $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$

令 $\varphi(x) = f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$ 是奇函数.

例 8　若函数 $f(x)$ 对其定义域内的一切 x 恒有 $f(x) = f(2a-x)$,则称函数 $f(x)$ 对称于 $x = a$,证明:如果函数 $f(x)$ 对称于 $x = a$ 及 $x = b(b > a)$ 则 $f(x)$ 必定是周期函数.

证明　若 $f(x) = f(2a-x)$ 及 $f(x) = f(2b-x)$

则　$f[x+2(b-a)] = f[2b-(2a-x)] = f(2a-x) = f(x)$

所以 $f(x)$ 为周期函数且 $T = 2(b-a)$ 为 $f(x)$ 的周期.

§1.1.3　本节课后习题解答(教材习题 1－1)

1. **解**　$A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$

$A \cap B = [-10, -5)$

$A\backslash = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$

$A\backslash(A\backslash B) = [-10, -5)$

2. **证明**　设 $x \in (A \cap B)^C$,则 $x \overline{\in} A \cap B$

于是　$x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$

所以　$x \in A^C \cup B^C$　即 $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

同理可证　$A^C \cap B^C \subset (A \cap B)^C$

因此　$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

3. **证明**　(1) 首先设 $y \in f(A \cup B)$,则存在 $x \in A$ 或 B. 使得 $y = f(x)$,于是有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$

即　$y \in f(A) \cup f(B)$

其次设 $y \in f(A) \cup f(B)$,则 $y \in f(A)$ 或 $f(B)$

于是存在 $x \in A$ 或 B,使得 $y = f(x)$

即　$y \in f(A \cup B)$

故有 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) 设 $y \in f(A \cap B)$,则存在 $x \in A \cap B$,使得 $y = f(x)$,于是有 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$.

故有 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. **证明** 首先证明f是双射

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{使得} x = g(y)$$

$$f(x) = f \circ g(y) = y$$

对于X中任意两个元素$x_1, x_2, x_1 \neq x_2$,要证明$f(x_1) \neq f(x_2)$,用反证法. 如果$f(x_1) = f(x_2)$,则$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$,即$x_1 = x_2$矛盾.

所以f是双射.

根据定义g是f的逆映射.

5. **证明** (1) $\forall x \in A$,则$y = f(x) \in f(A)$,$f^{-1}(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$

即 $A \subset f^{-1}(f(A))$

(2) 如果f是单射

$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \exists y \in f(A)$,有$f^{-1}(y) = x$,即$f(x) = y$

由$x' \in A, f(x') = y$. 由于是单射,则$x = x' \in A$

$\therefore f^{-1}(f(A)) \subset A. \therefore f^{-1}(f(A)) = A$

6. **解** (1)$3x + 2 \geqslant 0$,即$x \geqslant -2/3$,定义域$D = [-3/2, +\infty]$

(2)$1 - x^2 \neq 0$,即$x \neq \pm 1$

定义域$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(3)$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ 定义域$D = [-1, 0) V(0, 1]$

(4)$4 - x^2 > 0$,即$D = (-2, 2)$

(5)$x \geqslant 0$ 即定义域$D = [0, +\infty)$

(6)$x + 1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$($k$为整数)

即 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1$

(7)$|x - 3| \leqslant 1$ 即$2 \leqslant x \leqslant 4$

故 $D = [2, 4]$

(8)$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x \leqslant 3 \\ \text{且 } x \neq 0 \end{cases}$,$D = (-\infty) \cup (0, 3)]$

(9)$x + 1 > 0$,即$x > -1$,$D = (-1, +\infty)$

(10)$x \neq 0$ 即$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

7. **解** (1) 不同. 因为两者定义域不同.

(2) 不同. 因为两者对应法则不同. $x < 0$时,$g(x) = -x$

(3) 相同. 因为两者定义域,对应法则均相同.

(4) 不同. 因为$g(x) = \sec^2 x - \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$分母不能为0,要求:$x \neq k\pi + \dfrac{1}{2}\pi$故$f(x)$与$g(x)$定义域不同.

8. **解** $\because |x| = \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3}$ $\therefore \varphi(\dfrac{\pi}{6}) = \left|\sin \dfrac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$

同理 $\varphi(\dfrac{\pi}{4}) = \left|\sin \dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\varphi(-\dfrac{\pi}{4}) = \left|\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\varphi(-2) = 0$

综合 $y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3}\\ -\sin x, & -\dfrac{\pi}{3}<x<0\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

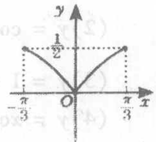


图 1 - 1

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1 - 1.

9. **解**　(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$　设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_1x_2-x_2+x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增加

(2) 设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)$$

由于 $y=\ln x$ 为单调增加函数，所以 $(\ln x_1-\ln x_2)<0$

又　$(x_1-x_2)<0$　所以　$(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$

故　$f(x_1)-f(x_2)<0$　即　$f(x_1)<f(x_2)$

10. **证明**　设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则必有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$

由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，可得：$f(-x_2)<f(-x_1)$

因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2)=-f(-x_2)$，$f(-x_1)=-f(x_1)$

所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$ 亦即 $f(x_1)<f(x_2)$

这就证明了对 $(-l,0)$ 内任取的 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

因此，$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

11. **证明**　设 $f_1(x),g_1(x)$ 为奇函数，$f_2(x),g_2(x)$ 为偶函数.

(1) $f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x)$ 即两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)]$ 即两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $f_2(-x)g_2(-x)=f_2(x)g_2(x)$ 即两个偶函数的乘积仍为偶函数，而

$f_1(-x)g_1(-x)=[-f_1(x)][-g_1(x)]=f_1(x)g_1(x)$ 即两个奇函数的乘积是偶函数，并且

$f_2(-x)f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)f_1(x)$ 即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

12. **解**

(1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)]^2=x^2(1-x^2)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$，$f(x)$ 既非奇函数也非偶函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[-x-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，$f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$，$f(x)$.

即非奇函数也非偶函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.

13. **解**　(1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l=2\pi$