

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主 编 杨国桢 副主编 程福臻

# 电磁学与电动力学

[下册]

胡友秋 程福臻 编著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

044/4

:2

2008

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主 编 杨国桢

副主编 程福臻

# 电磁学与电动力学

(下册)

胡友秋 程福臻 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是作者在多年教学经验的基础上,将电磁学与电动力学的内容适当贯通,既分阶段,又平滑过渡,由此避免不必要的重复,以利于缩短学时,便于学生掌握。全书分为上、下两册,本书为下册,主要为电动力学部分,以演绎法为主,从麦克斯韦方程出发,分析静态电磁场,电磁波的激发、辐射、传播,以及与介质相互作用时的反射、折射、散射、吸收,并介绍了电磁学与狭义相对论的关系,让学生理解和掌握狭义相对论。

本书可作为普通高等院校物理或应用物理专业本科生学习电动力学的教材,也可供相关专业的师生参考使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁学与电动力学.下册/胡友秋,程福臻编著. —北京:科学出版社,2008  
(中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书/杨国桢主编)  
ISBN 978-7-03-020512-4

I. 电… II. ①胡…②程… III. ①电磁学-高等学校-教材②电动力学-高等学校-教材 IV. O44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 009844 号

责任编辑:昌盛 吴伶伶 / 责任校对:李奕莹  
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

化学工业出版社印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008年1月第一次印刷 印张:17 1/4

印数:1—4 000 字数:319 000

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(化工))

## 从 书 序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.值此筹备校庆之际,由几位长年从事基础物理教学的老师建议,编著一套理科基础物理教程,向校庆五十周年献礼.这一建议在理学院很快达成了共识,并受到学校的高度重视和大力支持.随后,理学院立即组织了在理科基础物理教学方面有丰富教学经验的老师,组成了老、中、青相结合的班子,着手编著这套丛书,并以此进一步推动理科基础物理的教学改革与创新.

中国科学技术大学在老一辈物理学家、教育家吴有训先生、严济慈先生、钱临照先生、赵忠尧先生、施汝为先生的亲自带领和指导下,一贯重视基础物理教学,历经五十年如一日的坚持,现已形成良好的教学传统.特别是严济慈和钱临照两位先生在世时身体力行,多年讲授本科生的力学、理论力学、电磁学、电动力学等基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带领出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这套丛书的作者,应该说都直接或间接受到过两位先生的教诲.出版这套丛书也是表达作者对先生的深深感激和最好纪念.

这套丛书共九本:《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》、《光学》、《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》.每本约40万字,主要是为物理学相关专业本科生编写的,也可供工科专业物理教师参考.每本书的教学学时约为72学时.可以认为,这套丛书系列不仅是普通物理与理论物理横向关联、纵向自洽的基础物理教程,同时更加适合我校理科人才培养的教学安排,并充分考虑了与数学教学的相互配合.因此,在教材的设置上,《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》中,上册部分分别是普通物理内容,而下册部分为理论物理内容.还要指出的是,在《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》中,考虑到普通物理与理论物理内容的界限已不再那样泾渭分明,而比较直接地用现代的、实用的概念、物理图像和理论来阐述,这确实不失为是一种有意义的尝试.

这套丛书在编著过程中,不仅广泛吸取了校内老师的经验,采纳了学生的意见,而且还征求了中国科学院许多相关专家的意见和建议,体现了“所系结合”的特点.同时,还聘请了兄弟院校及校内有丰富教学经验的教授进行双重审稿,期望将其错误概率降至最低.

历经几年,在科学出版社大力支持下,这套丛书终于面世,愿她能在理科教学改革与创新中起到一点作用,成为引玉之砖,共同来促进物理学教学水平的提高及其优秀人才的培养,并望广大师生及有关专家们继续提出宝贵意见和建议,以便改进.最后,对方方面面为这套丛书编著与出版的完成所付出艰辛努力及其给予关心、帮助的同志表示深切感谢!

中国科学技术大学理学院院长

杨国桢 院士

2007年10月

## 前 言

20 世纪 50 年代末期,我们作为怀揣理想抱负和求知欲望的普通高中学生,有幸进入中国科学技术大学深造.从结束学业到工作至今,转眼已有 40 多年.在母校校庆五十周年即将来临之际,寻思良久,终于鼓起勇气将所学所教的电动力学的一些经验和体会汇编成书,献给母校,略表心意.

在母校就读期间,我们有幸聆听了严济慈先生先后两个学期有关电磁学和电动力学的授课,同时为他的渊博学识和献身教育事业的精神深深打动.先生生动、精湛的讲授使我们受益终生.

迄今国内外已经出版的《电动力学》教材不少,各有千秋,使我们受益匪浅.在编写过程中,我们参考一些教材,加上多年教学经验和体会的积累,结合中国科学技术大学学生的特点,希望能在以下几个方面略具特色:

- (1) 基本概念、基本物理图像、基本定律的阐述尽力做到严谨;
- (2) 在第 1 章单辟一节,介绍场论和张量分析的基本概念和运算技巧,以提前做好必要的数学准备;
- (3) 适当多举例题,帮助学生掌握及应用所学内容;
- (4) 内容简练(如静场理论中限于分析二维问题),尽量避免开设新的窗口,既保证按规定学时完成课程的基本教学任务,又给老师和学生留出一定的发挥空间;
- (5) 将狭义相对论放到最后一章,强调电动力学自成体系,狭义相对论则作为其自然延伸和发展;
- (6) 加强与前导课程的联系,除了与力学、电磁学和理论力学适当挂钩之外,还增添了静电场热力学和静磁场热力学的内容.

如前所述,本书没有开设新的窗口述及电磁理论的近代发展和应用.在这一方面,国内外许多教材做了有益尝试.我们在本书末尾列有参考文献,供教师和学生查考.电磁理论新的应用层出不穷,我们相信教师会根据需要自行加以跟踪和选择,适当融入教学过程中,以弥补本书内容之局限.

本书内容按 72 学时取材.考虑到许多高校将电动力学课程的总学时限制在 54 以内,我们在本书目录部分用 \* 号标出可略去不讲或视需要部分讲授的内容.此外,对疑难习题冠以 \* 号;在习题部分的末尾,按各节列出教学进度和作业布置,

供使用本教材的教师参考.

最后,我们感谢中国科学技术大学电动力学教学组的全体同仁,他们的热情鼓励和反复研讨使得本书的质量不断提升.我们要特别感谢北京大学俞允强教授和中国科学技术大学陈银华教授,他们欣然接受并仔细审阅书稿,提出了许多宝贵意见和建议,给本书增色不少.

由于作者的知识和水平有限,错误和疏漏之处在所难免,期盼读者批评指正.

胡友秋 程福臻

2007年9月于合肥

# 目 录

丛书序

前言

第 1 章 电磁现象的基本规律	1
1.1 场论和张量分析	1
1.1.1 线性正交坐标变换	1
1.1.2 张量的定义	4
1.1.3 由矢量和张量构成的不变量(标量)	5
1.1.4 三维张量的乘法运算	7
1.1.5 三维张量微分	8
1.1.6 正交曲线坐标系	10
1.1.7 高斯公式、斯托克斯公式和格林公式	12
1.1.8 $\delta$ 函数	14
1.2 电磁场的数学描述	15
1.2.1 麦克斯韦方程组	15
1.2.2 关于场源	16
1.2.3 电磁性能方程	17
1.2.4 导体中的自由电荷和传导电流	19
1.3 边值关系	20
1.3.1 麦克斯韦方程的积分形式	20
1.3.2 边值关系	21
1.3.3 边值关系和边界条件	22
1.4 电磁场的能量、动量和角动量	23
1.4.1 电磁场对带电体的力和功率	23
1.4.2 电磁场的能量及能量守恒定理	23
1.4.3 电磁场的动量及动量守恒定理	25
1.4.4 电磁场的角动量及角动量守恒定理	27
1.4.5 电磁场-介质系统的能量、动量和角动量分析	28
1.4.6 线性各向同性介质界面上的能量、动量守恒关系	31



* 1.4.7 电磁场热力学方程 .....	33
1.5 麦克斯韦方程组的完备性 .....	34
1.5.1 完备性的含义 .....	34
1.5.2 电磁场解的唯一性定理 .....	34
1.5.3 几点说明 .....	35
<b>第2章 静电场</b> .....	<b>37</b>
2.1 基本方程和唯一性定理 .....	37
2.1.1 基本方程 .....	37
2.1.2 静电势及其微分方程 .....	37
2.1.3 边值关系 .....	38
2.1.4 定解条件 .....	38
2.1.5 静电场的唯一性定理 .....	39
2.2 分离变量法 .....	42
2.2.1 由泊松方程到拉普拉斯方程 .....	42
2.2.2 直角坐标下二维问题的分离变量解 .....	43
2.2.3 圆柱坐标下二维问题的分离变量解 .....	44
2.2.4 球坐标下二维问题的分离变量解 .....	45
* 2.3 格林函数法 .....	48
2.3.1 定解问题 .....	48
2.3.2 格林函数 .....	49
2.3.3 格林函数法 .....	50
2.3.4 格林函数及格林函数法应用举例 .....	51
2.4 多极子电场 .....	56
2.4.1 小带电体静电场的多极展开 .....	56
2.4.2 参考点选择的影响 .....	59
2.4.3 点电荷丛的多极矩 .....	60
2.4.4 四极矩及四极场电势计算举例 .....	60
* 2.4.5 电多极子在外电场中所受的力和力矩 .....	61
* 2.5 静电能 .....	63
2.5.1 静电能基本公式 .....	63
2.5.2 小带电体在外电场中的静电能 .....	66
2.5.3 静电场热力学 .....	68

<b>第 3 章 静磁场</b> .....	70
3.1 基本方程和唯一性定理 .....	70
3.1.1 基本方程 .....	70
3.1.2 磁矢势及其微分方程 .....	70
3.1.3 无限均匀线性各向同性磁介质中的磁矢势解 .....	71
3.1.4 边值关系 .....	72
3.1.5 边界条件和唯一性定理 .....	73
* 3.2 二维二分量问题 .....	73
3.2.1 二维二分量静磁场的定解问题 .....	74
3.2.2 二维二分量静磁场问题求解举例 .....	75
3.3 从磁矢势出发计算磁场 .....	76
3.3.1 圆环电流的磁场 .....	77
3.3.2 任意小载流导体在远处的磁场 .....	78
3.3.3 磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩 .....	80
3.4 磁标势法 .....	81
3.4.1 磁标势的引入、相关方程和边值关系 .....	81
3.4.2 磁标势法与静电场解法的对应关系 .....	82
3.4.3 磁标势法应用举例 .....	83
* 3.5 磁能 .....	87
3.5.1 磁能基本公式 .....	87
3.5.2 安培力做功与磁能变化 .....	88
3.5.3 小载流导体在外磁场中的磁能和势能 .....	90
3.5.4 静磁场热力学 .....	91
<b>第 4 章 电磁波的传播</b> .....	93
4.1 电磁场波动方程和时谐电磁场 .....	93
4.1.1 电磁场的波动方程 .....	93
4.1.2 时谐电磁场 .....	96
4.1.3 无限均匀、线性各向同性绝缘介质中的平面电磁波 .....	99
4.1.4 电磁波的偏振 .....	100
4.2 电磁波在绝缘介质界面上的反射和折射 .....	102
4.2.1 定解问题的提法 .....	102
4.2.2 定态波动方程和无散条件对反射波和折射波的约束 .....	103

4.2.3	边值关系对反射波和折射波频率和波矢的约束 .....	103
4.2.4	边值关系对反射波和折射波的振幅约束 .....	105
4.2.5	物理分析 .....	106
* 4.2.6	能量守恒和动量守恒关系 .....	108
4.3	导体中的电磁波 .....	111
4.3.1	基本方程和边值关系 .....	111
4.3.2	无限均匀导体中的平面电磁波 .....	111
4.3.3	电磁波在导体表面的反射与折射 .....	112
4.4	谐振腔和波导管 .....	116
4.4.1	基本方程和边界条件 .....	116
4.4.2	谐振腔 .....	117
4.4.3	波导管 .....	119
<b>第5章</b>	<b>电磁波的辐射</b> .....	<b>122</b>
5.1	电磁势及其方程 .....	122
5.1.1	电磁势的引入 .....	122
5.1.2	规范变换 .....	123
5.1.3	规范不变性和规范不变量 .....	123
5.1.4	电磁势满足的微分方程 .....	123
5.2	推迟势 .....	125
5.2.1	推迟势解 .....	125
5.2.2	洛伦茨条件的检验 .....	127
5.3	谐振荡电流的电磁场 .....	128
5.3.1	电荷和电流密度的傅里叶积分表示 .....	128
5.3.2	谐振荡场源的电磁场 .....	129
5.3.3	近区、远区和小场源近似 .....	130
5.3.4	辐射电磁场及其特性 .....	131
5.3.5	辐射功率及辐射功率角分布 .....	132
5.4	电偶极、磁偶极和电四极辐射 .....	133
5.4.1	电偶极辐射 .....	133
5.4.2	磁偶极辐射 .....	137
5.4.3	电四极辐射 .....	138
* 5.4.4	随时间任意变化的电流的辐射场 .....	142

5.5 天线的辐射 .....	144
5.5.1 沿天线的电流分布 .....	145
5.5.2 天线的辐射 .....	145
5.5.3 短天线的辐射 .....	146
5.5.4 半波天线的辐射 .....	147
<b>第6章 运动电荷的辐射</b> .....	<b>149</b>
6.1 李纳-维谢尔势 .....	149
6.1.1 数学准备 .....	149
6.1.2 李纳-维谢尔势 .....	151
6.1.3 物理分析 .....	152
6.2 运动电荷的电磁场 .....	153
6.2.1 李纳-维谢尔势与 $(r, t)$ 的函数关系剖析 .....	154
6.2.2 $\partial t^* / \partial t$ 和 $\nabla t^*$ .....	154
6.2.3 其他带 * 号量的时空偏导数 .....	155
6.2.4 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ .....	156
6.2.5 匀速运动电荷的电磁场 .....	157
6.2.6 切连科夫辐射 .....	158
6.3 运动电荷的辐射场和辐射功率 .....	160
6.3.1 运动电荷的辐射场 .....	160
6.3.2 运动电荷的辐射功率(瞬时值) .....	160
6.4 低速运动带电粒子的辐射 .....	162
6.4.1 低速运动近似( $\beta^* \ll 1$ ) .....	162
6.4.2 与电偶极辐射公式对比 .....	163
6.4.3 经典电磁理论的局限性 .....	164
6.5 高速运动带电粒子的辐射 .....	164
6.5.1 加速度与速度平行 .....	164
6.5.2 加速度与速度垂直 .....	166
* 6.5.3 一般情形 .....	167
<b>第7章 电磁波的散射、色散和吸收</b> .....	<b>168</b>
7.1 电磁质量和辐射阻尼 .....	168
* 7.1.1 带电粒子的受力计算 .....	169
* 7.1.2 能量分析 .....	172

7.1.3	电磁质量	174
7.1.4	辐射阻尼	175
7.1.5	辐射阻尼力公式的修正	176
7.2	介质对电磁波的散射	176
7.2.1	散射的定义	176
7.2.2	自由电子对电磁波的散射	177
7.2.3	束缚电子对电磁波的散射	179
7.3	介质对电磁波的色散和吸收	180
7.3.1	物理模型	180
7.3.2	求解步骤	181
7.3.3	电磁波的色散和吸收	183
<b>第 8 章</b>	<b>狭义相对论</b>	<b>186</b>
8.1	电磁理论与狭义相对论	186
8.1.1	电磁规律和相对性原理	186
8.1.2	狭义相对论的基本假设	187
8.1.3	时空性质与物质运动	188
8.2	洛伦兹变换	189
8.2.1	导出洛伦兹变换的基本假定	189
8.2.2	简单洛伦兹变换	190
8.2.3	一般洛伦兹变换	192
8.3	狭义相对论的时空理论	193
8.3.1	时空间隔和事件的时空关系	193
8.3.2	同时性的相对性及事件时序	194
8.3.3	时间间隔的相对性(动钟变慢)	196
8.3.4	空间间隔的相对性(动尺缩短)	199
8.3.5	速度变换公式	201
8.3.6	加速度变换公式	202
8.4	相对性原理的四维表述	203
8.4.1	闵柯夫斯基空间及洛伦兹变换	204
8.4.2	四维张量构建举例	205
8.4.3	4-矢量和 4-张量分量的变换关系	206
8.5	电磁规律的不变性	208

---

8.5.1 电荷守恒方程 .....	209
8.5.2 洛伦茨条件 .....	210
8.5.3 达朗贝尔方程 .....	210
8.5.4 电磁场张量 .....	211
8.5.5 麦克斯韦方程 .....	213
* 8.5.6 辅助矢量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ .....	213
8.5.7 电磁力密度矢量和电磁场的动量能量张量 .....	215
* 8.5.8 变换式的应用举例 .....	216
8.6 相对论力学 .....	218
8.6.1 4-动量矢量 .....	219
8.6.2 相对论动力学方程 .....	220
8.6.3 质能关系 .....	221
8.6.4 力的变换关系 .....	222
8.6.5 洛伦兹力 .....	223
* 8.6.6 相对论分析力学 .....	225
习题与参考答案 .....	229
参考书目 .....	246
附录 1 中英文人名对照 .....	247
附录 2 圆柱坐标和球坐标下的微分运算公式 .....	249
附录 3 物理常数 .....	250
名词索引 .....	251
教学进度和作业布置 .....	259

# 第 1 章 电磁现象的基本规律

本章综述电磁现象的基本规律,包括描述电磁场属性及其运动的麦克斯韦方程组,以及电磁场和场源载体相互作用的洛伦兹力公式.这些规律作为静电场、静磁场和似稳电磁场实验事实的理论概括和以科学假说方式对一般电磁场的推广,已在电磁学中作了全面透彻的分析;它们将作为电动力学的理论基础,用来分析和揭示电磁场运动及其与场源载体相互作用的特殊规律.我们将剖析这一相互作用过程中所蕴涵的能量、动量和角动量守恒特性,证明麦克斯韦方程组在描述电磁场运动规律方面的完备性.

本章及随后各章涉及大量数学推导,其中用得最多的是场论和张量分析.熟练运用各类数学分析手段,独立完成相关数学推导,是学好电动力学的前提和关键.为了给读者提供必要的数学准备,我们单辟一节,简述场论、张量分析及其相关的数学工具,重点放在使用运算技巧方面,略去严格繁琐的数学论证.

## 1.1 场论和张量分析

### 1.1.1 线性正交坐标变换

物理学中的量均属于张量,其中用得最多的是零阶、一阶和二阶张量.在物理学中,习惯将零阶张量称为标量,将一阶张量称为矢量;对二阶张量,则省去“二阶”两字,直呼其为“张量”.在数学中,张量的定义同坐标变换密切相关,因此我们先从坐标变换谈起.

#### 1. $N$ 维空间的坐标、基矢和位置矢量

下面的讨论将针对较为抽象的多维空间,维数设为  $N$ .以往学过的经典物理学量,均属于三维空间的张量,即  $N=3$ .在狭义相对论(见第 8 章)中,所有物理量将用四维时空的张量表述,对应  $N=4$ .为获得直觉以便于理解,读者可回到自己十分熟悉的三维空间,去理解下面要讲的内容.

在  $N$  维空间中,引入坐标  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$  (类比三维空间的直角坐标),相应沿坐标轴方向的单位矢量  $e_i$  称为基矢,满足如下正交关系:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中,  $\delta_{ij}$  为克罗内克符号.由坐标和基矢构成的矢量

$$x = x_i e_i \quad (1.1.2)$$

称为位置矢量,式(1.1.2)中使用了同指标求和法则;除特别声明之外,以下均遵循这一法则.

## 2. 线性正交坐标变换

在  $N$  维空间中引入坐标的线性齐次变换

$$x'_i = a_{ij}x_j \quad (1.1.3)$$

其中,  $a_{ij}$  为常数;要求满足如下空间距离不变条件:

$$\sum_{i=1}^N x_i'^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (1.1.4)$$

现在分析由系数  $\{a_{ij}\}$  构成的  $N \times N$  变换矩阵  $\mathbf{A}$  的特性. 为此,将式(1.1.3)代入式(1.1.4)得

$$\sum_{i=1}^N x_i'^2 = a_{ij}x_j a_{il}x_l = a_{ij}a_{il}x_jx_l = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

由  $x_i$  的任意性,上述等式成立的充分必要条件为

$$a_{ij}a_{il} = \delta_{jl} \quad \text{或} \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (1.1.5)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵;  $T$  表示矩阵转置. 式(1.1.5)表明,  $\mathbf{A}$  为正交矩阵,相应变换式(1.1.3)称为线性正交变换. 按惯例,在矩阵表示  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  中,元素  $a_{ij}$  第一下标为行标,第二下标为列标;按“横行竖列”规则排列矩阵元素

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

两矩阵相乘时,前导矩阵的第二下标(列标)与后随矩阵的第一下标(行标)求和,对应前导矩阵某行元素与后随矩阵的某列元素的乘积之和. 按此规则,式(1.1.5)中的  $a_{ij}$  (对应前导矩阵)应表示为  $\mathbf{A}^T = \{a_{ji}\}$ ,以便将求和下标  $i$  由原来的行标换为列标.

## 3. 逆变换公式

将  $a_{il}$  乘上式(1.1.3)对下标  $i$  求和,得逆变换公式

$$a_{il}x'_i = a_{il}a_{ij}x_j = \delta_{lj}x_j = x_l$$

推导中用到式(1.1.5). 不妨将求和指标  $i$  换为  $j$ ,下标  $l$  换为  $i$ ,将上述逆变换公式改写为

$$x_i = a_{ji}x'_j \quad (1.1.6)$$

对式(1.1.6)再用一次条件式(1.1.4),可证

$$a_{ji}a_{il} = \delta_{jl} \quad \text{或} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (1.1.7)$$

## 4. 基矢变换

经变换式(1.1.3)之后,基矢  $\{\mathbf{e}_i\}$  变为  $\{\mathbf{e}'_i\}$ ,要求由式(1.1.2)定义的位置矢量



保持不变,即

$$\mathbf{x}' = x'_i \mathbf{e}'_i = x_j \mathbf{e}_j = \mathbf{x}$$

将式(1.1.6)代入上式,得

$$x_j \mathbf{e}_j = a_{ij} x'_i \mathbf{e}_j = x'_i \mathbf{e}'_i$$

由  $x'_i$  的任意性,必有

$$\mathbf{e}'_i = a_{ij} \mathbf{e}_j \quad (1.1.8)$$

式(1.1.8)即为基矢的变换关系.由式(1.1.8)可见,基矢满足与坐标同样的变换关系.变换矩阵第  $i$  行的元素  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$  代表新基矢  $\mathbf{e}'_i$  相对原坐标基矢的“方向余弦”(类比三维空间的直角坐标刚性旋转下的基矢变换).下面验证经变换后的基矢满足正交关系.由式(1.1.8)、式(1.1.1)和式(1.1.7)得

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = a_{il} \mathbf{e}_l \cdot a_{jk} \mathbf{e}_k = a_{il} a_{jk} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k = a_{il} a_{jl} = \delta_{ij}$$

证毕.

#### 5. 位移分量的变换和位移矢量

对空间任意两点  $x_i^{(1)}$  和  $x_i^{(2)}$ , 定义位移分量  $dx_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)}$ , 则由变换式(1.1.3)的线性性质,可知位移分量满足与坐标同样的变换关系

$$dx'_i = a_{ij} dx_j \quad (1.1.9)$$

同样成立

$$\sum_{i=1}^N dx_i'^2 = \sum_{i=1}^N dx_i^2 \quad (1.1.10)$$

它表示任意两点之间的空间间隔也是式(1.1.3)变换下的不变量.

定义位移矢量

$$d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{e}_i \quad (1.1.11)$$

易证它也是式(1.1.3)变换下的不变量

$$d\mathbf{x}' = dx'_i \mathbf{e}'_i = a_{ij} dx_j a_{il} \mathbf{e}_l = a_{ij} a_{il} dx_j \mathbf{e}_l = \delta_{jl} dx_j \mathbf{e}_l = dx_l \mathbf{e}_l = d\mathbf{x}$$

推导中用到式(1.1.5).综上所述,位置矢量和位移矢量在变换式(1.1.3)下具有不变性,尽管它们的分量均会发生变化.

#### 6. 变换矩阵的其他性质

作为正交矩阵,变换矩阵还具有其他一些有用性质.首先,它的行列式为 $\pm 1$ ,证明如下:由式(1.1.5)得

$$\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^T \cdot \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2 = 1$$

证毕.  $\det \mathbf{A} = 1$  的线性正交变换对应坐标轴的刚性旋转,而  $\det \mathbf{A} = -1$  则在刚性旋转的基础上,加上奇数个坐标轴的反转.每次反转对应变换矩阵相应行的全部元素反号,导致行列式反号.坐标轴的反转可用来分析动力学过程的可逆性(时间坐标反转)和物理系统的宇称性(三维位置空间坐标反射).在本课程范围内,我们限于

$$\det \mathbf{A} = 1 \quad (1.1.12)$$