21世纪 高等学校本科系列教材

计算机科学与技术专业

Xinhao Yu Xitong Fenxi Jichu

信号与系统分析基础

第二版

主 编 曾黄麟 余成波

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

信号与系统分析基础

(第2版)

曾黄麟　余成波　主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

《信号与系统分析基础》主要研究信号、系统的某些特性，介绍信号与系统的基础分析方法。本书在修订时循着逐步更新的精神，在保持教学大纲内容和要求的基础上，对内容体系作了某些改变的尝试。其特点一是加强了信号与系统的基本概念、基本方法的介绍；二是对信号重点强调频谱概念，系统重点强调系统响应分析方法。全书内容包括：信号基础知识，系统的基本概念，线性时不变连续系统的时域分析，线性位移不变离散系统的时域分析，连续信号系统的频域分析，离散傅里叶级数、离散时间傅里叶变换与 DFT，拉普拉斯变换及复频域分析，Z 变换与 Z 域分析共 8 章。

本书可作为电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业本、专科生和其他专业的研究生教材，也可供相关专业、相关领域的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统分析基础/曾黄麟，余成波主编．—2 版
(修订本)．—重庆：重庆大学出版社，2007.7
(计算机科学与技术专业本科系列教材)
ISBN 978-7-5624-2363-8

Ⅰ．信…　Ⅱ．①曾…②余…　Ⅲ．①信号分析—高等学校—教材②信号系统—系统分析—高等学校—教材
Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 054190 号

信号与系统分析基础
(第 2 版)
曾黄麟　余成波　主编
责任编辑：梁　涛　　版式设计：梁　涛
责任校对：夏　宇　　责任印制：张　策
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编：400030
电话：(023) 65102378　65105781
传真：(023) 65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
重庆科情印务有限公司印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：18.25　字数：456 千
2001 年 11 月第 1 版　2007 年 7 月第 2 版　2007 年 7 月第 3 次印刷
印数：7 001—10 000
ISBN 978-7-5624-2363-8　定价：28.00 元

修订版前言

《信号与系统分析基础》课程是根据教育部组织实施的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”和2000年6月西部地区工科院校教材编写会议精神，依据教学大纲的要求，为电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业本、专科生和其他专业的研究生而编写的。它是这些专业的一门重要技术基础课，主要研究信号与线性系统分析的基本概念、原理、方法与工程应用，在教学计划中起着承前启后的作用。它一方面以工程数学和电路分析理论为基础，另一方面它本身又是后续的技术基础课和专业课的基础，也是学生将来从事专业技术工作的重要理论基础，它将为学生的素质培养起到重要作用。为此，2005年7月西部地区工科院校教材编写会议提出对《信号与系统分析基础》进行修订，根据修订意见，《信号与系统分析基础》修订版对原书第1版主要进行了以下几个方面的修订：

1. 加强了信号与系统的基本概念、基本方法的介绍。新增了信号的基本知识，包括信号的定义、基本信号及信号的运算、系统的基本概念、系统模型、系统模拟等基本概念和方法的部分内容。

2. 根据教学基本要求，对全书重点、难点做适当调整；新增和调整部分内容、例题、习题。

3. 为了使学生对基本概念有较清晰的“理解”，对学习的重点、难点有较清楚的“了解”，对分析方法运用有较熟练的“掌握”，修订后的《信号与系统分析基础》每章新增了本章主要内容小结。

4. 修订后的《信号与系统分析基础》新增全书教学用多媒体课件。

根据上述修订思想，将原本7章修订为8章内容，全书由曾黄麟教授修订。

我们真诚希望，修订后的《信号与系统分析基础》能更适合于电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业本、专科生和其他专业的研究生学习，能为这些专业的学习提供一些信号与系统的基本概念、原理与分析方法，能为学生的素质培养起到应有的作用。

由于修订时间紧，加之修订者水平有限，本书修订版一定还有不少错误和不妥之处，敬请读者赐教。

曾黄麟

2007年1月

前言

随着现代社会、经济、科技、文化和世界高等教育的发展，对我国高等教育面向21世纪培养人才提出了更高的要求，改革课程体系和更新教学内容已成为高等教育改革的一项十分迫切而重要的任务。

根据教育部组织实施的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”和2000年6月西部地区工科院校教材编写会议精神，依据教学大纲的要求，并对《信号与线性系统分析》的内容进行了必要的修改和补充，编写为适合于电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业学习的《信号与系统分析基础》。

随着大规模集成电路、计算机的迅速发展，数字技术已渗透到科学技术的各个领域。为了适应新的发展变化，目前，信号、电路与系统的研究重点普遍注意转向离散的、数字的方面。本书在编写时循着逐步更新的精神，在保持教学大纲内容和要求的基础上，对内容体系做了某些改变的尝试。为了有利于基本概念和基本方法的理解与掌握，我们将连续系统与离散系统的内容并列安排学习。考虑到当前的实际情况，在具体安排上，先讨论连续的信号、系统，再讨论离散的信号、系统。信号重点强调频谱概念，系统重点强调系统响应分析方法。本书按时域分析、变换域分析的次序划分章节，因此，第1章我们对信号与系统分析做一概述，第2章、第3章分别讨论连续系统、离散系统响应的时域分析方法，第4章、第5章重点强调连续、离散信号的频谱概念，第6章、第7章分别讨论连续系统、离散系统响应的变换域分析方法。这样，既强调了连续系统与离散系统的共性，也突出了它们各自的特点。

全书内容包括：信号基础知识、系统的基本概念、线性时不变连续系统的时域分析、线性位移不变离散系统的时域分析、连续信号及系统的频域分析、离散傅里叶级数、离散时间傅里叶变换与DFT、拉普拉斯变换及复频域分析、Z变换与Z域分析等共8章。建议课堂教学约60学时，由于课时的原因，本书略去了系统的状态变量分析法，对于需要学习这方面的读者，请根据实际情况，进行补充，不受本书的约束。

为使读者能较好地理解基本概念和分析方法，本书提供了较多的例

题和习题，请酌情选用。

本书由曾黄麟教授编写第2章、第3章、第5章、第6章6.4节、第7章，并统稿全书，余成波教授编写第1章、第4章、第6章6.1，6.2，6.3节，贵州大学的武文跃在第2章的编写中给予了支持。在编写过程中，四川理工学院、重庆工业学院给予了许多支持和帮助，许多兄弟院校的老师也提出了宝贵意见，他们有意无意地给了我们许多启示，使我们从内容安排和与相关课程的联系上都有很大帮助，在此一并表示衷心的谢意。

由于编者水平有限，教材中一定有不少错误和不妥之处，敬请读者赐教。

编　者

2001年5月

目录

第1章 信号基础知识

随着近代科学技术的进步与发展，当今科技革命的特征是以信息技术为核心，促使社会进入信息时代，信息社会的发展使信号与系统日益复杂，也促进了信号与系统理论研究的发展。

信号和系统是两个相联系而又相区别的研究对象，信号是运载信息的工具，系统则是产生、传输或处理信号的客观实体。因此，在研究系统的有关问题以前，先要了解信号。

1.1 信号的定义

1.1.1 信号及其描述

人类在社会活动与日常生活中，无时无刻不涉及信息的获取、存储、传输与再现。可以说上至天文，下至地理，大到宇宙，小到粒子核子的研究，乃至工农业生产、社会发展及家庭生活都离不开信息科学，故信息对每个人都特别重要。

什么是“信息”？信息即人们得到的“消息”，也就是原来不知道的知识，它是人类认识客观世界和改造客观世界的知识源泉。获取信息，传输信息和交换信息，自古至今一直是人类基本的社会活动。从公元前700余年，祖先利用烽火传递警报，到现代的电话、电报、传真、无线广播与电视，其目的都是要把某些“消息”借一定形式的信号从一个地方传递到另一个地方，给对方以信息。

信息要用某种物理方式表达出来，通常可以用语言、文字、图画、数据、符号等来表达。也就是说，信息通常隐含于一些按一定规则组织起来的约定的“符号”之中。但是，信息一般都不能直接传送，它必须借助于一定形式的信号（光信号、声信号、电信号等），才能远距离快速传输和进行各种处理。因此可以说信号是信息的载体，是信息的一种表现形式。

什么是“信号”？广义地说，信号是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象。例如，机械振动产生力信号、位移信号及噪声信号；雷电过程产生的声、光信号；大脑、心脏运动分别产生脑电和心电信号；电气系统随参数变化产生电磁信号等。在通信技术中，信号是消息的表现形式，它是传送各种消息的工具，是通信传输的客观对象。本书将主要讨论应用广泛的电信号，它通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示。

当信号满足条件：$t<0$，$f(t)=0$ 时，称为物理可实现信号。即在时刻小于零的一侧全为零，

信号完全由时刻大于零的一侧确定，故称为单边信号，如阶跃函数$u(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$。因为这种信号反映了物理上的因果律，故又称为因信号。

当信号满足条件：$t\geqslant 0$ 时，$f(t)=0$，即在时刻大于零的一侧全为零，信号完全由时刻小于零的一侧确定，因为这种信号反映了物理上的反因果律，故又称为反因信号，如反向阶跃函数$u(-t)=\begin{cases}0 & t\geqslant 0\\ 1 & t<0\end{cases}$。

因信号和反因信号共同构成双边信号。

在现实生活中出现的信号，大量的是物理可实现信号。实际中所能测得的信号，许多都是由一个输入信号作用于一个物理系统之后所输出的信号。所谓物理系统是指具有这样性质，当激发脉冲作用于系统之前，系统是没有响应的，换句话说，在零时刻之前，没有输入脉冲，则输出为零。

信号的特性可以由时间特性和频率特性两方面来描述，关于信号的频率特性，将在后面介绍。

1.1.2 信号的分类

为了深入了解信号的物理实质，其分类研究是非常必要的。对于各种信号，可以从不同的角度进行分类。下面讨论几种比较常见的分类方法。

(1)确定信号与随机信号

按时间函数的确定性划分，信号可分为确定信号与随机信号两类。

确定信号是指一个可以用明确的数学关系式描述的信号，即可以表示为一个或几个自变量确定的时间函数的信号。也就是预先可以知道它的变化规律，是时间的确定函数，即在给定的某一时刻，信号是有确定的值。如正弦信号$f(t)=\sin\omega t$等。

随机信号则与之不同，不能预知它随时间变化的规律，不是时间的确定函数，即不可预知或不能用数学关系式描述，其幅值、相位变化，通常只知道它取某一些数值的概率，如噪声信号，汽车奔驰时所产生的振动信号等。但是在一段时间内由于它的变化规律比较确定，可以近似为确定信号。因此，为了分析方便，首先研究确定信号，在此基础上根据随机信号的统计规律再研究随机信号。本书只分析确定信号。

对于确定信号，它可以进一步分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

周期信号是指经过一定时间可以重复出现的信号。如正弦信号及其叠加函数$f(t)=\sin(\omega_0 t+\theta)$，$f(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)-2\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$，复指数信号$f(t)=e^{j\omega nt}$。

非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。如门函数$f(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant\tau\\ 0 & |t|>\tau\end{cases}$，指数信号$f(t)=e^{-at}$。

准周期信号是周期与非周期的边缘情况，是由有限个周期信号合成，但各周期信号的频率相互间不是公倍关系，其合成信号不满足周期条件。这种信号往往出现于通信。如信号$f(t)=\cos 3t+\cos 7t+\cos 11t$。

(2)连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性,信号可划分为连续时间信号与离散时间信号,简称连续信号与离散信号。

连续信号是指在所讨论的时间间隔内,除有限个第一类间断点外,对于任意时刻值都可给出确定的函数值,此类信号称为连续信号或模拟信号。

离散信号是指在所讨论的时间区间,只在某些不连续规定的时刻给出函数值,而在其他时刻没有给出函数,通常用$f(kT)$[简写$f[k]$]表示,由于它是由一组按时间顺序的观测值所组成,因此也称为时间序列或简称序列,如复指数序列$f[n]=e^{j\frac{n\pi}{8}}$,周期脉冲信号$x[n]=x[n+N]$。离散信号又可分为两种情况:即将连续时间信号离散化,在某些时刻取该信号的幅值时,这种信号称为采样信号;再将该时间离散信号进行幅值量化编码时,则称为数字信号。

(3)能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性划分,可以分为能量信号、功率信号和非功率非能量信号。

信号能量可以看做是随时间变化的电压或电流,加到 1 欧姆电阻上的能量,即信号平方的无穷积分简称为信号能量 E,即

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{t}f^2(t)\,dt \tag{1.1}$$

其平均功率定义为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{t}f^2(t)\,dt \tag{1.2}$$

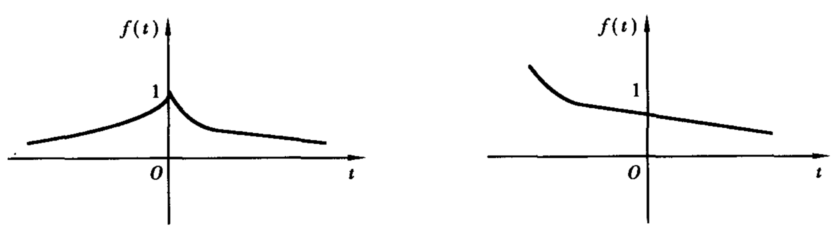
若信号$f(t)$的能量有界,即$0<E<\infty$,此时$P=0$,则称此信号为能量有限信号,简称能量信号。

若信号$f(t)$的功率有界,即$0<P<\infty$,此时$E=\infty$,则称此信号为功率有限信号,简称功率信号。

一般来说,周期信号都是功率信号。

非周期信号则可能出现三种情况:能量信号、功率信号、非功率非能量信号。如:持续时间有限的非周期信号为能量信号,持续时间无限、幅度有限的非功率能量信号。值得注意的是一个信号不可能同时既是功率信号,又是能量信号;但可能是一个既非功率信号,又非能量信号。

【**例 1.1**】　如图 1.1 所示信号,判断其是否为能量信号与功率信号。



(a)$f_1(t)=e^{-2|t|}$　　(b)$f_2(t)=e^{-2t}$

图 1.1　例 1.1 题图

解　图 1.1(a)的信号$f_1(t)=e^{-2|t|}$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{t}(e^{-2|t|})^2dt=\int_{-\infty}^{0}e^{4t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=\frac{1}{2}$$

$$P=0$$

该信号为能量信号。

对于图 1.1(b)所示信号$f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}$,则有

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{t}(\mathrm{e}^{-2t})^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-4T}-\mathrm{e}^{4T}}{4}\right]=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}-\mathrm{e}^{-4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}}{2}=\infty$$

该信号既非能量信号又非功率信号。

由此可见,按能量信号与功率信号进行分类时,从理论上讲尚未包括所有的信号。

1.2 基本信号

1.2.1 基本的常见普通信号

本节将要介绍几种重要的连续时间和离散时间信号。主要原因:一是因为这些信号是常见信号,二是实际中复杂的信号可以由这些基本信号组合而成,并且这些信号对线性系统产生的响应,对分析系统和了解系统的性质起着主导作用,具有普遍意义。

(1)正弦型信号与正弦型序列

1)连续时间正弦型信号

一个正弦信号可描述为

$$f(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.3}$$

式中A为振幅,ω_0为角频率(rad/s),φ为初始角(弧度)。正弦信号是周期信号,周期为$T(T=2\pi/\omega_0)$。由于余弦信号与正弦信号只是在相位上相差$\pi/2$,因此将它们统称为正弦型信号。

余弦信号与正弦信号均可用欧拉公式展开为复指数信号,即

$$\cos\omega t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\tag{1.4}$$

$$\sin\omega t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}\tag{1.5}$$

正弦型信号具有非常实用的性质:

①两个频率相同的正弦信号相加,即使其振幅与相位各不相同,但相加后结果仍然是原频率的正弦信号;

②若一个正弦信号的频率是另一个正弦信号频率的整数倍时,则合成信号是一个非正弦周期信号,其周期等于基波的周期(如图 1.2);

③正弦信号对时间的微分或积分仍然是同频率的正弦信号(如图 1.3)。

2)正弦型序列

通常正弦型序列是从正弦时间函数或余弦时间函数经取样后得来的,正弦序列的表达式为

$$f[k]=A\sin(\Omega_0 k+\varphi)\tag{1.6}$$

这里幅值A、初相φ的含义与模拟正弦信号相同,但正弦序列的数字角频率Ω_0的含义与一般模

拟信号角频率 ω_0 的概念不同。由于离散信号定义的时间为 kT,显然有 $\Omega_0=\omega_0 T$,单位为弧度,它表示相邻两个样值间弧度的变化量。

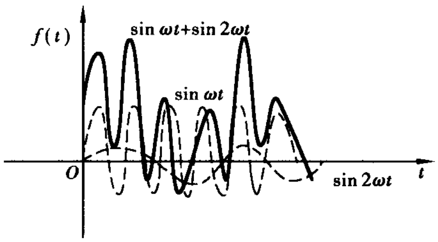


图 1.2　合成信号是一个非正弦周期信号

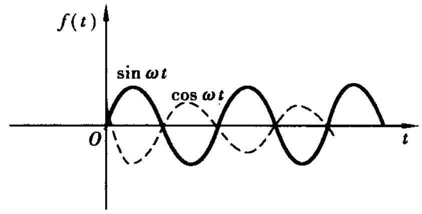


图 1.3　正弦信号对时间的微分或积分仍然是同频率的正弦信号

对于周期序列其定义为:$f[k+N]=f[k]$其中 N 为序列的周期,只能为任意整数。正弦序列为周期序列,其周期为 N,即

$$
\begin{aligned}
A\sin[\Omega_0(k+N)+\varphi] &= A\sin\left[\Omega_0\left(k+\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)+\varphi\right] \\
&= A\sin(\Omega_0 k+2\pi+\varphi)=A\sin(\Omega_0 k+\varphi)
\end{aligned}
$$

(2)指数型信号与指数型序列

1)连续时间实指数信号和离散时间实指数序列

连续时间实指数信号可表示为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{at} \tag{1.7}$$

式中 A,a 均为实常数。若 $a<0$,则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数衰减;若 $a>0$,则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数增长;若 $a=0$,则 $f(t)$ 为直流信号。

离散时间实指数序列为

$$f[n]=a^n \qquad a\in R \tag{1.8}$$

式中 a 为实常数。如果限于 $a>0$,当 $a>1$ 时,它呈现出单调增长的实指数序列,当 $a=1$ 时,称为单位序列,当 $a<1$ 时,为单调衰减的实指数序列。当 $a<0$ 时,若 $a=|-a|$,它在增长或衰减的同时,还交替地改变序列值的符号,这是一种振荡的特性。

2)连续时间复指数信号和离散时间复指数序列

通常连续时间复指数信号表示为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st} \qquad s=a+\mathrm{j}\omega \tag{1.9}$$

s 称为复频率。根据欧拉公式可得

$$\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{at}\cos\omega t+\mathrm{j}\mathrm{e}^{at}\sin\omega t \tag{1.10}$$

因此,通常复指数信号为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= A\mathrm{e}^{at}\cos\omega t+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{at}\sin\omega t \\
&= \mathrm{Re}[f(t)]+\mathrm{jIm}[f(t)]
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

由此可见,复指数信号可分解为实部和虚部两部分,它们分别代表余弦和正弦振荡信号,且其波形是随 s 的不同而异。当 $s=0$ 时,信号为直流信号;当 $\omega=0$ 时,信号变成为一个单调增长或衰减的实指数信号;当 $a=0$ 时,信号实部是一个等幅余弦信号,虚部是一个等幅正弦信号。在通常情况下,复指数信号的实部是一个增幅($a>0$)或减幅($a<0$)的余弦信号,由于复指数信号能概括多种

情况，因此可利用它来描述多种基本信号，故它是信号与系统分析中经常遇到的重要信号。

离散时间复指数序列是信号分析中最常用的基本序列，可表示为

$$f[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\big|_{t=nT_0}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 nT_0}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\omega_0 T_0 \tag{1.12}$$

如同正弦序列，若复指数序列是一个以 N 为周期的周期序列，则有 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0(n+N)}$，因此 $\Omega_0 N=2\pi m$，m 为整数，即 $2\pi/\Omega_0=N/m$，为有理数，其周期为 $N=m(2\pi/\Omega_0)$。

比较正弦型信号、复指数信号与正弦型序列、复指数序列的表达式可见，虽然它们都是周期信号，但对连续时间信号来说，ω 取值可以在 $-\infty<\omega<\infty$ 区间，而且任意选择 ω_0 都具有周期性，其周期为 $T_0=2\pi/\omega_0$。而对离散时间信号来说，由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_0\pm k2\pi)n}$，$k$ 为正整数，表示在数字频率上相差 2π 整数倍的所有离散时间复指数序列（正弦序列）都是一样的。也就是说，离散域的频率 Ω 的有效取值是在 $0\leqslant\Omega\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 的任一间隔为 2π 的范围。

由此可知，将正弦型信号与复指数信号从连续域变换到离散域，相当于把无限的频率范围映射到有限的频率范围。这一基本区别在今后进行数字信号与数字系统的频率特性分析时非常有意义，即数字频率 Ω 仅在 $0\leqslant\Omega\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 范围内取值，而且意味着 $\Omega=\pm\pi$（或 π 的奇数倍）是序列在频率域最高频率；$\Omega=0$ 及 2π（或 π 的偶数倍）是序列在频率域的最低频率。

1.2.2 基本的常见特殊信号

(1) 单位阶跃信号

1) 连续时间单位阶跃信号

连续时间单位阶跃信号表示为 $u(t)$，其定义为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1.13}$$

其波形如图 1.4 所示，即

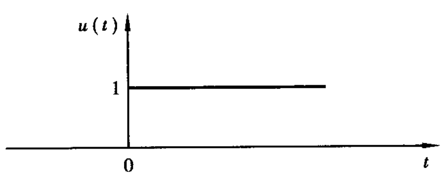


图 1.4 连续时间单位阶跃信号

对于 $u(t)$ 该信号在 $t=0$ 处发生跃变，数值 1 为阶跃的幅度，若阶跃幅度为 A，则可记为 $Au(t)$。若单位阶跃信号跃变点在 $t=t_0$ 处，则称为延迟单位阶跃信号，它可表示为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geqslant t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

物理可实现的单边信号，因为信号满足条件：$t<0$ 时，$f(t)=0$，故任何一个因信号都可表达为 $f(t)u(t)$；因为反因信号满足条件：$t\geqslant0$ 时，$f(t)=0$，故任何一个反因信号都可表达为 $f(t)u(-t)$。

例如 $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at}, & t\geqslant0\\ \mathrm{e}^{3at}, & t\leqslant0\end{cases}=\mathrm{e}^{-at}u(t)+\mathrm{e}^{3at}u(-t)$

其波形如图 1.5 所示，即

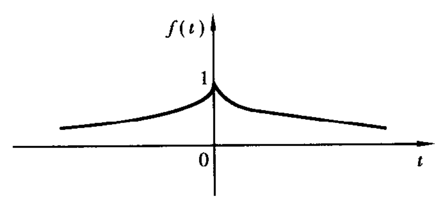


图 1.5 连续时间因信号和反因信号

2) 离散时间单位阶跃序列

离散时间单位阶跃序列表示为 $u(n)$，其定义为

$$u[n]=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1.14}$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 与连续信号 $u(t)$ 的形状相似，但 $u(t)$ 在 $t=0$ 发生跃变，而 $u[n]$ 在 $n=0$ 处的值明确定义为1。其波形如图1.6所示。

对于单位阶跃序列 $u(n)$，且有

$$u[n-k]=\begin{cases}1, & n\geqslant k\\ 0, & n<k\end{cases}$$

$$f[n]u[n-k]=\begin{cases}f[n], & n\geqslant k\\ 0, & n<k\end{cases}$$

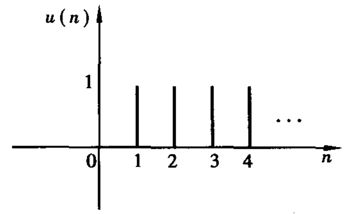


图1.6　离散时间单位阶跃序列

(2)单位冲激信号

1)连续时间单位冲激信号

与单位阶跃信号一样重要的基本的信号，是单位冲激信号，连续时间单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示。连续时间单位冲激信号 $\delta(t)$ 是1930年英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)首先提出，故又称狄拉克函数或 δ 函数，它不能用普通的函数来定义，其工程定义是

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1 \tag{1.15}$$

上述定义表明，$\delta(t)$ 是在 $t=0$ 瞬间出现又立即消失的信号，且幅值为无限大；在 $t\neq 0$ 处，它始终为零，并且具有单位面积(常称为 $\delta(t)$ 的强度)。单位冲激信号波形难以用普通方式表达，通常用一个带有箭头的单位长度线表示，如图1.7所示。

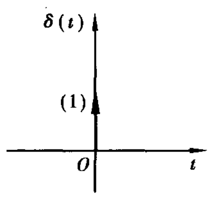


图1.7　连续时间单位冲激信号

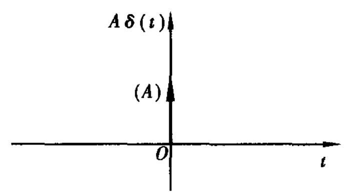


图1.8　连续时间冲激信号

若强度不为1，而为 A 的冲激信号记为 $A\delta(t)$，在用图形表示时，可将强度 A 标注在箭头旁，如图1.8所示。

延迟 t_0 出现的冲激信号可记为 $\delta(t-t_0)$，其波形如图1.9所示，它的定义为

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0\\ \infty, & t=t_0\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

直观地看，这一函数可以设想为一列窄脉冲的极限。图1.10是一矩形脉冲 $p_\tau(t)$，宽度为 τ，高度为 $1/\tau$，其面积为1，若此脉冲宽度继续缩小至极限情况，即当 $\tau\to 0$，$1/\tau\to\infty$，这时高度无限增大，但面积始终保持为1。故单位冲激信号也可表达为

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}p_\tau(t)$$

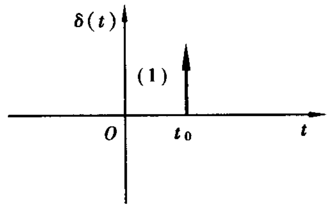


图 1.9　延迟连续时间单位冲激信号

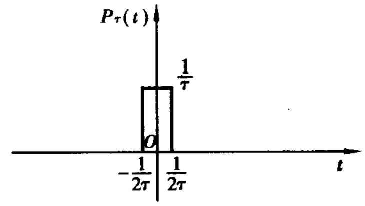


图 1.10　连续时间信号矩形脉冲 $p_\tau(t)$

单位冲激信号具有下列一些重要性质：

①$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

②$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$

③$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

④$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

⑤$\delta(t) = \delta(-t)\quad \delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$

⑥$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$

⑦$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t = -f'(0)$

⑧$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$

【例 1.2】　画出下例信号的波形

(1)$f(t) = \delta(t^2-4)$

(2)$f(t) = \delta(\sin \pi t)$

解　对于(1)　$f(t) = \delta(t^2-4)$

令 $t^2-4=0$，求出 $t=2$ 和 $t=-2$，故

$f(t) = \delta(t^2-4) = \delta(t+2)+\delta(t-2)$

其波形如图 1.11 所示，即

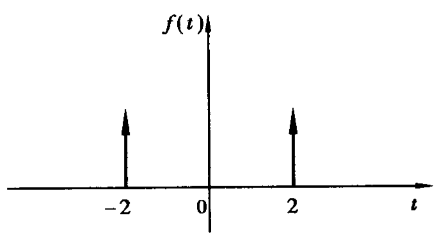


图 1.11　例 1.2(1)题图

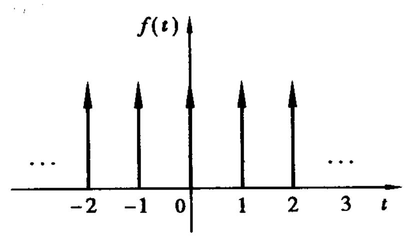


图 1.12　例 1.2(2)题图

对于(2)　$f(t) = \delta(\sin \pi t)$

令 $\sin \pi t = 0$，求出 $t = \pm 0,1,2,3,\cdots$，故

$$f(t) = \delta(\sin \pi t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t+i)$$

其波形如图 1.12 所示,即

【例 1.3】 计算下列奇异函数的积分

$$(1)y(t) = \int_{-4}^{4} (t^2 + 3t + 2)(\delta(t) + 2\delta(t-2))\mathrm{d}t$$

$$(2)y(t) = \int_{-4}^{4} (t^2 + 3t + 2)(\delta(t) + 2\delta(t-2) + 2\delta(t+5))\mathrm{d}t$$

解

$$(1)y(t) = \int_{-4}^{4} (t^2 + 3t + 2)(\delta(t) + 2\delta(t-2))\mathrm{d}t$$

$$y(t) = (t^2 + 3t + 2)\Big|_{t=0} + 2(t^2 + 3t + 2)\Big|_{t=2} = 26$$

$$(2)y(t) = \int_{-4}^{4} (t^2 + 3t + 2)(\delta(t) + 2\delta(t-2) + 2\delta(t+5))\mathrm{d}t$$

$$y(t) = (t^2 + 3t + 2)\Big|_{t=0} + 2(t^2 + 3t + 2)\Big|_{t=2} + 0 = 26$$

2)离散时间单位冲激序列

离散时间单位序列 $\delta[n]$(又称单位函数)其定义式为

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

且有

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \quad k>0$$

$$\delta[n+k] = \begin{cases} 1, & n=-k \\ 0, & n \neq -k \end{cases}, \quad k>0$$

其波形如图 1.13 所示,该信号也称为单位脉冲序列或单位样本序列。值得注意的是单位序列 $\delta[n]$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 有本质的不同,$\delta[n]$ 在 $n=0$ 处有确定幅度值为 1,而不像 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时的幅度值为∞ 。

3)单位冲激和单位阶跃之间的关系

首先看一下连续时间中 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 的关系,由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0^-} \delta(t)\mathrm{d}t + \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t + \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

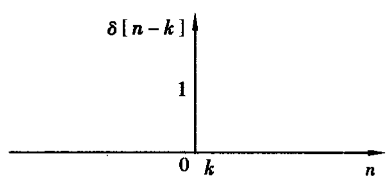


图 1.13　离散时间单位冲激序列

故有

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

根据单位阶跃信号 $u(t)$ 的定义,可得

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}t \tag{1.17}$$