模糊数学及其应用

梁保松　曹殿立　主编

科学出版社
www.sciencep.com

模糊数学及其应用

梁保松　曹殿立　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了模糊数学方法及其应用，共分 7 章. 主要内容有模糊子集、模糊关系与模糊矩阵、模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊决策、模糊关系方程等及其在工程技术、经济管理等方面的应用.

本书结构严谨，逻辑清晰，通俗易学，应用实例多. 可作为本科高年级学生及农科、工科硕士研究生的教材，也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的参考书和实用工具书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学及其应用 / 梁保松，曹殿立主编. —北京：科学出版社，2007. 12
ISBN 978-7-03-020791-3

Ⅰ. 模… Ⅱ. ①梁…②曹… Ⅲ. 模糊数学-高等学校-研究 Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 203427 号

责任编辑：姚莉丽 李晓鹏 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 12 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2007 年 12 月第一次印刷 印张：12
印数：1—4 000 字数：220 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<新欣>)

前　言

在生产实践和日常生活中，人们遇到的需要解决的实际问题大体可以分为两类：确定性问题与不确定性问题. 例如，导线内的电流与电压之间，气体体积、压强、温度之间存在着确定性关系，属于确定性问题. 解决确定性问题可用经典数学（代数、微分方程等）方法进行分析研究. 但对于某些确定对象的长度、面积、体积的测量误差的估计；由多种元件组成的系统寿命的预测；胖与瘦、美与丑、高与低、好与坏、阴与晴等的划分都未必有某种完全确定性，这些属于不确定性问题. 解决不确定性问题用经典数学方法一般难以取得满意的结果.

不确定性问题可以分为两类：随机不确定性问题与模糊不确定性问题. 随机不确定性是指事物的发生摆脱了“一因一果”的确定性，反映出了事物“一因多果”的随机性. 例如，观测误差主要与观测手段（如观测仪器先进与否）、观测环境（如气温、湿度、海拔高度等）等因素有关；多元件组成系统的寿命与各元件的制作材料、工艺、操作技术、组合方式等诸多因素有关，且这些因素很难一一枚举，更难定量地说明各自对结果造成了多大影响，从而在因果律上存在破缺，属随机不确定性一类. 模糊不确定性是指事物本身所固有的不精确状况，摆脱了非此即彼的精确性，反映了事物之间由于差异的中间过渡性所引起的划分上的不确定，而导致了概念的外延不分明性，也就是“亦此亦彼”的模糊性. 例如，对某种服装，若式样新颖、质地优良、价格低廉，就被列入好的一类；若式样陈旧、质地低劣、价格昂贵，则被列入差的一类. 然而，人们也常对某种服装作出较好或较差的评价，这说明好与差之间还存在较好、较差等中间状态，又如，人们常听医生对某个病人的病情作出诸如“重感冒”、“较重感冒”、“较轻感冒”、“轻感冒”等结论，这说明重、轻感冒之间，也有较重、较轻等中间状态. 即在排中律上存在破缺，属模糊不确定性一类.

研究随机不确定性问题的主要数学工具是概率论与数理统计. 研究模糊不确定性问题的工具是由美国控制论专家 L. A. Zadeh 创立的模糊数学. 1965 年 L. A. Zadeh 发表了开创性论文“模糊集合”（Fuzzy Sets，Information Control），标志着模糊数学的诞生. 40 年来，模糊数学获得了蓬勃发展，其触角遍及自然科学、社会科学、横断交叉学科. 在数学理论（如拓扑学、逻辑学、测度论等）、应用方法（如控制论、聚类分析、模式识别、综合评估等）、实际应用（如中长期气象预报、成矿预测、良种选择、故障诊断等）、人文系统（如经济系统、政治系统、决策系统、教育系统）诸多方面都取得了很多有价值的成果. 国内创办了《模糊系统与数学》杂志，国际上创办了 Fuzzy sets and systems 杂志，模糊数学正在向各个领域渗透.

国内模糊数学的研究始于20世纪70年代,作者于20世纪80年代开始接触模糊数学,并于1984年编写了《模糊数学讲义》,在校内作为教材使用.本书是在原讲义的基础上修改和补充后编写而成的,书中大部分内容是作者长期教学和科学研究成果的汇编,同时吸收了国内外有关著作、杂志和会议论文集上发表的论文及应用实例.

本书概念清楚,文字通俗,深入浅出,注重模糊概念与定理的直观描述,以加深读者对模糊概念的理解;并且特别关注模糊数学方法及其应用,每一章都以一定的篇幅安排模糊数学方法应用的内容,以培养学生应用模糊数学解决实际问题的能力.本书可作为农科、工科硕士研究生及本科高年级学生的教材,也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的参考书和实用工具书.

本书由梁保松、曹殿立同志任主编,叶耀军、陈振、王丽娟同志任副主编.参加编写的有梁保松、曹殿立、叶耀军、陈振、王丽娟、胡丽萍、王建平、郝建丽、王亚伟、白洪远、侯贤敏.

本书引用了诸多文献资料,同时还引用了一些同志的研究成果,在此谨向作者们表示衷心感谢.

由于水平所限,疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2007年11月

目　　录

第 1 章　普通集合与普通关系

19 世纪末，Cantor 首创集合论，并迅速渗透到各个数学分支，成为数学的基础. 1965 年美国控制论专家 L. A. Zadeh 发表了开创性论文“模糊集合”(Fuzzy Sets，Information and Control)，对 Cantor 集合理论作了有益的推广，从而建立了模糊集合论，且在很多领域取得了卓有成效的应用. 本章介绍模糊集合理论的预备知识，为了区别于模糊集合，本章所讨论的集合与关系称为普通集合与普通关系.

1.1　普通集合的概念与运算

1.1.1　集合的概念

Cantor 对“集合”作了如下描述：“把一定的并且彼此可以明确识别的东西——可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起叫做集合.”组成集合的每一个对象，称为该集合的元素.

考虑一个确定的集合，使其在过程中所涉及的一切集合都是这个集合的元素，这样的集合叫做论域或空间，常用大写字母 U、X 等表示. 如考虑的是部分正整数的集合，则论域就可以取全体自然数组成的集合：$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$. 如研究的是 xOy 平面上的点集 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数，$y=\Phi(x)\}$，则由 xOy 平面上一切点组成的集合

$$U=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$$

就可以作为论域，这时恒有 $A\subseteq U$.

论域 U 中的任一元素 x，对于某一确定的集合 A，要么 $x\in A$，要么 $x\notin A$，二者必居其一且仅居其一，这是普通集合论的基本要求.

Cantor 集合论是以形式逻辑的同一律、矛盾律和排中律为基础的，“任何事物要么具有性质 p，要么不具有性质 p，非此即彼”. Cantor 集合论提供了数学研究的普遍工具，每一个数学概念都反映了具有特殊性质的对象的集合；每一个判断都反映了集合之间的某种关系；每一步数学推理都反映了集合之间的某种运算.

集合可以表述概念，一个概念有它的内涵和外延. 符合某概念的对象的全体构成此概念的外延；一个概念所包含的那些区别于其他概念的全体本质属性就是这一概念的内涵. 比如“人”这个概念的外延就是世界上所有人的全体；而内涵就是区别于其他动物的那些本质属性的全体，如“会思维”、“能制造和使用工具进行劳动”

等. 用集合论的观点来看,一个概念的外延就是一个集合.

1.1.2 集合的关系与运算

集合间的关系有:

包含　$A\subseteq B$: $\forall x\in A$ 都有 $x\in B$,并称 A 为 B 的子集. 若 $A\subseteq B$,但 $A\neq B$,称 A 为 B 的真子集,记为 $A\subset B$(其中"$\forall$"表示"任意",后同).

相等　$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$(其中"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要",后同).

集合和元素是两个不同的概念. 如将论域 U 中的每一个子集(包括空集)都看作新的元素,则由 U 中的全部子集组成新的集合,即集合的集合(集合类),称为 U 的**幂集**,记为 $P(U)$. 例如,$U=\{1,2,3\}$,则

$$P(U)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

集合间的运算有:

并运算　$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

交运算　$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$,也记为 AB. 一般地,设 $A_t(t\in T)$是 U 的子集,所有 A_t 的并集为

$$\bigcup A_t=\{x\mid \exists t\in T, x\in A_t, x\in U\};$$

而所有 A_t 的交集为

$$\bigcap A_t=\{x\mid \forall t\in T, x\in A_t, x\in U\}.$$

其中,T 是集 A_t 的所有下标组成的集,称为指标集("$\exists$"表示"存在",后同).

差运算　$A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$.

余运算　$A^c=\{x\mid x\notin A, x\in U\}$.

集合的运算满足如下运算规律:

幂等律　$A\cup A=A$,　$A\cap A=A$.

交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

吸收律　$(A\cap B)\cup B=B$,　$(A\cup B)\cap B=B$.

两极律　$A\cup U=U$,　$A\cap U=A$,　$A\cup\varnothing=A$,　$A\cap\varnothing=\varnothing$.

还原律　$(A^c)^c=A$.

互补律　$A\cup A^c=U$,　$A\cap A^c=\varnothing$.

De-Morgan 律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

一般地,设 $A_t\in P(U)$, $t\in T$,则

$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^c=\bigcap_{t\in T}A_t^c;$$

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c.$$

1.1.3 映射与扩张

1. 映射

定义 1-1 设 X 与 Y 都是集合,若存在对应关系 f,使 $\forall x\in X$,都有唯一的 $y\in Y$与之对应,则称 f 是映 X 入 Y 的映射,记为

$$f: X \to Y, \quad x \mapsto y = f(x),$$

读作 f 映 X 入 Y(映入). y 称为 x 在映射 f 下的像,x 称为原像.

$f: X\to Y$,且对任意 $x_1, x_2\in X$,当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为单射,也称 f 为一一的.

$f: X\to Y$,且对任意 $y\in Y$,都有 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$,则称 f 为满射,也称 f 映 X 到 Y 上(映上).

定义 1-2 设有三个非空集合 U、V、W,映射 $f: U\to V$,映射 $g: V\to W$,由 f、g 确定的 U 到 W 的映射 $h: U\to W$,称为映射 f、g 的合成映射,记为 $h=g\circ f$(图 1-1).

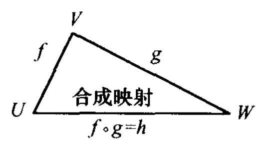

图 1-1

而 $h(x)=g(f(x))$, $\forall x\in U$.

可以验证合成映射满足结合律:

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f.$$

若 $f: X\to Y$ 是一一的满射,称 f 为双射,双射也称为一一对应.

若 $f: X\to Y$,令 $f(X)=\{y \mid \exists x\in X, 使得 y=f(x)\}$,则称 $f(X)$是 f 的值域.

显然,若 $f: X\to Y$,且 $f(X)=Y$,则 f 是满射,若 f 还是一一的,则 f 是双射.

例 1-1 设 $f:[0,1]\to[0,2]$,且 $f(x)=x^2$,则 f 是一一的,但不是映上而是映入;设 $f:[-1,1]\to[0,1]$,且 $f(x)=x^2$,则 f 是映上的,但不是一一的;设 $f:[0,1]\to[0,1]$,且 $f(x)=x^2$,则 f 是一一的满射(双射).

2. 集合的特征函数

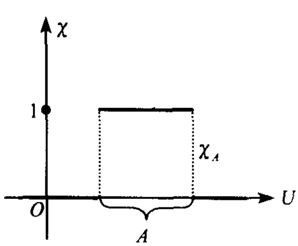

图 1-2

定义 1-3 设 A 是论域 U 中的一个子集,称映射

$$\chi_A: U \to \{0,1\},$$

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & 当\ u\in A; \\ 0, & 当\ u\notin A \end{cases}$$

为集合 A 的特征函数(图 1-2).

例如,设 U 为自然数集,$A=\{1,2,3\}$,则 A 的特征函数为

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } u=1,2,3 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } u \text{ 为其他自然数时.}\end{cases}$$

因此，只要给出论域U的一个子集A，就唯一地确定一个A的特征函数. 反过来，给定一个从U到$\{0,1\}$的映射(也称U中的一个特征函数)χ，也就唯一地确定一个U的子集A.

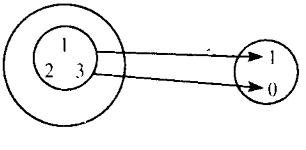

图 1-3

例如，设U是全体自然数组成的集合，按图 1-3 作一个从U到$\{0,1\}$的映射χ.

这里取以 1 为像的所有U中元素作成子集A，显见，$A=\{1,2,3\}$，此时$\chi_A=\chi$.

所以，只要给出论域U中的一个特征函数就等于给定了一个U的子集，它由U中以 1 为像的一切元素所组成. 这样，U的子集和它的特征函数之间建立了一一对应关系. 从这种意义上说“子集就是特征函数”.

引入特征函数的好处是可以把集合转化为函数，特征函数与集合间有如下关系：

(1) $A=U\Leftrightarrow\chi_A(u)\equiv1$，　$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(u)\equiv0$，$\forall u\in U$；

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A(u)\leqslant\chi_B(u)$，$\forall u\in U$；

(3) $A=B\Leftrightarrow\chi_A(u)=\chi_B(u)$，$\forall u\in U$；

(4) $\chi_{A\cup B}(u)=\chi_A(u)\vee\chi_B(u)$，$\forall u\in U$；

(5) $\chi_{A\cap B}(u)=\chi_A(u)\wedge\chi_B(u)$，$\forall u\in U$；

(6) $\chi_{A^c}(u)=1-\chi_A(u)$，$\forall u\in U$.

这里$\vee$、$\wedge$分别表示 sup 及 inf(取上、下确界)，在有限个成员之间，它们表示 max 及 min(取最大、最小值). 与图 1-2 相对照的图形见图 1-4.

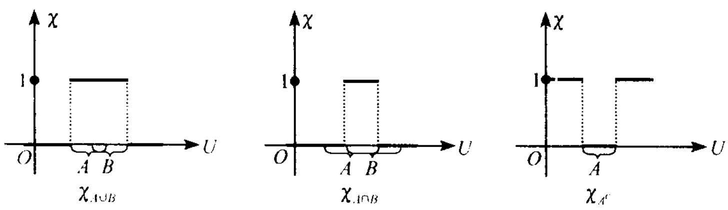

图 1-4

例 1-2　$A=[2,8]$，$B=[3,5]$，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}\qquad \chi_B(x)=\begin{cases}1, & x\in[3,5],\\ 0, & x\notin[3,5],\end{cases}$$

则

$$\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}$$

而 $A\cup B=[2,8]$，$\chi_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}$ 可见

$$\chi_{A\cup B}(x)=\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}.$$

为了便于引入模糊集 A，也称 A 的特征函数 χ_A 为 A 的隶属函数，χ_A 在 u 上的值叫做 u 对 A 的隶属度. 当 $u\in A$ 时，u 的隶属度 $\chi_A(u)=1$，表示 u 绝对隶属于 A；当 $u\notin A$ 时，u 的隶属度 $\chi_A(u)=0$，表示 u 绝对不隶属于 A.

3. 映射的扩张

定义 1-4 设 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)$，则称映射 $f:X\to P(Y), x\mapsto f(x)=B\in P(Y)$ 为从 X 到 Y 的点集映射(图 1-5).

定义 1-5 设 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)$，则称映射 $T:P(X)\to P(Y), A\mapsto T(A)$ 为从 X 到 Y 的集合变换(图 1-5).

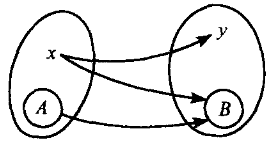

图 1-5

例 1-3 设 $X=\{a,b\}$，$Y=\{c,d,e\}$，则

$$P(X)=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\}\},$$
$$P(Y)=\{\varnothing,Y,\{c\},\{d\},\{e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}\}.$$

令 $f:a\mapsto\{c\}, b\mapsto\{d,e\}$；

$$T:\varnothing\mapsto\varnothing,\{a\}\mapsto\{c,d\},\{b\}\mapsto\{c\},X\mapsto Y.$$

则 f 是从 X 到 Y 的点集映射，而 T 是从 X 到 Y 的集合变换.

定义 1-6(经典扩张原理) 设映射 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)=y$，$\forall A\in P(X)$，令 $f(A)=\{y\in Y\mid y=f(x),x\in A\}$，则集合 $f(A)\in P(Y)$ 称为集 A 在 f 下的像；$\forall B\in P(Y)$，令 $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$，则集合 $f^{-1}(B)\in P(X)$ 称为集 B 在 f 下的原像. 于是，映射 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)=y$ 诱导出映射

$$f:P(X)\to P(Y),\quad A\mapsto f(A)\in P(Y);$$
$$f^{-1}:P(Y)\to P(X),\quad B\mapsto f^{-1}(B)\in P(X).$$

其特征函数分别为

$$\chi_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\chi_A(x),\quad \chi_{f^{-1}(B)}(x)=\chi_B(f(x)).$$

这就是扩张原理，它实际上是一个定义.

例 1-4 设 $X=\{1,2\}$，$Y=\{1,3,4\}$，映射 $f:X\to Y$ 定义为 $f(x)=x^2$，则

$$P(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},X\},$$
$$P(Y)=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},Y\}.$$

在映射 f 下的扩张原理为

$$f:P(X)\to P(Y),$$
$$A\mapsto f(A)=\{y\mid y=f(x)=x^2,x\in A\}.$$

例如，$\{x\}\mapsto f(\{x\})=\{y\mid y=f(x)=x^2, x\in\{x\}\}=\{f(x)\}=\{x^2\}$，

$f(\varnothing)=\varnothing$， $f(\{1\})=\{f(1)\}=\{1\}$，

$f(\{2\})=\{f(2)\}=\{4\}$， $f(X)=\{f(1),f(2)\}=\{1,4\}\in P(Y)$.

$f^{-1}: P(Y)\to P(X)$，

$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$， $f^{-1}(\{1\})=\{f^{-1}(1)\}=\{1\}$，

$f^{-1}(\{4\})=\{f^{-1}(4)\}=\{2\}$， $f^{-1}(\{1,4\})=\{1,2\}=X$，

但 $f^{-1}(\{3\}),f^{-1}(\{3,4\}),f^{-1}(\{1,3\}),f^{-1}(Y)$在 f 下没有原像，因此当 $B=\{3\}$，$\{1,3\},\{3,4\},Y$ 时，f^{-1}均不是 B 到 $f^{-1}(B)$的映射.

1.2 普通关系

1.2.1 直积(Descartes 乘积)

定义 1-7 设 U、V 是两个集合，称 $U\times V=\{(u,v)\mid u\in U, v\in V\}$为 U 和 V 的直积或笛卡儿(Descartes)乘积.

直积 $U\times V$ 是一个新的集合，其元素由 U 中的元素与 V 中的元素无约束的任意搭配起来的序偶(x,y)(或序对)构成.

例 1-5 设 $U=\{1,2,3,4\}$，$V=\{5,6\}$，

$$U\times V=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\},$$

$$V\times U=\{(5,1),(5,2)(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)\}.$$

显然 $U\times V\neq V\times U$，可见序偶和顺序是有关的. 当 $U=V$ 时，$U\times U=U^2$，称为 U 上的直积. 直积的定义可推广到多个集合上去：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\triangleq\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

例如，设 $\mathbf{R}$ 为实数集，则

$$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid -\infty<x,y,z<+\infty\},$$

又称为三维 Eucild 空间.

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid -\infty<x_i<+\infty, i=1,2,\cdots,n\},$$

又称为 n 维 Euclid 空间.

1.2.2 二元关系

直积是两集合元素之间的无约束搭配，若给搭配以约束，便形成了一种特殊关系. 关系的内容包含于搭配的限制之中，接受约束的序对形成直积的一个子集，这个子集便表现了所说的关系.

例 1-6 U、V 均为男子的集合，则 $U\times V=\{(u,v)\mid u\in U, v\in V\}$为任意两个男子组成的序对集合.

现对这种搭配加以限制，如限制“父子”才能搭配. 它体现了“男子”与“男子”之间的一种特殊关系，并非任何两个男子都具有“父子”关系，只有父亲和儿子才能成为“父子”，因此，“父子”关系是 $U\times V$ 的一个子集，即

$$R=\{(u,v)\mid u\in U,v\in V,u\text{ 是 }v\text{ 的父亲}\},\quad R\subseteq U\times V.$$

关系是一个集合，它是直积的一个子集.

定义 1-8 设 U、V 是两个非空集合，$U\times V$ 的子集 R 称为 U 到 V 的二元关系，记为

$$U\xrightarrow{R}V.$$

当 $(u,v)\in R$ 时，称 u 与 v 有关系 R，记为 uRv；当 $(u,v)\notin R$ 时，称 u 与 v 没有关系 R，记为 $u\bar{R}v$. 特别当 $U=V$ 时，称 $U\times V$ 的子集 R 为 U 上的二元关系. 以后把二元关系简称为关系.

二元关系可推广到 n 元关系，一般地，$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}$ 的子集 R 称为 A 上的 n 元关系. 二元关系的许多结论可推广到多元关系中.

例 1-7 设 $U=V=\mathbf{R}$（实数集），则

$$S=\{(u,v)\mid u=e^v-3,u\in U,v\in V\}$$

是 U 到 V 的一个关系. 对任意 $(u,v)\in U\times V$，当 $u=e^v-3$ 时，$(u,v)\in S$，此时 u 与 v 有关系 S；当 $u\neq e^v-3$ 时，$(u,v)\notin S$，此时 u 与 v 没有关系 S.

例 1-8 设 $X=\{1,4,7,8\}$，$Y=\{2,3,6\}$，

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\},$$

则 R 是 X 到 Y 的“小于”关系.

例 1-9 设 $U=R$，

$$R_1=\{(u,v)\mid (u,v)\in R\times R,u=v\}$$

是 R 上元素间的“相等”关系；

$$R_2=\{(u,v)\mid (u,v)\in R\times R,u\geqslant v\}$$

是 R 上元素间的“大于或等于”关系.

关系 R 是 $U\times V$ 的子集，即 $R\subseteq U\times V$. 对任意 $(u,v)\in U\times V$，u 与 v 有关系 R 或 u 与 v 没有关系 R，二者必居其一，且仅居其一. 因此关系 R 也可用特征函数表示：

$$\chi_R(u,v)=\begin{cases}1, & (u,v)\in R;\\ 0, & (u,v)\notin R.\end{cases}$$

于是关系 R 可以看作是从 $U\times V$ 到 $\{0,1\}$ 上的一个映射.

1.2.3 关系的矩阵表示

关系除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为

方便.

定义 1-9 设两个有限集 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，R 是从 X 到 Y 的二元关系，即

R	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

其中，$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ x_iRy_j;\\ 0, & 当\ x_i\bar{R}y_j.\end{cases}$ 记

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{mn}$ 为关系 $\boldsymbol{R}$ 的关系矩阵.

由定义可知，关系矩阵中的元素或是 0 或是 1. 在数学上把元素只是 0 或 1 的矩阵称为 Boole 矩阵，因此，任何关系矩阵都是 Boole 矩阵.

例 1-10 例 1-8 中"$<$"关系的关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1.2.4 关系的合成

定义 1-10 设 R_1 是 X 到 Y 的关系，R_2 是 Y 到 Z 的关系，R 是 X 到 Z 的关系. 若 $(x,z)\in R\Leftrightarrow$ 存在 $y\in Y$，使得 $(x,y)\in R_1$，且 $(y,z)\in R_2$，则称关系 R 是关系 R_1 与关系 R_2 的合成，记为 $R=R_1\circ R_2$. 即

$$R=R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid \exists y\in Y,使(x,y)\in R_1,(y,z)\in R_2\}.$$

$R_1\circ R_2$ 的特征函数为

$$\chi_{R_1\circ R_2}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(\chi_{R_1}(x,y)\wedge(\chi_{R_2}(y,z)).$$

如果 $X=Y=Z=U$，称 $R=R_1\circ R_2$ 是 U 上的两个关系的合成.

例 1-11 设人群为论域 U，"姐妹"和"母女"分别是 U 上的两个关系 R_1 和 R_2，"姨侄女"R 也是 U 上的关系，则 $R=R_1\circ R_2$. 因为在 R、R_1、R_2 之间存在这样的

联系：

x 是 z 的姨侄女⇔至少存在一个 $y\in U$，使 y 是 z 的姐妹又是 x 的母亲.

例 1-12 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{2,3,4\}$，$Z=\{1,2,3\}$，R_1 是从 X 到 Y 的关系，$R_1=\{(x,y)\mid x+y=6\}=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}$；$R_2$ 是从 Y 到 Z 的关系，$R_2=\{(y,z)\mid y-z=1\}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$，则 R_1 与 R_2 的合成

$$R_1\circ R_2=\{(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

关系的合成也可以用矩阵来表示.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}$，从 X 到 Y 的关系 R_1 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1=(r_{ij})_{m\times n}$，从 Y 到 Z 的关系 R_2 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2=(p_{kj})_{n\times s}$，则 X 到 Z 的关系 $R=R_1\circ R_2$ 的关系矩阵

$$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2=(c_{ij})_{m\times s},$$

其中，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}(r_{ik}\cdot p_{kj}),i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s.$

1.2.5 等价关系与划分

等价关系是二元关系中的一个重要关系，也是将一个集合元素分类的重要依据.

定义 1-11 设 R 是 U 上的一个关系.

(1) 若 $\forall u\in U$，都有 $\chi_R(u,u)=1$，则称 R 具有自反性. 自反关系 R 的矩阵的主对角线上的元素均为 $1(r_{ii}=1)$.

(2) $\forall u,v\in U$，若 $\chi_R(u,v)=1$，恒有 $\chi_R(v,u)=1$，则称 R 具有对称性. 对称关系矩阵必为对称矩阵$(r_{ij}=r_{ji})$.

(3) $\forall u,v,w\in U$，若 $\chi_R(u,v)=1$，$\chi_R(v,w)=1$，恒有 $\chi_R(u,w)=1$，则称 R 具有传递性.

例 1-13 在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系

$$R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$$

是自反的，但非对称.

例 1-14 自然数集 **N** 上的相等关系"$=$"是对称的；关系"$\leqslant$"、"$<$"均是非对称的.

例 1-15 实数集上的关系"$=$"为自反、对称、传递的；关系"$\leqslant$"为自反、传递的，但非对称的；关系"$<$"是传递的，非自反、非对称的.

例 1-16 任意非空集 A 的幂集 $P(A)$ 上的包含关系"$\subseteq$"为自反的、非对称的、传递的.

定义 1-12 U 上的一个关系 R 叫做等价关系，指的是 R 具有自反性、对称性和传递性. 等价关系常用记号"$\sim$"代替.