

全新应用型（就业型） 高等教育“十一五”规划教材



· 文化基础课系列 ·

SHUXUE

数 学

（基础模块）

主 编 薛加强

副主编 朱晓慧 李素英 刘丽娜

中国发展出版社

全新应用型（就业型） 高等教育“十一五”规划教材



· 文化基础课系列 ·

SHUXUE

数学

(基础模块)

主 编 薛加强

副主编 朱晓慧 李素英 刘丽娜

中国发展出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学 (基础模块) / 薛加强主编. —北京: 中国发展出版社, 2007. 9
全新应用型 (就业型) 高等教育 “十一五” 规划教材
ISBN 978 - 7 - 80234 - 064 - 0

I. 数… II. 薛… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—
教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 140628 号

书 名: 数学 (基础模块)

著作责任者: 薛家强 主编

出版发行: 中国发展出版社

(北京市西城区百万庄大街 16 号 8 层 100037)

标准书号: ISBN 978 - 7 - 80234 - 064 - 0/G · 110

经 销 者: 各地新华书店

印 刷 者: 北京市源海印刷有限责任公司

开 本: 720 × 1000mm 1/16

印 张: 19.75

字 数: 380 千字

版 次: 2007 年 9 月第 1 版

印 次: 2007 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 1—5000 册

定 价: 36.00 元

咨询电话: (010) 68990692 68990622

购书热线: (010) 68990682 68990686

网 址: <http://www.developress.com.cn>

电子邮箱: fazhan@drc.gov.cn

版权所有·翻印必究

本社图书若有缺页、倒页, 请向发行部调换

前 言

为了适应职业教育课程改革创新形势的需要,探索职业教育数学课程如何体现以服务为宗旨、以就业为导向、以学习者为中心、培养学生理性思考的要求,科学有效地提高职业院校学生的思维习惯、品质与能力,同时为学生的专业学习及以后发展提供必要的支持,我们组织从事职业教育的一线数学教师共同编写了这套数学教材。全套教材共两册,第一册是基础模块,第二册是专业模块。

以下是本套教材编写的主要指导思想及原则。

一、基本思想

数学有三个层面。一是作为理论思维的数学,重在培养并反映人类进行理性思维的能力;二是作为技术应用的数学,数学技术和计算机等学科的结合使得数学成为直接创造财富的生产力;三是作为文化修养的数学,数学成为现代人的基本素质的一部分。在本教材中,重点突出第二个层面,同时关注第一和第三个层面在培养学生理性思维方面的作用及训练。

在编写本教材时,从逻辑及内容上适当降低教材的难度,使得学生在学习时达到努力一点就能学会的程度。对于抽象度较高,难于理解的概念,用通俗的语言去描述与解释。在讲知识的同时充分挖掘数学知识的潜在功能,锻炼并提高学生的思维能力与素质,并渗透数学知识与思想方法在各专业及生活中的应用。对知识的内在联系进行透彻的剖析,根据其内在联系与规律,合理安排知识的顺序。

二、基本原则

(一) 基础性原则:数学,作为内部联系非常紧密的一门学科,每一部分知识可能都要以过去的知识作为基础,所以要按照它们的内在逻辑顺序合理安排好教学内容的先后顺序;对于理工、经济类专业,数学是一必备的工具,教材不仅充分体现其基础工具的作用,为学生学好专业打下坚实的基础,并为学生的进一步深造打下坚实的基础。

(二) 循序渐进原则: 在编制教材过程中, 适当降低知识层次间的高度, 使得学生能够适应思维的跳跃性, 便于学生理解与掌握。

(三) 多角度原则: 对于定义、定理、性质、公式等给出不同角度的理解, 特别在练习与习题上予以充分的体现, 引导学生学会全方位思考问题。

(四) 通俗性原则: 许多定义、定理、概念的数学归纳虽然简洁, 但是抽象度太高。为了降低学生学习的难度, 尽量对难于理解的抽象性知识给出通俗易懂的解释, 同时给出准确的数学定义。对于例题与练习、习题, 力求平和中体现思维、变化、技巧, 同时注重观察能力、分析能力的培养。

(五) 灵活性原则: 在编制教材过程中, 无论是指导思想, 还是具体的知识, 都充分体现数学的灵活性思想, 体现数学因条件变化而变化的本质, 渗透自然变化的规律。

(六) 实用性原则: 编写本套教材, 重点是顺应现在职业教育课程改革, 适应其他学科及专业学习的需要, 适应现有学生的学习水平。

本教材的编写以充分的调研为基础, 并吸收借鉴了国内同类教材的长处, 得到徐州经贸高等职业学校、北京华版联科技有限公司的支持和帮助, 在此表示衷心的感谢。

本册教材主编为薛加强; 副主编朱晓慧、李素英和刘丽娜。由于时间比较仓促, 水平有限, 在教材编写中可能会存在一些失误, 恳请专家及广大师生批评指正。

编者

2007年6月

目 录

第一章	数与式	1
第一节	数	1
第二节	对数	12
第三节	二进制	17
第四节	几个初等函数	23
第二章	数列	29
第一节	数列的概念	29
第二节	等差数列	30
第三节	等比数列	38
第三章	集合	45
第一节	集合的概念	45
第二节	集合的关系	48
第三节	集合的运算	49
第四章	不等式	54
第一节	不等式的性质	54
第二节	一元二次不等式	57
第三节	分式不等式	61
第四节	绝对值不等式	63
第五章	简易逻辑 充要条件	66

第一节	逻辑用语	66
第二节	充要条件	70
第六章	函数	74
第一节	函数	74
第二节	函数的单调性、奇偶性和周期性	81
第三节	反函数	90
第七章	幂函数、指数函数、对数函数	94
第一节	幂函数	94
第二节	指数函数	98
第三节	对数函数	103
第八章	三角函数	108
第一节	角的概念的推广	108
第二节	角的弧度制	112
第三节	任意角的三角函数值	116
第四节	同角三角函数值间基本关系式	122
第五节	诱导公式	127
第六节	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	133
第七节	二倍角公式	140
第八节	正弦函数的图像与性质	145
第九节	余弦函数的图像与性质	149
第十节	正切函数的图象与性质	152
第十一节	正弦型曲线	154
第十二节	反三角函数	160
第十三节	正余弦定理	166
第九章	排列、组合	173
第一节	计数法	173
第二节	排列	180
第三节	组合	183
第四节	排列、组合综合应用	188
第五节	二项式定理	191

第十章 概率论与数理统计	195
第一节 现象与事件	195
第二节 概率	198
第三节 古典概型	200
第四节 加法公式、反概率公式、乘法公式	205
第五节 伯努利概型	209
第六节 小概率事件	212
第七节 条件概率	215
第八节 统计基础	219
第九节 离散型随机变量	223
第十节 连续型随机变量	229
第十一章 平面向量	240
第一节 向量的基本概念	240
第二节 向量的几何形式运算	243
第三节 向量的分解与合成	247
第四节 向量的代数形式运算	248
第十二章 直线的方程	256
第一节 直线的方程	256
第二节 两条直线的位置关系	262
第三节 夹角公式	267
第四节 点到直线的距离公式	269
第五节 简单的线性规划	272
第十三章 二次曲线	277
第一节 曲线和方程	277
第二节 圆的方程	280
第三节 椭圆	286
第四节 双曲线	292
第五节 抛物线	297

第一章 数与式

第一节 数

本节将复习数的类型，数有哪些运算及这些运算的基本规则及各类运算。

一、数的基本知识

1. 数轴

数轴是给定了原点、正方向和单位长度的直线。这就是说数轴由三部分构成，第一部分是一条有方向的直线，常用字符 x 表示；第二部分是在直线上取定一个点，称为原点，通常标记为 O ；第三部分是取定一条短线段作为单位。例如，图 1.1.1 中画的分别是两个数轴，它们作为单位的线段不一样长。

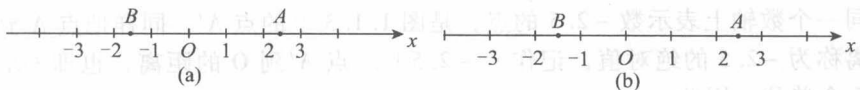


图 1.1.1

建立了数轴之后，给定一个实数，例如 2.5，在实数轴正方向取长度为 2.5 个单位，得到一个点（在图 1.1.1 (a)，(b) 上以 A 表示）；又例如 $-\sqrt{2}$ ，在实数轴负方向取长度为 $\sqrt{2}$ 个单位，得到另一个点（在图 1.1.1 (a)，(b) 上以 B 表示）。对一切实数，都可以按这个办法在实数轴上得到一个对应点；反之，实数轴上任何一个点，也可以用下面的方法得到一个实数：它的大小，是这个点到原点的距离。点在原点 O 的右边，为正数；点在原点 O 的左边，则为负数；原点对应数 0。例如在图 1.1.1 (a)，(b) 上的点 A ，因为 OA 长为 2.5 个单位，在原点 O 的右边，因此表示实数是 2.5。比较图 (a) 和图 (b)，线段 OA 的长度并不相同。虽然单位的实际长度取的不同， OA 的数量都是 2.5 个单位，因此都表示实数 2.5。

结合正反两个方面，就是你在初中学过的结论：实数轴上的点与实数之间一一对应。这种对应，是数学图像的基础，也是形数结合——一个形用数量关系式表示，一个数量关系用形表示出来——的基础，这是你必须掌握的，因为在今后的学习中，我们经常用形数结合的方法，来分析和解决问题。

练习

(1) 依次用 A, B, C, D, E, F, 把下列实数尽量准确地为数轴上表示出来:

- ① 3.5 ② -3.5 ③ $\sqrt{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ π ⑥ $\sin 45^\circ$

(2) 请尽量准确地写出图 1.1.2 中点 A, B, C, D, E 所对应的实数:

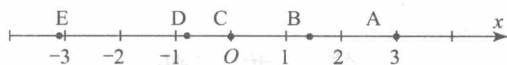


图 1.1.2

2. 绝对值

数轴上表示数 2.5 的点, 是图 1.1.3 上的点 A。OA 的长, 也就是点 A 到 O 的距离是 2.5 个单位, 我们把这个距离, 称为 2.5 的绝对值, 记作 $|2.5|$, 即:

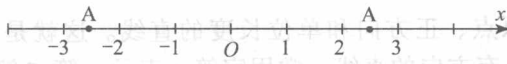


图 1.1.3

$$|2.5| = 2.5 \quad (1.1.1)$$

同一个数轴上表示数 -2.5 的点, 是图 1.1.3 上的点 A', 同样把点 A' 到原点的距离称为 -2.5 的绝对值, 记作 $|-2.5|$ 。点 A' 到 O 的距离, 也即 OA' 长也是 2.5 个单位, 因此:

$$|-2.5| = 2.5 \quad (1.1.2)$$

定义 一般的, 设 a 是任何一个实数, 数轴上表示数 a 的点到原点的距离称为 a 的绝对值, 记作 $|a|$ 。

若 $a=0$, 则在实数轴上的对应点就是原点 O, 因此到原点的距离是 0, 所以 $|a|=0$ 。

因为距离总是非负的, 所以任何实数 a 的绝对值 $|a| \geq 0$ 。

从 (1.1.1) (1.1.2), 已经看到 $|2.5| = |-2.5| = 2.5$, 这是因为, 在同一个数轴上, 表示数 2.5 和 -2.5 的点 A、A' 是关于原点对称的, 因此表示这对相反数的点到原点的距离相等。其实, 任何一对相反数 $a, -a$ ($a \neq 0$), 数轴上表示它们的两个点, 总是关于原点对称的, 因此它们到原点的距离相等, 因此 $|a| = |-a|$ 总是成立的。

对一般的数 a , 用 $|a|$ 来表示它的绝对值, 根据绝对值的定义有如下重要结论:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

以后,你遇到任何数的绝对值,都可以用上式来计算。并且从上式还可得到一个重要不等式: $|a| \geq a$ 。

[例 1.1.1] 求下列数的绝对值:

- (1) -5.2 (2) $\sqrt{1.9}$ (3) $-\frac{3}{4}$ (4) $\cos 60^\circ$

解: (1) 因为 $-5.2 < 0$, 所以 $|-5.2| = -(-5.2) = 5.2$

(2) 因为 $\sqrt{1.9} > 0$, 所以 $|\sqrt{1.9}| = \sqrt{1.9}$

(3) 因为 $-\frac{3}{4} < 0$, 所以 $|\frac{3}{4}| = -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$

(4) 因为 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} > 0$, 所以 $|\cos 60^\circ| = \frac{1}{2}$

[例 1.1.2] 求值:

(1) 已知 $y > 0$, 且 $|y| = 0.001$, 求 y ;

(2) 已知 $x < 0$, 且 $|x| = 1000$, 求 x ;

(3) 已知 $a < 0$, 且 $|a| = -0.01$, 求 a ;

(4) 已知 $|b| = \frac{3}{7}$, 求 b 。

解: (1) 因为 $y > 0$, 所以 $|y| = y = 0.001$ 。

(2) 因为 $x < 0$, 所以 $|x| = -x = 1000$, 所以 $x = -1000$ 。

(3) 任何数的绝对值不可能为负值, 所以本题的题目错误。

(4) 因为没有指明 b 的符号, 所以 $b = \pm \frac{3}{7}$ 。

[例 1.1.3] 求值:

(1) 设 $a \neq 0$, $x = \frac{|a|}{a}$, 求 x ;

(2) 设 a, b 是两个已知数, $c = |a - b|$, 求 c ;

(3) 设 a, b 是两个已知数, $c = |a - b| - |b - a|$, 求 c ;

解: (1) 当 $a > 0$, $|a| = a$, 所以 $x = \frac{a}{a} = 1$

当 $a < 0$, $|a| = -a$, 所以 $x = \frac{-a}{a} = -1$

(2) 当 $a > b$, 则 $a - b > 0$, $c = |a - b| = a - b$

当 $a < b$, 则 $a - b < 0$, $c = |a - b| = -(a - b) = b - a$

当 $a = b$, 则 $a - b = 0$, $c = |a - b| = 0$

(3) 因为互为相反数的两个数的绝对值相等, 所以

$$|b - a| = |-(b - a)| = |a - b|$$

$$\text{所以 } c = |a - b| - |b - a| = |a - b| - |a - b| = 0$$

[例 1.1.4] 用符号“ $>$ ”“ $=$ ”“ $<$ ”号填空:

- (1) 若 $|a| > |b|$, $a > 0, b > 0$, 则 a b ;
 (2) 若 $|a| = |b|$, $a > 0, b < 0$, 则 a b ;
 (3) 若 $|a| = |b|$, $a < 0, b > 0$, 则 a b ;
 (4) 若 $|a| < |b|$, $a < 0, b < 0$, 则 a b .

解: 因为 $a > 0$ 时, $|a| > |b| \Rightarrow a > b$; $a < 0$ 时, $|a| > |b| \Rightarrow a < b$.
 又因为正数总是大于负数, 所以 (1) $>$ (2) $>$ (3) $<$ (4).

练习

(1) 用符号 “ $>$ ” “ $=$ ” “ $<$ ” 号填空:

- ①若 $|a| > |b|$, $a < 0, b < 0$, 则 a b ;
 ②若 $|a| = |b|$, $a < 0, b > 0$, 则 a b ;
 ③ $|(-9) + 6|$ $|-9| + |6|$;
 ④ $|m - n|$ $|m| + |n|$;
 ⑤ $|m - n|$ $|m| - |n|$.

(2) 求下列数的绝对值:

- ① 7.0 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\sqrt{7.5}$ ④ $-\sin 60^\circ$

(3) ①已知 $x < 0$, 且 $|x| = 500$, 求 x ;

②已知 $x < 0$, 且 $|x| = 0.001$, 求 x ;

③已知 $c > 0$, 且 $|c| = 2\sqrt{2}$, 求 c ;

④已知 $|b| = \sqrt[3]{10}$, 求 b .

(4) ①设 $c = a$ 或 $-a$, 则 $c = |a|$, 结论对吗?

②设 $b \neq 0, y = \frac{b}{|b|}$, 求 y ;

(5) 设 a 是已知数, $c = |a| - a, d = a - |a|$, 求 c, d ;

(6) 设 a, b 是两个已知数, $c = |a - b| + |b - a|$, 求 c ;

二、分式化简

含有字母的式子, 称为分式, 它的运算, 仍然可以使用通分进行计算。

在分式化简时, 常常要求两个以上分式的和与差, 这就要用到通分的方法。与分数的通分求最小公倍数类似, 分式求和与差, 要求分母的最小公倍式, 这就要用到因式分解的方法。先把各分式的分母分解因式, 然后把所有的因式一起取出, 并求次数最高的, 最后把它们相乘的积作为公分母。

【例 1.1.5】 化简下列各式 (a, b 是满足 $|a| \neq |b|$ 的任何数):

- (1) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$ (2) $\frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2}$

$$(3) \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2+2ab+b^2} \quad (4) \frac{a+b}{b^3-a^3} - \frac{1}{a^2+ab+b^2}$$

解:

$$(1) \text{通分得: } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)}$$

应用平方差公式: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\text{得: } \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b) + (a+b)}{a^2 - b^2}$$

$$\text{所以: } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

(2) 通分, 并应用立方和公式: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\text{得: } \frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a^2 - ab + b^2) - (a+b)^2}{a^3 + b^3}$$

再使用完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$\text{得: } \frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a^2 - ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)}{a^3 + b^3} = -\frac{3ab}{a^3 + b^3}$$

$$(3) \text{由完全平方公式: } \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{b}{(a+b)^2}$$

$$\text{通分得到: } \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{a}{(a+b)^2}$$

(4) 应用立方差公式: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

那么, $\frac{a+b}{b^3-a^3}$ 的分母: $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

$\frac{1}{a^2+ab+b^2}$ 的分母是 $b^3 - a^3$ 的一个因子, 所以通分得:

$$\frac{a+b}{b^3-a^3} - \frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b}{b^3-a^3} - \frac{b-a}{b^3-a^3} = \frac{2a}{b^3-a^3}$$

上面用到的完全平方和公式、平方差公式、立方和公式与立方差公式, 是在初中代数学过的重要公式, 今后经常会用到, 必须牢牢记住。

练习

(1) 试以 $a=1, b=-2$ 代入完全平方和公式、平方差公式、立方和公式与立方差公式, 以验证公式的正确性。

(2) 试以 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$ 代入例 1.1.5 的 (1)、(2)、(3)、(4), 用分数形式完成化简过程。

(3) 化简下列各式 (式中出现的 a, b 是满足 $|a| \neq |b|$ 的任何数):

$$\textcircled{1} \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{a+b} + \frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{a+b} + \frac{a}{a^2+2ab+b^2} \quad \textcircled{4} \frac{a-b}{b^3-a^3} + \frac{1}{a^2+ab+b^2}$$

三、数的运算

1. 乘方运算

有理数的乘方：有 n 个相同因数的积的运算。

2. 有理数的乘方

负数的偶数次幂是正数；负数的奇数次幂是负数。

-1 的偶数次幂等于 1；-1 的奇数次幂等于 -1。

[例 1.1.6] 计算：

$$(1) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad (2) (-5)^3 \quad (3) (-1)^{18}$$

解：

$$(1) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$(2) (-5)^3 = -5^3 = -125$$

$$(3) (-1)^{18} = 1$$

3. 乘方、与四则运算的混合运算

运算顺序：

(1) 如果有括号，那么先算括号里面的；

(2) 先算乘方，后算乘除，最后算加减；

(3) 在几个数连除，或乘除混合运算中，按从左到右的顺序计算。

[例 1.1.7] 计算：(1) $3 \times (-4) - (-2)^5 \div (-8) + 12$

$$(2) 18 - (-1)^7 \times (-81) \div 3^3 - 10$$

$$\begin{aligned} (1) 3 \times (-4) - (-2)^5 \div (-8) + 12 &= -12 - (-32) \div (-8) + 12 \\ &= -12 - 4 + 12 \\ &= -4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) 18 - (-1)^7 \times (-81) \div 3^3 - 10 &= 18 - (-1) \times (-81) \div 27 - 10 \\ &= 18 - 81 \div 27 - 10 \\ &= 18 - 3 - 10 \\ &= 5 \end{aligned}$$

四、幂的运算

1. 整数次幂

在初中时，已经学习了整数指数幂，它的意义是

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_n \quad (n \in \mathbf{N}_+)$$

规定：

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbf{N}_+)$$

整数指数幂有下列性质:

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ($a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}$)
 (2) $(a^n)^m = a^{mn}$ ($a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}$)
 (3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ ($a \neq 0, b \neq 0, m \in \mathbf{Z}$)

[例 1.1.8] 求下列各式的值:

(1) 0.4^0 (2) $(a-b)^0$ (3) 10^{-2}

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (5) $(2x)^{-2}$ ($x \neq 0$)

解: (1) $(0.4)^0 = 1$ (2) $(a-b)^0 = 1$ ($a \neq b$) (3) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0.01$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -8$ (5) $(2x)^{-2} = \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = \frac{1}{4x^2}$ ($x \neq 0$)

练习

(1) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $-\left(-\frac{3}{5}\right)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $10^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(0.1)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 有理指数幂

定义 规定 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($n, m \in \mathbf{N}_+$, 且 m, n 为既约分数)。

这样, 我们就把整数指数幂的概念推广到了分数指数幂。

至于负分数指数幂的意义, 与负整数指数幂的意义一样, 即 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($n, m \in \mathbf{N}_+$, 且 m, n 为既约分数)。

这样, 我们就把整数指数幂的概念推广到了有理指数幂。

练习

把下列根式表示为有理指数幂的形式:

(1) $\sqrt[4]{6^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\sqrt[3]{-16} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\sqrt[9]{b^7} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sqrt[n]{b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $\sqrt[6]{b^m} = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\sqrt[m]{x^n} = \underline{\hspace{2cm}}$

可以证明, 整数指数幂的运算性质对有理指数幂也是成立的, 即

性质 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, 其中, $a > 0, b > 0, m, n \in \mathbf{Q}$ 。

[例 1.1.9] 求下列各式的值:

(1) $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$ (2) $8^{\frac{2}{3}}$ (3) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \cdot (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

解: (1) $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$ (2) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(3) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \cdot (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = a - b$

根据运算性质

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$$

练习

(1) $(-7)^{\frac{1}{3}} \times (-7)^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $(-7)^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $8^{\frac{2}{3}} \div 8^{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $(16^2)^{\frac{1}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $(2^a \cdot 2^b)^{\frac{1}{a+b}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $(9a)^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}) \cdot (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

应用 有理指数幂运算性质, 在进行幂运算时, 非常简便。

第一类应用是简化较复杂的根式运算。

[例 1.1.10] 计算下列根式运算的结果:

(1) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$ (2) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{a}$ (3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

解:

(1) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 3^1 \times 3^{1/2} \times 3^{1/3} \times 3^{1/6} = 3^{(1+1/2+1/3+1/6)} = 3^2 = 9$

(2) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{a} = a^{-1} \cdot a^{1/3} \cdot a^{1/4} = a^{(-1+1/3+1/4)} = a^{-5/12}$

(3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = (a \cdot a^{1/2})^{1/3} = (a^{3/2})^{1/3} = a^{1/2}$

练习

化简下列各式:

(1) $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$ (2) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

第二类应用是简化幂的计算。

[例 1.1.11] 求下列幂:

(1) $7^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{5}}$ (2) $8^{\frac{2}{3}}$ (3) $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

(4) $16^{\frac{3}{4}}$ (5) $100^{-\frac{1}{2}}$ (6) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$