普通高等教育“十一五”国家级规划教材
浙江大学数学系列丛书

Calculus

微积分（下册）

卢兴江 金蒙伟 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
浙江大学数学系列丛书

微积分

（下册）

主　编　卢兴江　金蒙伟
编　委　卢兴江　黄兆镇
　　　　张振跃　尹永成
　　　　李　冲

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分.下册 / 卢兴江,金蒙伟主编. —杭州:浙江大学出版社,2008.3
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
(浙江大学数学系列丛书)
ISBN 978-7-308-05797-4

Ⅰ.微… Ⅱ.①卢…②金… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 011116 号

微积分·下册

卢兴江 金蒙伟 **主编**

责任编辑 徐素君
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 11
字　　数 275 千
版 印 次 2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05797-4
定　　价 20.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

序

为了弘扬浙江大学数学系的优良传统和学风，适应当代数学研究和教学的发展，2004 年起浙江大学数学系组织力量对本科生课程设置和教材进行了重要改革，尤其是对数学系主干课程如数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、常微分方程、科学计算、概率论等的教材进行了重新编写，并在浙江大学出版社出版浙江大学数学系列丛书。这是本套系列丛书的第一部分。

丛书的主要特点：

一、加强基础，突出普适性。丛书在内容取舍上，对数学核心内容不仅不削弱，反而有所加强，尤其注重数学基本理论、基本方法的训练。同时，为了适应浙江大学"宽口径"的学生培养制度，对数学应用、数学试验等内容也给予了高度关注。

二、关注前沿理论，强调创新。丛书试图从现代数学的观点审视和选择经典的内容，以新的视角来处理传统的数学内容，使丛书更加适合浙江大学教学改革的需要，适合通才教育的培养目标。

三、注重实践，突出适用性。丛书出版以前，有的作为讲义或正式出版物在浙江大学数学系试用过多次，使丛书的内容和框架、结构比较完善。同时，为了适合不同层次的学生合理取舍，丛书在在内容选取上，为学生进一步学习准备了丰富的材料。

在编写过程中，数学系教授们征求了许多学生的意见，并希望能够在教学使用过程中对这套教材作进一步完善。今后我们还会对其他课程的教材进行相应的改革。

为了这套丛书的编写和发行，浙江大学数学系的许多教授和出版社的编辑投入了巨大的精力，我在此对他们表示衷心的感谢。

刘克峰

浙江大学数学系主任

2008 年 2 月

前 言

数学作为一门基础学科，在人类文明和科技的发展中具有不可或缺的重要作用。《微积分》作为高等学校最重要的基础课程，其教学质量往往可以折射出一所大学的办学质量和教学理念，因此《微积分》教学是本科教学过程中从细微之处看精品的一个窗口。

为充分体现“以人为本、以学生为中心”的个性化办学理念，不断完善学生自我构建知识结构的管理机制，充分发挥学生的个性潜质，进一步调动学生学习的积极性、主动性和创造性，很多高校都在探索按专业大类培养人才的教育模式，在学生初进高校的一到两年里推行“宽口径”的通识教育，之后允许对专业的二次选择。本教材在编写过程中充分考虑到高校学生有很大的转系和转专业的自主权这个问题，为使学生的选课和学习简单有效，更出于各专业对微积分知识的不同需求，将微积分课程分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个模块。其中微积分Ⅰ内容为函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分和无穷级数；微积分Ⅱ内容为矢量代数与空间解析几何、多元函数的微分学和二重积分；微积分Ⅲ内容为三重积分、曲线曲面积分和场论。微积分Ⅰ、Ⅱ为农医理工经管所有学生都必须修读的课程，而微积分Ⅲ由院系决定是否将其列为专业的必修课程（一般工科偏理的专业都将其列为专业的必修课程）。这样学生不必考虑前期课程是否达到转系转专业后主修专业的教学层次要求，解决了以往转系转专业后，已修读过的内容因深度不够而需重新修读的问题。

全书分为上、下两册。上册内容有：函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分和无穷级数等；下册内容有：矢量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、二重积分、三重积分、曲线曲面积分和场论等。本书中有一些章节和知识，本身很重要，读者对其学习了解既很有必要又很有意义，但理论性较强，学习理解有较大的难度，而且这些内容往往在历年的全国研究生入学考试中不作要求，对这些内容，我们在相应的标题上打了“*”号，读者可根据自己的情况进行选读，如上册中函数的一致连续性、广义积分的收敛性判别法和函数项级数的一些理论与性质，下册中曲线曲面的参数表示以及相应的曲线曲面积分的计算方法等等。

本教材注重数学概念的理解，理论论述严密、分析透彻，重视学生数学思

维的训练，启发学生去思考和研究，是一本适合重点高校工科类和经管类等专业的本科生使用的教科书。

本教材是在李胜宏教授领导和支持下完成的，在此表示衷心的感谢。黄正达、叶兴德、黄丹、陈明飞、王梦、姜海益、张平光、孙业顺和张泽银等老师在本教材出版前进行了试讲并提出宝贵意见，苏德矿教授在本教材的编写过程中参与了讨论并提出许多有意义的建议，在此也向他们表示诚挚的谢意。

2006 年经国家教育部专家评审，本教材被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

由于作者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2008 年 2 月

目 录

8 矢量(向量)代数与空间解析几何

本章主要介绍三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的矢量(向量)及其运算,并在此基础上介绍平面、空间直线和二次曲面等内容.在科学研究中,许多量(例如力、速度和力矩等)皆可用矢量来表示.

§8.1 矢量概念及其线性运算

矢量概念

定义 8.1.1 设 A,B 为三维空间中的两个点,以 A 为始点,B 为终点所决定的既有大小(A 到 B 的距离)又有方向(A 到 B 的方向)的几何量称为**矢量**,记为 $\boldsymbol{AB}$.矢量的大小又称为矢量的**模**.

几何上用带箭头的线段表示矢量,线段的长度代表矢量的模,箭头所指的方向代表矢量的方向.在记号上,也常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等表示矢量,如图 8.1 所示,并用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模.但因黑体字在书写不方便,所以通常也用带箭头的字母来表示,如$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$等.

决定一个矢量的属性有两个,即大小和方向,平行移动一矢量并不改变这两个属性,因此,若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,经过平行移动可以使始点和终点分别重合(也就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经平行移动完全重合),则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.这种经平行移动不改变其属性的矢量我们称为**自由矢量**(以下我们讨论的矢量皆为自由矢量),自由矢量如图 8.2 所示.

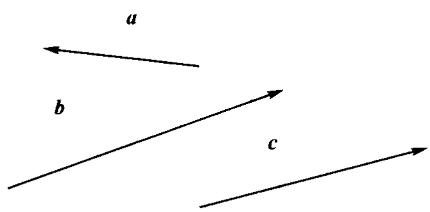


图 8.1

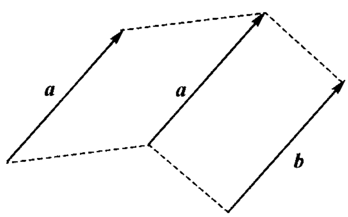


图 8.2

模为 1 的矢量称为**单位矢量**,模为 0 的矢量称为**零矢量**.零矢量记为 $\mathbf{0}$,在不引起混淆的情况下也记为 0.注意,零矢量的方向可看作是任意的.

定义 8.1.2 将非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使之始点重合,它们之间不大于 π 的夹角称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.当夹角为$\frac{\pi}{2}$时,称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相互垂直**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;当夹角为 0 或 π 时,称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或共线),记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,如图 8.3 所示.

两个以上的矢量将它们的起点(经平行移动)移到同一点,如果这些矢量落在同一个平面内,则称这些矢量是**共面**的.

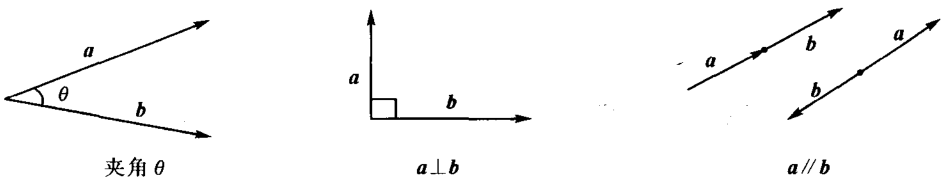


图 8.3

矢量的线性运算

(1)**矢量的加减法**

定义 8.1.3 将矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使其始点重合，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边得到一个平行四边形，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点为始点的平行四边形的对角线矢量 $\boldsymbol{c}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和矢量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8.4 所示.

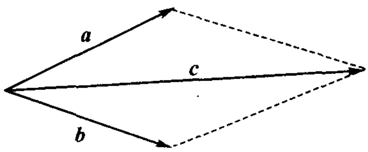


图 8.4

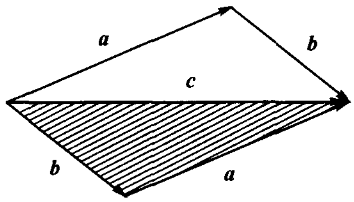


图 8.5

求和矢量的方法称为**矢量**的加法.

因矢量可以平行移动，所以，我们可以这样来得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：平行移动 $\boldsymbol{b}$，将其始点与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点，矢量为 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和矢量. 当然也可以平行移动，使 $\boldsymbol{a}$ 的始点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点重合得到 $\boldsymbol{c}$，如图 8.5 所示.

图 8.4 中求和矢量的方法称为矢量加法的**平行四边形法则**，图 8.5 求和矢量的方法称为**三角形法则**. 三角形法则对多个矢量求和非常方便，只要将它们依次首尾相接，然后连接第一个矢量的始点和最后一个矢量的终点即为和矢量，如图 8.6 所示.

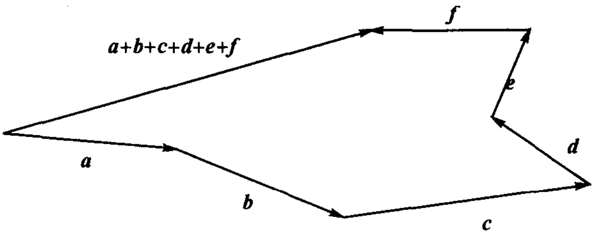


图 8.6

如果两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，它们的和矢量是何情形？(请读者自己完成).

由矢量加法的平行四边形法则和三角形法则，容易得到矢量的加法满足：

(ⅰ)$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(ⅱ)**交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(ⅲ)**结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为任意矢量.

定义 8.1.4 若矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差矢量**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$;或 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差矢量,记作 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.

求差矢量的方法称为**矢量的减法**.

由加法的三角形法则我们不难得到减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的三角形法则:平行移动使 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的始点重合,从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的矢量即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,如图 8.7 所示.

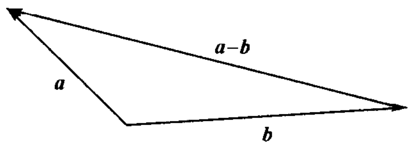


图 8.7

(2)**矢量的数乘**

定义 8.1.5 由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 k 生成的矢量 $\boldsymbol{d}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**一个数乘**,其中:

(1)$\boldsymbol{d}$ 的模 $|\boldsymbol{d}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2)$\boldsymbol{d}$ 的方向为:当 $k>0$ 时,$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,当 $k<0$ 时,$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.记为 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{a}$.

由定义 8.1.5 易得数乘满足以下规律:

(i)$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(ii)**分配律** $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$

$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

(iii)**结合律** $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$

其中 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为任意矢量,k,l 为任意实数.

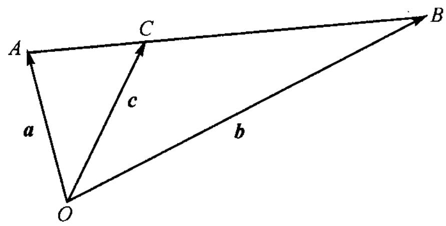
对矢量 $\boldsymbol{a}$ 我们有 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**相反矢量**,它与 $\boldsymbol{a}$ 模相同,方向相反.且有,对矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

当 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量时,通常用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的单位矢量,由数乘运算知

$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 或 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0$.

例 8.1.6 已知矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 如右图所示.$\boldsymbol{c}$ 的终点 C 在 A 与 B 连线上,且 $AB=3AC$,求矢量 $\boldsymbol{c}$.

解 由矢量的减法和数乘知 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=3(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$,所以,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. ◇



由数乘及其几何特性可得到以下结论.

定理 8.1.7 *矢量 $\boldsymbol{b}$ 与非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充分必要条件是存在唯一的实数 k,使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.*

证明 **充分性** 若有实数 k 使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$,由定义 8.1.5 知 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 必方向相同或方向相反,所以 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

必要性 若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同或相反.$\boldsymbol{b}=0$ 时显然成立,现设 $\boldsymbol{b}\neq 0$.

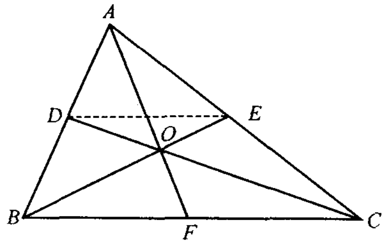
(i)如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同,令 $k=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}>0$,有:$|\boldsymbol{b}|=k|\boldsymbol{a}|=|k\boldsymbol{a}|$,从而有 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$;

(ii)如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,令 $k=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}<0$,$|\boldsymbol{b}|=-k|\boldsymbol{a}|=|k\boldsymbol{a}|$,从而 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

最后证明 k 的唯一性:若存在 $k_1\neq k_2$,使 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}=k_2\boldsymbol{a}$,如 $(k_1-k_2)\boldsymbol{a}=0$ 而 $\boldsymbol{a}\neq 0$,所

以 $k_1-k_2=0$，得 $k_1=k_2$，这与假设矛盾，因此，存在唯一的 k，使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$. □

例 8.1.8 证明三角形三条中线相交于一点.



证明 作△ABC，D,E,F 分别为三条边的中点，连接 BE,CD 交于 O 点，再连接 AO 及 OF，现只要证明矢量 $\boldsymbol{AO}$ 与 $\boldsymbol{OF}$ 共线(右图).

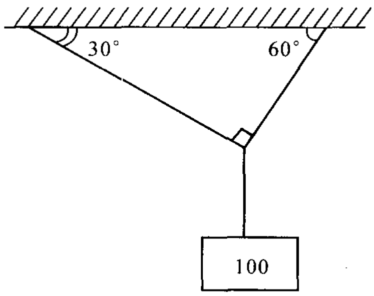
因为△DOE 与△COB 相似，且 $DE=\frac{1}{2}BC$，

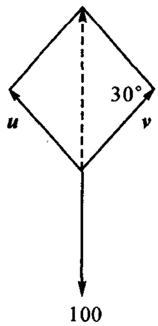
所以 $OD=\frac{1}{2}CO$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AO}&=\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{DO}=\boldsymbol{OB}+\frac{1}{2}\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{DO}+\boldsymbol{OB}+\frac{1}{2}\boldsymbol{OC}\\&=\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OB}=2\boldsymbol{OC}+2\boldsymbol{CF}\\&=2(\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CF})=2\boldsymbol{OF}.\end{aligned}$$

由定理 8.1.7 知，$\boldsymbol{AO}$ 与 $\boldsymbol{OF}$ 共线，因此，三条中线 BE,CD 和 AF 相交于一点. □

例 8.1.9 一重量为 100 牛顿的物体挂在横梁的绳子上，如图所示，求两条绳子所受的力.





解法 1 设物体重力为 $\boldsymbol{w}$，两条绳子受力为 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 如图. 则有

$$\begin{cases}|\boldsymbol{u}|\cos30^\circ=|\boldsymbol{v}|\cos60^\circ\\|\boldsymbol{u}|\sin30^\circ+|\boldsymbol{v}|\sin60^\circ=|\boldsymbol{w}|=100\end{cases}.$$

解得 $|\boldsymbol{u}|=50$(牛顿)，$|\boldsymbol{v}|=50\sqrt{3}$(牛顿).

因此，两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和 $50\sqrt{3}$牛顿，方向沿绳子向上(如图所示).

解法 2 设 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 如上，由力学知识知必有：$-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，如图，所以

$$|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{w}|\sin30^\circ=\frac{100}{2}=50(\text{牛顿}),$$

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|\cos30^\circ=100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}(\text{牛顿}).$$

即两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和 $50\sqrt{3}$牛顿，方向沿绳子向上. ◇

在例 8.1.9 中，其实就是要把力 $-\boldsymbol{w}$ 向 $\boldsymbol{u}^0$ 与 $\boldsymbol{v}^0$ 两个方向上"分解"，显然有

$$-\boldsymbol{w}=50\boldsymbol{u}^0+50\sqrt{3}\boldsymbol{v}^0.$$

事实上，对两个任意的不共线的矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，只要矢量 $\boldsymbol{c}$ 落在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，必可

向 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个方向上"分解"，也就是说，必存在常数 k_1,k_2，使 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$. 换一种说法，我们可写成如下的定理.

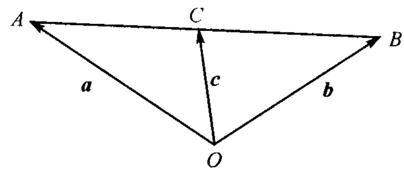
定理 8.1.10 设矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则矢量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充分必要条件是存在唯一确定的两个实数 k_1,k_2，使得 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$.

证明可从矢量加法与数乘的几何性质得出. □

定理 8.1.11 若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 不共面，则对任意矢量 $\boldsymbol{u}$，存在唯一确定的实数 k_1,k_2,k_3，使得 $\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}$. □

例 8.1.12 设矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$，$k_1,k_2$ 为常数，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的始点重合，试证矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的终点在一条直线上的充分必要条件是 $k_1+k_2=1$.

证明 如右图所示.



必要性 若 A,B,C 共线，则由定理 8.1.7 知存在唯一的实数 k，使 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=k(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，将 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$ 代入得 $(kk_1-k+k_1)\boldsymbol{a}+(kk_2-1+k_2)\boldsymbol{b}=0$.

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以有

$$\begin{cases} kk_1-k+k_1=0 \\ kk_2-1+k_2=0 \end{cases}. \text{即} \quad k_1=\frac{k}{k+1}, k_2=\frac{1}{k+1}.$$

因此 $$k_1+k_2=1.$$

充分性 若 $k_1+k_2=1$，即 $k_2=1-k_1$，则有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-k_1\boldsymbol{a}-(1-k_1)\boldsymbol{b}=k_1(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

所以，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 共线，因此 A,B,C 三点共线. □

§8.2 矢量的乘法

矢量的点乘

在力学中，若一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从 A 点移到 B 点（如图 8.8 所示），则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{AB}|\cdot\cos\theta.$$

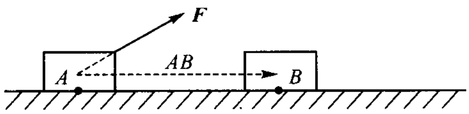


图 8.8

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 的夹角. 又例如要求

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 上的有向投影(长度)：

$$(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}^\circ|\cos\theta.$$

如图 8.9 所示.

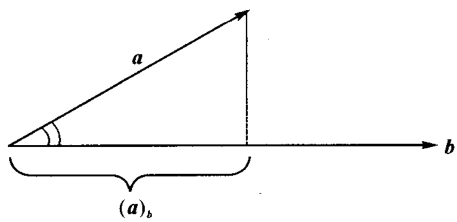


图 8.9

对于这种有向投影，从几何上不难证明有以下等式：

对任意的 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}$，有

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_b=(\boldsymbol{a}_1)_b+(\boldsymbol{a}_2)_b+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_b. \tag{8.1}$$

定义 8.2.1 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的运算 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点乘，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

矢量的点乘也称为矢量的**内积**、**点积**.

由定义 8.2.1 知，上述力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{AB}$；矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的有向投影(长度)可表示为 $(\boldsymbol{a})_b=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$.

特别地，由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的点乘可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

矢量的点乘满足以下运算规律：

(i)**交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(ii)**结合律** $k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$

(iii)**分配律** $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

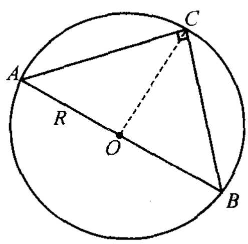
其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，k 为任意实数.

(i)、(ii)的证明可由定义 8.2.1 直接得出，(iii)的证明可利用(8.1)式得出.

在矢量点乘的定义中，若 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量，那么必有 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 考虑到零矢量方向的任意性，我们可得以下定理.

定理 8.2.2 *矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充分必要条件是它们的点乘等于零，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.*

例 8.2.3 证明直径所对的圆周角为直角.



证明 如右图所示，设圆半径为 R，要证明 $\angle ACB$ 为直角，只要证明矢量 $\boldsymbol{AC}\perp\boldsymbol{BC}$ 即可. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BC}&=(\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OC})\cdot(\boldsymbol{BO}+\boldsymbol{OC})\\&=\boldsymbol{AO}\cdot(-\boldsymbol{OB})+\boldsymbol{OC}\cdot(-\boldsymbol{OB})+\boldsymbol{AO}\cdot\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OC},\end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OB}$，且 $\boldsymbol{AO}\cdot\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OC}=R^2$，所以

$$\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BC}=-R^2+R^2=0,$$ 即得 $\boldsymbol{AC}\perp\boldsymbol{BC}$. □

矢量的叉乘

在图 8.10 中，木棒在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下发生转动，是因为由 $\boldsymbol{F}$ 对木棒产生了一个力矩，其大小为 $|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{r}|\sin\theta$. 而 $\boldsymbol{F}$ 方向的改变可能引起转动方向相应的变化，当 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 平行时(即 $\theta=0$ 或 π)，木棒不会转动，因为此时力矩为 0.

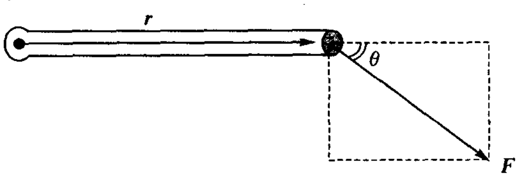


图 8.10

又如图 8.11 所示，角速度为 $\boldsymbol{w}$ 的圆盘，其上某点的速度为 $\boldsymbol{v}$，其大小为 $|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{v}$ 为一个矢量，其方向由右手法则确定，即矢量 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 符合右手法则：伸出右手弯曲四指，指向 $\boldsymbol{w}$ 方向，手臂(由手心向身体)方向的 $\boldsymbol{r}$ 方向，大姆指所指方向即为 $\boldsymbol{v}$ 方向.

定义 8.2.4 矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 按以下方式确定的矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**叉乘**，又称**矢量积(矢积)**或**外积**，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$：

(ⅰ) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(ⅱ) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，如图 8.12 所示，则

力矩：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$；速度：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$.

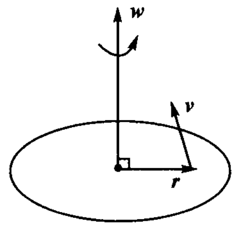


图 8.11

几何上，由定义 8.2.4，矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模即为以矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

要构造一个同时垂直两个矢量的矢量，利用叉乘是比较方便的.

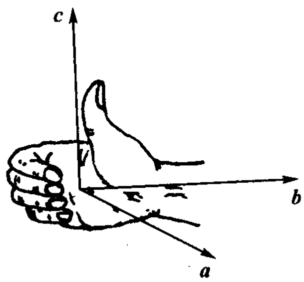


图 8.12

叉乘运算满足以下规律：

(ⅰ)**反交换律** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

(ⅱ)**结合律** $k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$

(ⅲ)**分配律** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

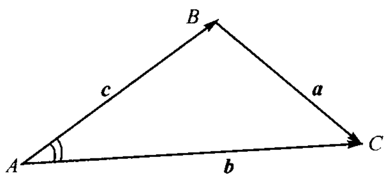
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，k 为任意实数(证略).

在矢量的叉乘定义中，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 0 或 π，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；反之，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ 时，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，则必有 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行). 注意到零矢量方向的任意性，得以下定理.

定理 8.2.5 *矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线)的充分必要条件是它们的叉乘为零矢量，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.*

例 8.2.6 证明正弦定理 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$，其中 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三条边，A,B,C 为对应的三个角(如右图).



证明 由矢量叉乘的几何意义，$\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同理可得 $$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AC}\times\boldsymbol{CB}|=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{BA}\times\boldsymbol{BC}|=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

所以 $$bc\sin A=ab\sin C=ac\sin B.$$

于是 $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$ □

矢量的混合积

定义 8.2.7 设矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的**混合积**(或**三重积**).

由矢量叉乘和点乘的定义知

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha.$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，α 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角.

混合积的几何意义：

因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积，$|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$ 为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三条棱的平行六面体的高(如图 8.13)(若 α 为钝角，$-|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$ 为其高)，所以混合积的绝对值 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 在几何上表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为相邻三条棱的平行六面体的体积.

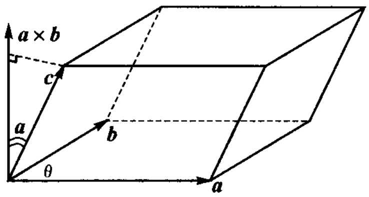


图 8.13

由混合积的几何意义及三个矢量的夹角情况不难得出混合积有以下性质，我们称之为**轮换性**，即对任意矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

由于混合积有轮换性，所以有时混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 也记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，注意括号内三个矢量的次序很重要.

由混合积的几何意义我们还可得以下定理，并以此可方便地判断三个矢量是否共面.

定理 8.2.8 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积为零，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

§8.3 空间直角坐标系中矢量(向量)的表示及运算

前面从几何上定义了矢量及其运算，但矢量的表示和运算并不方便，为此，我们引进空间直角坐标系，把矢量和坐标中的点联系起来，使得矢量的表示和运算更方便、快捷.

空间直角坐标系

过空间一点 O 引三条相互垂直的数轴 Ox,Oy 和 Oz，使其依次成右手法则，这样就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$，如图 8.14 所示. 其中 O 称为**坐标原点**，三条数轴称为**坐标轴**(x 轴，y 轴和 z 轴)，由任两条坐标轴确定的平面称为**坐标平面**(xOy 平面，yOz 平面和 zOx 平面). 三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**，八个卦限编号如图 8.15 所示.

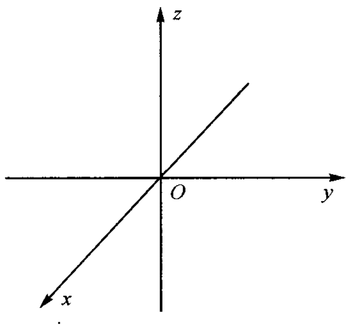


图 8.14

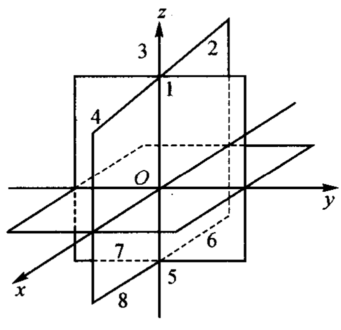


图 8.15

在空间直角坐标系中，我们用一组有序数 (x,y,z) 与空间的一点相对应.

对空间任一点 P，通过 P 分别作平行于三个坐标平面的平面，这三个平面与 x,y,z 轴的交点的读数 x,y,z 组成的有序数组 (x,y,z) 与 P 点相对应. 反之，对任一有序数

(x,y,z)，过 x 轴上的 x 点、y 轴上的 y 点及 z 轴上的 z 点分别作平行于 yOz 平面、zOx 平面及 xOy 平面的平面，此三个平面相交于一点 P. 因此，空间的点 P 与有序数组 (x,y,z) 构成一一对应关系，我们称有序数组 (x,y,z) 为空间的点 P 的**坐标**，并称 x 为 P 的**横坐标**，y 为 P 的**纵坐标**，z 为 P 的**竖坐标**，如图 8.16 所示.

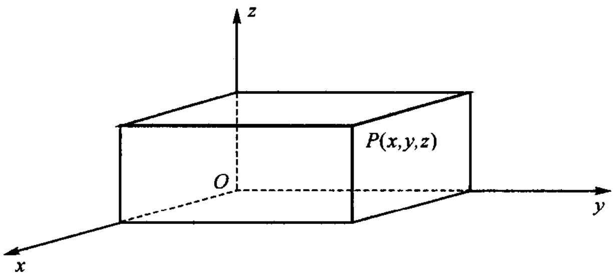


图 8.16

例如点 P_1 的坐标为 $(-2,1,1)$，在第二卦限，点 P_2 的坐标为 $(2,-1,-2)$，在第八卦限，如图 8.17 所示.

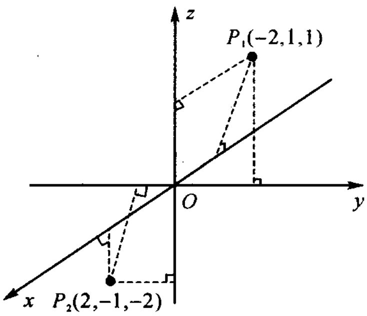


图 8.17

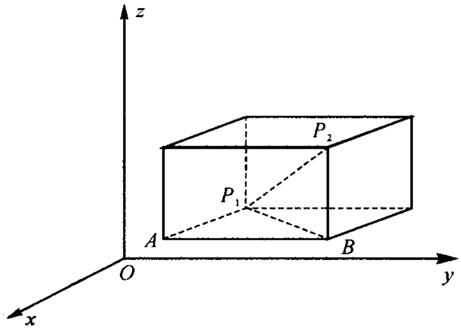


图 8.18

有了坐标表示，我们可以较容易地得到空间两点 P_1,P_2 之间的距离(如图 8.18 所示).

设 P_1 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，P_2 的坐标为 (x_2,y_2,z_2)，则有

$$P_1A=|x_2-x_1|,AB=|y_2-y_1|,BP_2=|z_2-z_1|.$$

所以 P_1 与 P_2 之间的距离为

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，空间任一点 (x,y,z) 与原点 $(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

矢量及其运算的坐标表示

由定理 8.1.11 知，空间任一矢量可由三个不共面的矢量表示. 现在我们引入三个方向分别为三个坐标轴正向的单位矢量，记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}$ 的方向与 x 轴正向一致，$\boldsymbol{j}$ 的方向与 y 轴正向一致，$\boldsymbol{k}$ 的方向与 z 轴正向一致. $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 三个矢量两两垂直，如图 8.19 所示. 因此，空间任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可由 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示.

事实上，对任一矢量 $\boldsymbol{a}$，假设它在 x,y 和 z 轴上的有向投影分别为 a_x,a_y 和 a_z，由矢