王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学 选修

几何证明选讲 矩阵与变换

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红

X导航 丛书系列

接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社 SPLENDID PUBLISHING HOUSE IN CHINA

王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学 选修

几何证明选讲 矩阵与变换

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红
编 委：王强芳 黄河清 丁仁贵 杜建国 王志明 王 涛 杜 苏 陈 锐 王春勇 胡建平 徐志平 邵爱先 朱少华

X导航 丛书系列

接力出版社 Jieli Publishing House 全国优秀出版社

丛书策划：熊　辉
责任编辑：杨爱兵
责任校对：姜　荣
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIE DU
GAOZHONG SHUXUE
教材完全解读
高中数学　选修　几何证明选讲　矩阵与变换
丛书主编：王后雄　本册主编：曾祥红
*
出版人：黄　俭
接力出版社出版发行
广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
E-mail：jielipub@public.nn.gx.cn
武汉嘉捷印务有限公司印刷　全国新华书店经销
*
开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：10.5　字数：278千
2007年11月第1版　2007年11月第1次印刷
ISBN 978-7-5448-0107-2/G·63
定价：16.70元

教材完全解读

本书特点

1、以《课程标准》、《考试大纲》为编写依据，完全解读知识、方法、能力、考试题型，全面提高学习成绩。

2、采用国际流行的双栏对照案例编写方式，左栏对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；右栏用案例诠释考点，对各个考点各个击破。

3层完全解读

从知识、方法、思维诠释教材知识点和方法点、帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

用A、B、C代表测试题不同的能力层级，A代表基础题，B代表中难题，C代表难题。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

第一讲 相似三角形的判定及有关性质

一 平行线等分线段定理

1 知识·能力聚焦

1. 平行线等分线段定理

定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任一条（与这组平行线相交的）直线上截得的线段也相等. 人教A版 苏教版

用数学语言表述为：已知 $a /\!/ b /\!/ c$，直线 m、n 分别与 a、b、c 交于点 A、B、C 和 A'、B'、C'，如果 $AB=BC$，那么 $A'B'=B'C'$.

2 方法·技巧平台

3. 等分已知线段

利用平行线等分线段定理可以将已知线段任意等分. 其步骤如下：

3 创新·思维拓展

5. 三角形中位线定理

定理：三角形中位线平行于第三边，并且等于它的一半.

证明：如图1-1-4，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，E 是 AC 的中点，过点 D 作 $DE' /\!/ BC$，则 E' 也是 AC 的中点，所以 E 与 E' 重合，DE' 与 DE 重合.

名师诠释

◈［考题1］ 已知：如图1-1-6，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，那么下列结论中错误的是（ ）.

A. 由 $AB=BC$ 可得 $FG=GH$

B. 由 $AB=BC$ 可得 $OB=OG$

C. 由 $CE=2CD$ 可得 $CA=2BC$

D. 由 $GH=\frac{1}{2}FH$ 可得 $CD=DE$

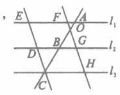


图1-1-6

［解析］ 由 OB、OG 不是一条直线被平行线组截得的线段，可知选B.

［答案］ B

［点评］ 解决此题的关键是找出平行线等分线段定理的基本图形，看清楚被平行线组截得的线段.

◈［考题2］ 如图1-1-7在▱$ABCD$ 中，E 和 F 分别是 BC 和 AD 边的中点，BF 和 DE 分别交 AC 于 P、Q 两点. 求证：$AP=PQ=QC$.

［解析］ ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E、F 分别是 BC、AD 边上的中点，

∴ $BE \underline{/\!/} DF$，∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形，∴ $BF /\!/ DE$.

分别过 A、C 作 $a /\!/ b /\!/ BF /\!/ DE$.

∵ $a /\!/ BF /\!/ DE$，$AF=FD$，∴ $AP=PQ$.

又∵ $b /\!/ DE /\!/ BF$，$CE=EB$.

∴ $CQ=PQ$. ∴ $AP=PQ=QC$.

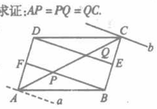


图1-1-7

［点评］ 本题也可以直接运用推论1来论证.

4 能力·题型设计

1A 如图1-1-14，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 AB 与 l_1、l_2、l_3 相交于 A、E、B，直线 CD 与 l_1、l_2、l_3 相交于 C、E、D，$AE=EB$，则有（ ）.

A. $AE=CE$ B. $BE=DE$

C. $CE=DE$ D. $CE>DE$

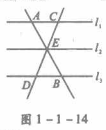


图1-1-14

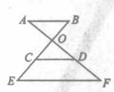


图1-1-15

2A 如图1-1-15，$AB /\!/ CD /\!/ EF$，且 $AO=OD=DF$，$BC=6$，则 BE 为（ ）.

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

点击考点

测试要点1

测试要点5

测试要点6

测试要点1

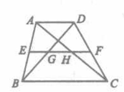


图1-1-17

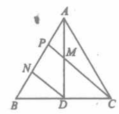


图1-1-18

6B 如图1-1-18，$AB=AC$，$AD \perp BC$ 于 D，M 是 AD 的中点，CM 交 AB 于 P，$DN /\!/ CP$. 若 $AB=6$cm，则 $AP=$ ______；若 $PM=1$cm，则 $PC=$ ______.

7A 梯形中位线长10cm，一条对角线将中位线分成的两部分之差是3cm，则该梯形中的较大的底是 ______ cm.

双栏对照学习

左栏全面剖析考点知识，凸现“解题依据”和答题要点。

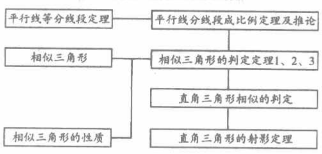
右栏用典型案例诠释左栏考点。左右栏讲解·案例一一对照，形成高效学习的范式。

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

单元知识梳理与能力整合

知识结构归纳



三基内容总结

一、基础知识总结

1. 平行线等分线段定理

(1)定理:如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么任一条(与这组平行线相交)直线上截得的线段也相等.

新典型题剖析

[例1] 如图1-5-29,在$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$于D,下列条件:

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高单元学习效率。

知识与能力同步测控题

测试满分:150分　测试时间:120分钟

一、选择题(本大题共12个小题,每小题5分,共60分,在每题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求)

1. 如图1-1,$AB/\!/CD/\!/EF$,且$AO=OD=DF$,$BC=12$,则BE为(　　).

A. 9
B. 10
C. 15
D. 18

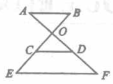


图1-1

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

本模块测试题

测试满分:150分　测试时间:120分钟

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分)

1. 下列说法正确的是(　　).

A. 零向量没有方向　B. 向量可以比较大小
C. 任何矩阵都有逆矩阵　D. 特征向量是向量

2. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$(　　).

A. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$

答案与提示

第一讲　相似三角形的判定及有关性质

一　平行线等分线段定理

1. C　(由定理可直接得出结论.)

2. A　(过O作直线$l/\!/AB$,由$AB/\!/l/\!/CD/\!/EF$,$AO=OD=DF$知$BO=OC=CE$,又$BC=6$,　$\therefore CE=3$,故$BE=9$.)

3. D　(由$AH\perp BC$,$EF\perp BC$知$EF/\!/AH$,又$\because AE=EB$,$\therefore BF=FH$,$\therefore HC=\frac{1}{4}BH=\frac{1}{2}BF$,$\therefore FC=\frac{3}{2}BF$.)

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然。能使您养成良好规范的答题习惯。

目 录

目录

矩阵与变换

知识与方法

阅读索引

几何证明选讲

第一讲 相似三角形的判定及有关性质

第二讲 直线与圆的位置关系

第三讲 圆锥曲线性质的探讨

模块学习指南

“课程标准”与“完全解读”内容对照表

序号	课程标准(几何证明选讲)	页码 * 完全解读内容
1	复习相似三角形的定义与性质 了解平行截割定理 证明直角三角形射影定理	P_9 相似三角形　P_{13} 性质定理 1、2、3 P_5 平行线分线段成比例定理 P_{17} 直角三角形射影定理;利用三角函数证明直角三角形射影定理
2	证明圆周角定理 圆的切线的判定定理及性质定理	P_{28} 圆周角定理 P_{35} 圆的切线的性质定理及推论;圆的切线的判定定理
3	证明相交弦定理 圆内接四边形的性质定理和判定定理 切割线定理	P_{44} 相交弦定理 P_{31} 圆内接四边形的性质;圆内接四边形的判定 P_{44} 切割线定理
4	了解平行投影的含义 通过圆柱与平面的位置关系,体会平行投影 证明平面与圆柱面的截线是圆或椭圆	P_{59} 平行投影的概念 P_{62} 圆柱面的截线及其性质 P_{63} 圆柱面的截线定理;圆柱面的截面的焦球
5	通过观察平面截圆锥面情境,体会圆锥面截线定理	$P_{68\sim69}$ 圆锥面截线定理;圆锥面截面的焦球;圆锥面截线的准线和离心率

序号	课程标准(矩阵与变换)	页码 * 完全解读内容
1	引入二阶矩阵	P_{75} 平面向量的坐标表示
2	二阶矩阵与平面向量(列向量)的乘法、平面图形的变换	P_{78} 二阶矩阵与平面向量的乘法 P_{87} 几种特殊的矩阵变换
3	变换的复合——二阶方阵的乘法	P_{100} 变换的合成与矩阵乘法 P_{104} 矩阵乘法的性质
4	逆矩阵与二阶行列式	P_{112} 逆矩阵与逆变换 P_{118} 二阶行列式与逆矩阵
5	二阶矩阵与二元一次方程组	P_{121} 二阶矩阵与二元一次方程组
6	变换的不变量及应用	P_{123} 矩阵变换的特征值与特征向量及矩阵应用

几何证明选讲

第一讲　相似三角形的判定及有关性质

一　平行线等分线段定理

知识·能力聚焦

1. 平行线等分线段定理

定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任一条（与这组平行线相交的）直线上截得的线段也相等．

人教A版　苏教版

用数学语言表述为：已知 $a // b // c$，直线 m、n 分别与 a、b、c 交于点 A、B、C 和 A'、B'、C'，如果 $AB=BC$，那么 $A'B'=B'C'$．如图 1－1－1．

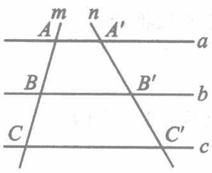


图 1－1－1

注意：定理中的"平行线组"是每相邻两条的距离都相等的平行线，且平行线组是由三条或三条以上的直线组成的．

2. 平行线等分线段定理的推论

人教A版

推论 1．经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边．

如图 1－1－2，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，$DE // BC$ 交 AC 于 E．过 A 作直线 BC 与 DE 的平行线 a，则 $a // DE // BC$，$AD=DB$，则有 $AE=EC$，即 E 为 AC 的中点．

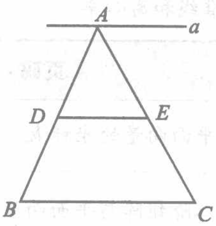


图 1－1－2

推论 2．经过梯形一腰的中点，且与底边平行的直线必平分另一腰．

如图 1－1－3，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，E 为 AB 的中点，即 $AE=EB$，$EF // BC$ 交 CD 于 F，则由 $AD // EF // BC$，$AE=EB$ 知 $DF=FC$．即 F 为 CD 的中点．

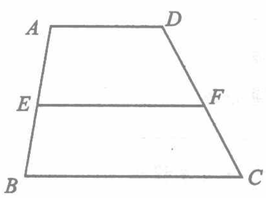


图 1－1－3

方法·技巧平台

3. 等分已知线段

利用平行线等分线段定理可以将已知线段任意等分．其步骤如下：

名师诠释

◈［考题 1］　已知：如图 1－1－6，$l_1 // l_2 // l_3$，那么下列结论中错误的是（　　）．

A. 由 $AB=BC$ 可得 $FG=GH$

B. 由 $AB=BC$ 可得 $OB=OG$

C. 由 $CE=2CD$ 可得 $CA=2BC$

D. 由 $GH=\frac{1}{2}FH$ 可得 $CD=DE$

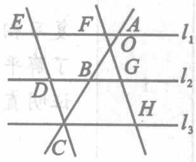


图 1－1－6

［解析］　由 OB、OG 不是一条直线被平行线组截得的线段，可知选 B．

［答案］　B

［点评］　解决此题的关键是找出平行线等分线段定理的基本图形，看清楚被平行线组截得的线段．

◈［考题 2］　如图 1－1－7 在 $\square ABCD$ 中，E 和 F 分别是 BC 和 AD 边的中点，BF 和 DE 分别交 AC 于 P、Q 两点．求证：$AP=PQ=QC$．

［解析］　$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E、F 分别是 BC、AD 边上的中点，

$\therefore BE \mathrel{\underline{\parallel}} DF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形，$\therefore BF // DE$．

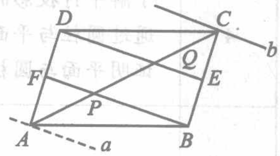


图 1－1－7

分别过 A、C 作 $a // b // BF // DE$．

$\because a // BF // DE$，$AF=FD$，$\therefore AP=PQ$．

又 $\because b // DE // BF$，$CE=EB$．

$\therefore CQ=PQ$．$\therefore AP=PQ=QC$．

［点评］　本题也可以直接运用推论 1 来论证．

◈［考题 3］　如图 1－1－8，已知 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，E 是 BC 的三等分点（$BE>CE$），AE、CD 交于点 F．

求证：F 是 CD 的中点．

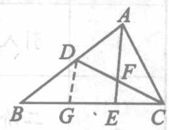


图 1－1－8

［解析］　过 D 作 $DG // AE$ 交 BC 于 G，

在 $\triangle ABE$ 中，$\because AD=BD$，$DG // AE$，

$\therefore BG=GE$．

$\because E$ 是 BC 的三等分点，$\therefore BG=GE=EC$．

在 $\triangle CDG$ 中，$\because GE=CE$，$DG // EF$，

$\therefore DF=CF$．

［点评］　过中点作平行线时，要选择恰当的辅助线．

◈［考题 4］　如图 1－1－9，梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$DC \perp BC$，E 为 AB 的中点．

求证：$EC=ED$．

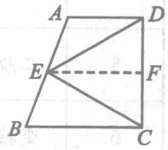


图 1－1－9

［解析］　过 E 点作 $EF // BC$ 交 DC 于 F．

在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，

$\therefore AD // EF // BC$．

$\because E$ 是 AB 的中点，$\therefore F$ 是 DC 的中点．

$\because \angle BCD=90^\circ$，$\therefore \angle DFE=90^\circ$．

$\therefore EF \perp DC$ 于 F．又 F 是 DC 的中点，

$\therefore EF$ 是 DC 的垂直平分线．

$\therefore ED=EC$（线段垂直平分线上的点到线段两端点距离相等）．

(1)过已知线段 AB 的一端点 A 作射线 AC；

(2)在射线 AC 上，以适当的长度顺次截取 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-1}A_n$(其中 n 为题中要求 AB 的 n 等分)；

(3)连结 A_nB；

(4)分别过点 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 作 A_nB 的平行线，交 AB 于 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$，即得.

4. 构图解题

利用图形特点，构造平行线等分线段定理或其推论环境解题.

当题设中出现中点条件时，常过中点作平行线. 构造平行线等分线段定理及推论的基本图形解题.

3 创新·思维拓展

5. 三角形中位线定理

定理：三角形中位线平行于第三边，并且等于它的一半.

证明：如图 1-1-4，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，E 是 AC 的中点，过点 D 作 $DE'/\!/BC$，则 E' 也是 AC 的中点，所以 E 与 E' 重合，DE' 与 DE 重合.

所以 $DE/\!/BC$.

同理，过点 D 作 $DF/\!/AC$，交 BC 与 F，则 $BF=FC$.

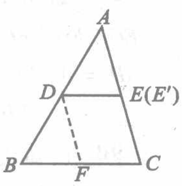


图 1-1-4

因为 $DE/\!/FC$，$DF/\!/EC$，所以四边形 $DFCE$ 是平行四边形.

所以 $DE=FC$.

又因为 $FC=\frac{1}{2}BC$，所以 $DE=\frac{1}{2}BC$.

6. 梯形的中位线定理

定理：梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

(1)三角形的中位线定理可以看做是梯形中位线定理中上底长为 0 时的特例.

(2)梯形的中位线定理可转化成三角形的中位线定理来证明.

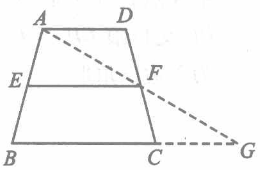


图 1-1-5

(3)定理的符号语言，如图 1-1-5

$\because AD/\!/BC, AE=BE, DF=CF$,

$\therefore EF/\!/AD/\!/BC, EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

(4)梯形的面积等于中位线与高的积.

(5)定理的证明：如图 1-1-5

连结 AF 并延长 AF 交 BC 的延长线于 G.

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle ADF=\angle GCF, \angle DAF=\angle CGF$,

又 $\because DF=CF$，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GCF$,

$\therefore AF=FG$. 又 $\because AE=EB$,

$\therefore EF \underset{=}{/\!/} \frac{1}{2}BG$. 又 $CG=AD$.

$\therefore BG=AD+BC$

$\therefore EF/\!/AD/\!/BC, EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

[点评]　证明不在同一直线上的两条线段相等，可以根据等腰三角形的两腰相等，或者根据全等三角形对应边相等来证明.

◈ **[考题 5]**　已知，线段 AB，用平行线等分线段定理将它分成两部分，且两部分之比为 $2:3$.

[解析]　已知：线段 AB.

求作：线段 AB 上一点 O，使 $AO:OB=2:3$.

画法：1. 如图 1-1-10，作射线 AC.

2. 在射线 AC 上以任意长顺次截取 $AD=DE=EF=FG=GH$.

3. 连结 BH.

4. 过点 G、F、E、D 分别作 HB 的平行线 GK,FJ,EO,DI 交 AB 于 K,J,O,I.

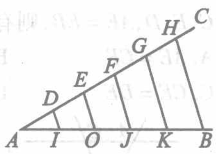


图 1-1-10

则点 O 为所求的点.

◈ **[考题 6]**　已知：如图 1-1-11，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 的中点，BE 的延长线交 AC 于点 F.

求证：$AF=\frac{1}{3}AC$.

[解析]　过 D 作 $DG/\!/BF$ 交 AC 于 G.

在 $\triangle BCF$ 中，D 是 BC 的中点，$DG/\!/BF$,

$\therefore G$ 为 CF 的中点. 即 $CG=GF$.

在 $\triangle ADG$ 中，E 是 AD 的中点，$EF/\!/DG$，$\therefore F$ 是 AG 的中点. 即 $AF=FG$，$AF=\frac{1}{3}AC$.

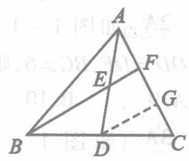


图 1-1-11

[点评]　构造基本图形法是重要的数学思想方法.

◈ **[考题 7]**　如图 1-1-12，四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，E、F 分别是 BC、AD 的中点，BA、CD 的延长线分别与 EF 的延长线交于 M、N.

求证：$\angle AME=\angle CNE$.

[解析]　连结 BD，取 BD 的中点 G，连结 GE、GF.

在 $\triangle ABD$ 中，$\because G$、F 分别是 BD、AD 的中点，

$\therefore GF=\frac{1}{2}AB, GF/\!/BM$.

同理可证：$GE=\frac{1}{2}CD, GE/\!/CN$.

$\because AB=CD$,

$\therefore GF=GE$.

$\therefore \angle GEF=\angle GFE$.

$\because GF/\!/BM$,

$\therefore \angle GFE=\angle BME$.

$\because GE/\!/CD$,

$\therefore \angle GEF=\angle CNE$.

$\therefore \angle AME=\angle CNE$.

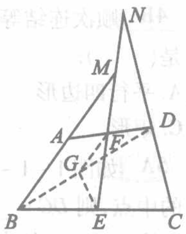


图 1-1-12

◈ **[考题 8]**　如图 1-1-13，在等腰梯形中，$AB/\!/CD$，$AD=12\text{cm}$，AC 交梯形中位线 EG 于点 F，若 $EF=4\text{cm}$，$FG=10\text{cm}$. 求此梯形的面积.

[解析]　作高 DM、CN，则四边形 $DMNC$ 为矩形.

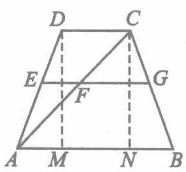


图 1-1-13

$\because EG$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$\therefore EG/\!/DC/\!/AB$.

$\therefore F$ 是 AC 的中点.

$\therefore DC=2EF=8, AB=2FG=20, MN=DC=8$.

在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 和 $\text{Rt}\triangle BCN$ 中，

$AD=BC, \angle DAM=\angle CBN, \angle AMD=\angle BNC$,

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle BCN$.

$\therefore AM=BN=\frac{1}{2}(20-8)=6$.

$\therefore DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$.

$\therefore S_{梯形}=EG\cdot DM=14\times6\sqrt{3}=84\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

能力·题型设计

1A 如图 1－1－14，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，直线 AB 与 l_1、l_2、l_3 相交于 A、E、B，直线 CD 与 l_1、l_2、l_3 相交于 C、E、D，$AE=EB$，则有（　　）.

A. $AE=CE$　　B. $BE=DE$

C. $CE=DE$　　D. $CE>DE$

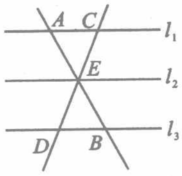


图 1－1－14

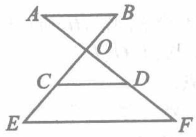


图 1－1－15

2A 如图 1－1－15，$AB \parallel CD \parallel EF$，且 $AO=OD=DF$，$BC=6$，则 BE 为（　　）.

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

3A 如图 1－1－16，在 $\triangle ABC$ 中，$AH \perp BC$ 于 H，E 是 AB 的中点，$EF \perp BC$ 于 F，若 $HC=\frac{1}{4}BH$，则 $FC=$（　　）BF.

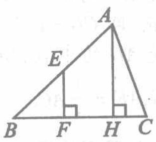


图 1－1－16

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

4B 顺次连结等腰梯形各边中点所得的四边形是（　　）.

A. 平行四边形　　B. 菱形

C. 矩形　　D. 正方形

5A 如图 1－1－17，已知 $AD \parallel EF \parallel BC$，$E$ 是 AB 的中点，则 $DG=$________，H 是________的中点，F 是________的中点.

点击考点

- 测试要点 1
- 测试要点 5
- 测试要点 6
- 测试要点 1
- 测试要点 2、3
- 测试要点 5
- 测试要点 3
- 测试要点 2
- 测试要点 1、2
- 测试要点 4、5
- 测试要点 2、5

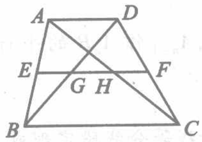


图 1－1－17

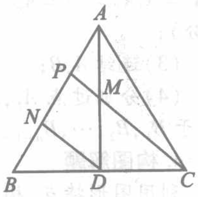


图 1－1－18

6B 如图 1－1－18，$AB=AC$，$AD \perp BC$ 于 D，M 是 AD 的中点，CM 交 AB 于 P，$DN \parallel CP$. 若 $AB=6$ cm，则 $AP=$________；若 $PM=1$ cm，则 $PC=$________.

7A 梯形中位线长 10cm，一条对角线将中位线分成的两部分之差是 3cm，则该梯形中的较大的底是________cm.

8A 如图 1－1－19，$AD \parallel EG \parallel FH \parallel BC$，$E$，$F$ 三等分 AB，$AD=4$，$BC=13$，则 $EG=$________，$FH=$________.

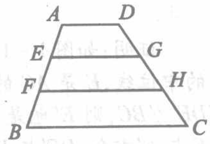


图 1－1－19

9B 已知线段 AB，用尺规把 AB 五等分.

10B 如图 1－1－20，在 $\triangle ABC$ 中，M 为 AB 的中点，$MP \parallel BC$ 交 AC 于 N，且交 $\angle ACE$ 的平分线于 P.

求证：$AP \perp PC$.

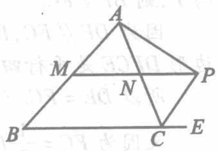


图 1－1－20

11C 如果把矩形 $ABCD$ 纸对折，设折痕为 GH，再把 A 点叠在折痕线上，折痕为 BE，得到 $Rt\triangle ABE$，BE 交折痕 GH 于 P，延长 EA 交 BC 于 F，则 $\triangle BEF$ 为等边三角形.

二　平行线分线段成比例定理

知识·能力聚焦

1. 平行线分线段成比例定理

定理:三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例,也称平行截割定理.

湘教版　人教A、B版　苏教版　北师大版

如图1-2-1,$a/\!/b/\!/c$,m交a、b、c于点A、B、C,n交a、b、c于点D、E、F,则$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

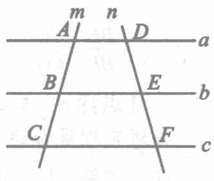


图1-2-1

(1)教材中给出$\frac{AB}{BC}$为有理数时的一种证明方法,但定理对于$\frac{AB}{BC}$为实数时都实用.

人教A版

(2)定理的条件需要一组平行线(至少三条),且至少有两条直线与这组平行线相交.

(3)定理结论是"对应线段成比例".因而除了有$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$成立外,还有$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$,$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$成立.

2. 平行线分线段成比例定理的推论

推论:平行于三角形一边的直线截其他两边的直线(或两边的延长线)所得的对应线段成比例.

人教A版　北师大版　苏教版

如图1-2-2,在$\triangle ABC$中,$DE/\!/BC$,则$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

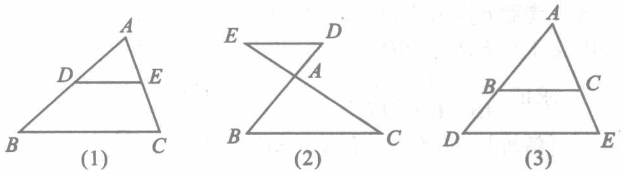


图1-2-2

(1)定理包含图1-2-2中三种基本图形(DE是截线).

(2)这个推论也称为三角形一边平行线的特征定理.

(3)推论的证明类似于平行线等分线段定理的推论1,即过点A作直线$l/\!/BC$,

则$l/\!/DE/\!/BC$.$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,$\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$,其图形变化如图1-2-3所示.

名师诠释

◈[考题1]　如图1-2-10,AD是$\triangle ABC$的中线,E是CA边的三等分点,BE交AD于点F,则$AF:FD$为(　　).

A. 2:1　　B. 3:1

C. 4:1　　D. 5:1

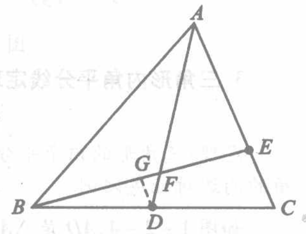


图1-2-10

[解析]　要求$AF:FD$的比,需要添加平行线寻找与之相等的比.注意到D是BC的中点,可过D作$DG/\!/AC$交BE于G,则$DG=\frac{1}{2}EC$,又$AE=2EC$,

故$AF:FD=AE:DG=2EC:\frac{1}{2}EC=4:1$.故选C.

◈[考题2]　(1)如图1-2-11,在$\triangle ACE$中,B、D分别在AC、AE上,下列推理不正确的是(　　).

A. $BD/\!/CE\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}$

B. $BD/\!/CE\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}$

C. $BD/\!/CE\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$

D. $BD/\!/CE\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{CE}$

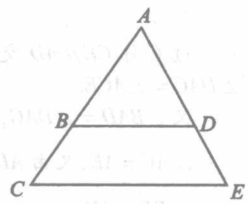


图1-2-11

(2)某同学的身高1.60米,由路灯下向前步行4米,发现自己的影子长2米,求这个路灯的高.

[解析]　(1)由平行线分线段成比例定理的推论不难得出A、B、C都是正确的,D是错误的,故选D.

(2)如图1-2-12,AB表示同学的身高,CD表示路灯的高.

$\because AB/\!/CD$,$\therefore \frac{PB}{PD}=\frac{AB}{CD}$.

$\therefore CD=\frac{AB\times PD}{PB}=\frac{1.6\times(2+4)}{2}=$

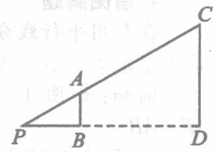


图1-2-12

4.8(米).

答:路灯高为4.8米.

◈[考题3]　如图1-2-13所示,已知直线FD和$\triangle ABC$的BC边交于D,与AC边交于E,与BA的延长线交于F,且$BD=DC$,求证:$AE\cdot FB=EC\cdot FA$.

[解析]　过A作$AG/\!/BC$,交DF于G点.

$\because AG/\!/BD$,$\therefore \frac{FA}{FB}=\frac{AG}{BD}$.

又$\because BD=DC$,$\therefore \frac{FA}{FB}=\frac{AG}{DC}$.

$\because AG/\!/BD$,$\therefore \frac{AG}{DC}=\frac{AE}{EC}$.

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{FA}{FB}$,即$AE\cdot FB=EC\cdot FA$.

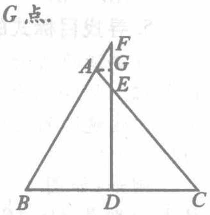


图1-2-13

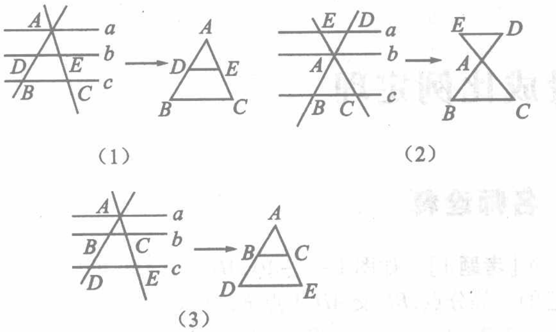


图 1－2－3

3. 三角形内角平分线定理

北师大版 人教B版 苏教版

定理：三角形的内角平分线分对边所得的两条线段与这个角的两边对应成比例.

如图 1－2－4，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

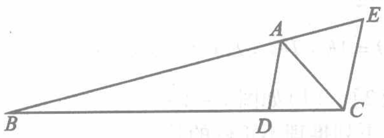


图 1－2－4

过 C 作 $CE/\!/AD$ 交 BA 的延长线于 E，则 $\angle AEC=\angle BAD$，$\angle DAC=\angle ACE$.

又 $\angle BAD=\angle DAC$，$\therefore\ \angle AEC=\angle ACE$，

$\therefore AC=AE$，又由 $AD/\!/CE$ 知 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{DC}$，

$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

2 方法·技巧平台

4. 借图解题

在利用平行线分线段成比例的定理或推论解决问题时，常常通过复杂的图形找出基本图形，“借图解题”.

例如：如图 1－2－5，$DE/\!/BC$，$EF/\!/DC$，求证：$AD^2=AF\cdot AB$.

证明：在 $\triangle ABC$ 中，$DE/\!/BC$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

在 $\triangle ADC$ 中，$EF/\!/DC$，

$\therefore \dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AF}{AD}$，即 $AD^2=AF\cdot AB$.

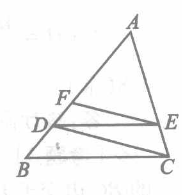


图 1－2－5

5. 寻找目标式的中间比

当要证的结论不是比例式（通常是等积式）时，常转化为比例式，通过所得的比例式突破题设的条件，其中中间比是常用的转化方法.

例如：如图 1－2－6，在 $\square ABCD$ 中，H、E 分别是 AD、AB 延长线上一点，HE 交 DC 于 K，交 AC 于 G，交 BC 于 F.

求证：$GH\cdot GK=GE\cdot GF$.

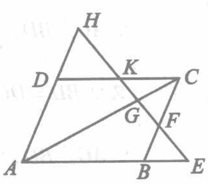


图 1－2－6

［点评］ 本题过点 A 还有一种方式作平行线构造基本图形，过 B、C 都有两种方式作平行线构造基本图形.

◈［考题 4］ 如图 1－2－14，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，E 为底边 BC 上的任意一点，过 E 作与 AD 平行的直线，分别交直线 AB、CA 于 F、G，求证：$\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{CE}{CG}$.

［解析］ $\because EF/\!/AD$，$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{BD}{AB}$.

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$，

即 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$. $\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{DC}{AC}$，

$\because AD/\!/EG$，$\therefore \dfrac{DC}{AC}=\dfrac{CE}{CG}$，

$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{CE}{CG}$.

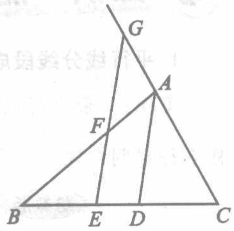


图 1－2－14

［点评］ 本题结合平行线分线段成比例定理和角的平分线定理综合运用解决问题.

◈［考题 5］ 如图 1－2－15，在 $\square ABCD$ 中，E 是 AB 延长线上一点，DE 交 AC 于 G，交 BC 于 F.

求证：(1) $DG^2=GE\cdot GF$；(2) $\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{AB}{AE}$.

［解析］ (1) $\because CD/\!/AE$，

$\therefore \dfrac{DG}{GE}=\dfrac{CG}{AG}$.

又 $\because AD/\!/CF$，$\therefore \dfrac{GF}{DG}=\dfrac{CG}{AG}$.

$\therefore \dfrac{DG}{GE}=\dfrac{GF}{DG}$，即 $DG^2=GE\cdot GF$.

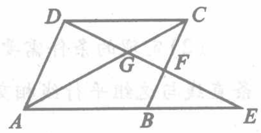


图 1－2－15

(2) $\because BF/\!/AD$，$\therefore \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{DF}{DE}$.

又 $\because CD/\!/BE$，$\therefore \dfrac{CF}{CB}=\dfrac{DF}{DE}$.

由 (1)(2) 可得 $\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{AB}{AE}$.

［点评］ 利用定理或其推论解决问题时，要注意寻找图形中的基本图形“A”型或“X”型.

◈［考题 6］ 如图 1－2－16，已知 $AB\perp BD$，$CD\perp BD$，AD、BC 交于点 E，$EF\perp BD$.

求证：$\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{1}{EF}$.

［解析］ 由题设，得 $AB/\!/EF/\!/CD$.

$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{DF}{BD}$，$\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{BF}{BD}$.

$\therefore \dfrac{EF}{AB}+\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{DF}{BD}+\dfrac{BF}{BD}=1$.

即 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{1}{EF}$.

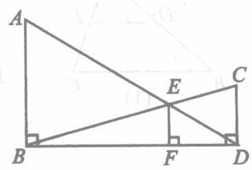


图 1－2－16

［点评］ 变题设中的垂直为斜交，结论仍成立.

◈［考题 7］ 如图 1－2－17，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，M 为 AB 的中点，分别连结 AC、BD、MD、MC，且 AC 与 MD 交于 E，DB 与 MC 交于 F.

要证 $GH\cdot GK=GE\cdot GF$，即证$\frac{GH}{GF}=\frac{GE}{GK}$.

由 $AD/\!/BC$ 得$\frac{GH}{GF}=\frac{AG}{CG}$，

由 $AB/\!/CD$ 得$\frac{GE}{GK}=\frac{AG}{CG}$，

$\therefore \frac{GH}{GF}=\frac{GE}{GK}$即证.

3 创新·思维拓展

6. 平行线分线段成比例定理推论的逆定理 苏教版

逆定理：如果一条直线截三角形的两边或两边的延长线所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

如图 1-2-7，在△ABC 中，直线 DE 分别交 AB、AC(或延长线)于 D、E，若$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，则 $DE/\!/BC$.

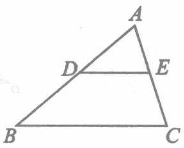


图 1-2-7

定理的证明可以用同一法.

7. 平行线分线段成比例定理的推论 人教A版

推论 2：用平行于三角形一边且和其他两边相交的直线截三角形，所截得的三角形三边与原三角形的三边对应成比例.

如图 1-2-8，在△ABC 中，$DE/\!/BC$，DE 分别交 AB、AC 于点 D、E，则有$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

过 E 作 $EF/\!/AB$ 交 BC 于 F，则$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$. 又 $DE/\!/BC$，$EF/\!/AB$.

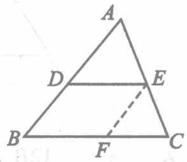


图 1-2-8

则$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，且四边形 BDEF 为平行四边形.

$\therefore DE=BF$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$. 即证.

8. 平行线分线段成比例定理的空间推广 人教A版

推广：三个平行平面截两条直线，所截得的对应线段成比例.

如图 1-2-9，已知 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，$l_1$ 分别交 α、β、γ 于 A、B、C，l_2 分别交 α、β、γ 于 D、E、F. 则有$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

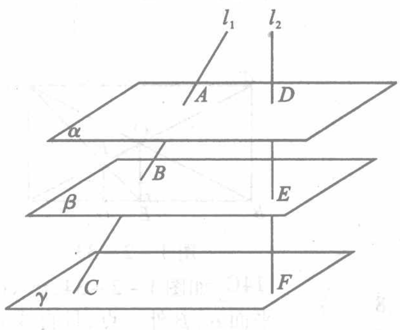


图 1-2-9

这里直线 l_1、l_2 可以是共面直线，也可以是异面直线.

求证：$EF/\!/CD$.

【解析】 $\because AB/\!/CD$，

$\therefore \frac{CD}{AM}=\frac{DE}{EM}$，$\frac{CD}{MB}=\frac{CF}{FM}$.

又$\because AM=BM$，

$\therefore \frac{DE}{EM}=\frac{CF}{FM}$. $\therefore EF/\!/CD$.

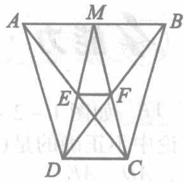


图 1-2-17

【点评】 利用对应线段成比例证两条直线平行是证明两直线平行的常用方法之一.

◈【考题 8】 已知：如图 1-2-18，四边形 ABCD 是正方形，延长 BC 到点 E，连结 AE 交 CD 于 F，$FG/\!/AD$ 交 DE 于 G.

求证：$FC=FG$.

【解析】 在正方形 ABCD 中，$AB/\!/CD$，

$\therefore \frac{CF}{AB}=\frac{EF}{AE}$.

$\because FG/\!/AD$，$\therefore \frac{FG}{AD}=\frac{EF}{AE}$.

$\therefore \frac{CF}{AB}=\frac{FG}{AD}$.

$\because AB=AD$.

$\therefore CF=FG$.

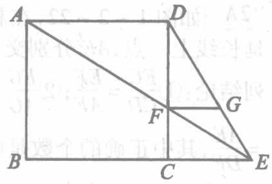


图 1-2-18

◈【考题 9】 如图 1-2-19，四边形 ABCD 中，AC、BD 交于 O，过 O 作 AB 的平行线，与 AD、BC 分别交于 E、F，与 CD 的延长线交于 K.

求证：$KO^2=KE\cdot KF$.

【解析】 延长 CK、BA，设它们交于 H.

$\because KO/\!/HB$，$\therefore \frac{KO}{HB}=\frac{DK}{DH}$，$\frac{KE}{HA}=\frac{DK}{DH}$.

$\therefore \frac{KO}{HB}=\frac{KE}{HA}$，即$\frac{KO}{KE}=\frac{HB}{HA}$.

$\because KF/\!/HB$，同理可得$\frac{KF}{KO}=\frac{HB}{HA}$.

$\therefore \frac{KO}{KE}=\frac{KF}{KO}$，即 $KO^2=KE\cdot KF$.

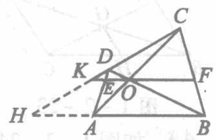


图 1-2-19

◈【考题 10】 如图 1-2-20，$\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，$l_1$、$l_2$ 是异面直线，l_1 交 α、β、γ 分别为 A、B、C 点，l_2 交 α、β、γ 分别为 D、E、F.

求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

【解析】 在直线 l_2 上取一点 G，过点 G 作 $l_3/\!/l_1$，设 l_3 与平面 α、β、γ 分别相交于 P、Q、R(如图 1-2-20)，则 l_1 与 l_3 确定一个平面 π_1，l_3 与 l_2 确定一个平面 π_2，在 π_1 中，连结 AP、BQ、CR，则 $AP/\!/BQ/\!/CR$.

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$.

在平面 π_2 中，连结 PD、QE、RF，则 $PD/\!/QE/\!/RF$.

$\therefore \frac{PQ}{QR}=\frac{DE}{EF}$.

所以$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

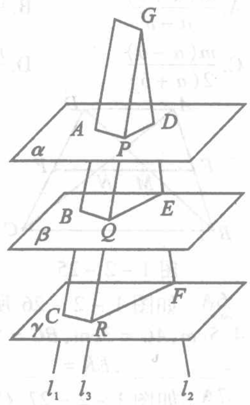


图 1-2-20