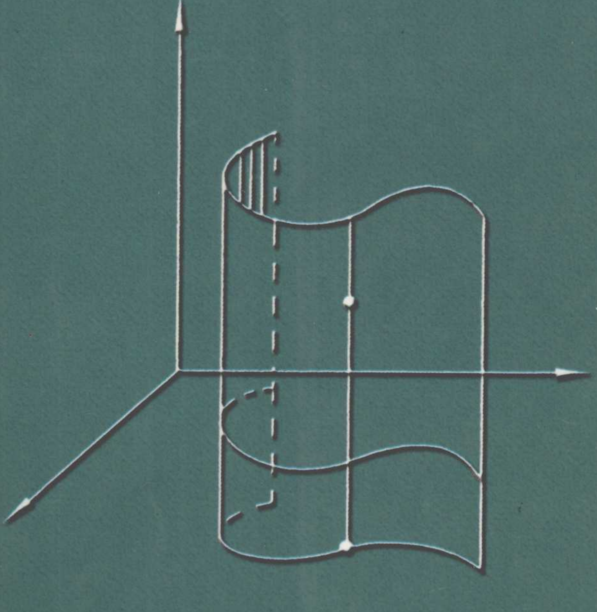
高等数学

gaodeng shuxue

王升瑞　张晓宁　朱开永　编



中国矿业大学出版社

内容提要

本书主要内容有函数与极限、一元函数微积分学、多元函数微分学及二重积分。每章末配有自学指导，它由基本要求、重点难点、学习指导、解题指导和自测题组成。每节末配有习题，书末附有习题答案。为方便读者，书末附有希腊字母表、微积分基本公式、微积分在经济问题中的初步应用、初等数学常用公式及几种常用曲线的图形。

本书概念清楚，论述浅显易懂，例题较多，重点突出，难点分散，便于读者更好地掌握知识要点及自学。本书可作为高等院校经管类（专科）和文科（本科）的教材，也可作为高等教育自学考试、中等专科学校以及广大业余自学者学习高等数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王升瑞，张晓宁，朱开永编．—徐州：中国矿业大学出版社，2003.6

ISBN 7-81070-705-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①王…②张…③朱… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039242 号

书　　名　高等数学
编　　者　王升瑞　张晓宁　朱开永
责任编辑　朱明华
出版发行　中国矿业大学出版社
　　　　　　（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
印　　刷　中国矿业大学印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168 1/32　**印张** 16.375　**字数** 409 千字
版次印次　2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷
印　　数　1～3100 册
定　　价　18.00 元

前　言

本教材是在中国矿业大学王升瑞、张晓宁、朱开永编写的《高等数学》基础上，根据经管类（专科）和文科（本科）的教学要求，结合多年来的教学经验，作了改动，整理、保留了一元函数和多元函数微积分学及微积分在经济问题中的应用。教学时数约为80学时左右。

作者在编写本书时，力求做到：概念清楚，叙述简明，论述正确，由浅入深，难点分散，重点突出，并注重启发引导。选用的例题、习题，类型多样，侧重于基本题，注重解题方法与技巧的训练。为使教材便于各类教学使用，我们在编写教材时力求做到以下几点：

1. 文字叙述通俗易懂，深入浅出。阐述概念时尽量运用几何直观、形象对比的方法，使学生在感性认识的基础上建立抽象的概念。

2. 注意理论联系实际，重视对学生能力的培养，使学生在掌握必需的基本知识和基本方法的同时，在分析、解决一些实际应用问题的能力上也得到训练。

3. 内容安排上尽量保持章节间的相对独立性，取材少而精，对超出教学基本要求的内容，一般不编入。

4. 为便于学生自学，每章末编有自学指导，由基本要求、重点难点、学习指导、解题指导及自测题五部分组成。对于这几部分，我们一方面指出某些概念、重点或难点中应当注意的问题，另一方面对概念、理论和解题方法进行了归纳总结，并适当分析解题思路，

以弥补各类教材重演绎、轻归纳的不足。自测题是为使学生及时检查各阶段的学习效果而精心选编的。对在校生，此部分可作为习题课教学的参考。

5. 为方便学生查找有关资料，书末附有希腊字母表、微积分基本公式和积分表、初等数学常用公式及常用的曲线图形。

本书由王升瑞负责组织策划、制定编写计划、修改等工作，由张晓宁提出全书编写总纲并负责统稿。其中第一章由张晓宁执笔，第二、三章及微积分在经济问题中的初步应用由朱开永执笔，第四、五章由王升瑞执笔。

由于编者水平所限，书中难免有不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2003年5月

目　录

第一章　函数与极限

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科．初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学研究的是变量．变量与变量之间相互依赖的函数关系及其属性是高等数学的主要研究对象，极限概念及其运算法则是研究函数的主要工具，高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的．

本章先复习函数的一些基本知识，然后研究极限与函数的连续性等基本概念以及它们的运算法则和性质．

§1.1　函　　数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一．学习函数概念需要明确函数具备的两个要素：一是对应规律；二是自变量的变化范围．此外还要十分熟悉函数值的求法及函数符号 $f(x)$ 等所表示的意义．

一　常量与变量

在自然现象及技术过程中，总会涉及到各种各样的量．例如，距离、速度①、时间、温度等都是一些本质不同的量，但它们都具有一个共同的特征，即每个量的大小都可以用数来表示．有些量在整个过程中保持一定的数值，这种量叫做**常量**（或常数）；有些量可

① 严格地说，位移、速度、加速度都是既有大小又有方向的向量．今后为简单起见，如不特别声明，本书中所出现的这些量均指其大小，而不考虑其方向．

以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，在研究自由落体运动时，物体的质量 m、重力加速度 g 是常量，而运动时间 t、速度 v 和距离 s 是变量.

一个量是常量还是变量，并不是绝对的，要视具体问题具体分析. 例如，上述的重力加速度 g，在地球表面附近，它的差别不大，因此把它看做常量. 但在发射人造卫星时，就需要考虑重力加速度的差别，这时它就成为变量了.

习惯上，我们用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量.

二　区间与邻域

一个变量取值的集合称为这个变量的**变域**. 在观察各种运动过程时，我们发现有些变量的取值具有一定的范围. 例如，一昼夜的时间所取的值，总是介于 0 与 24 h 之间；不论在什么问题中，温度只能大于 -273℃.

为了方便地表示变量的变化范围，我们引入区间的概念.

定义 1　设 a,b 是两个实数且 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

称数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

这里，称 a 和 b 为闭区间 $[a,b]$ 的**端点**.

类似地我们可以定义**半开半闭区间** $[a,b)$ 和 $(a,b]$，**无穷区间** $(-\infty,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$ 等. 即

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\},$$

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}.$$

这里,符号“$+\infty$”读作正无穷大,符号“$-\infty$”读作负无穷大,它们不是实数,仅是一种符号．称开区间、闭区间和半开半闭区间为**有限区间**,其余的为**无穷区间**．当区间有限时,称其右端点与左端点的坐标之差 $b-a$ 为该区间的**长度**,规定无穷区间的长度为 $+\infty$.

上述任何一种区间都可在数轴上表示出来,如图 1—1 所示.无穷区间$(-\infty,+\infty)$表示在数轴上,就是整个实数轴．

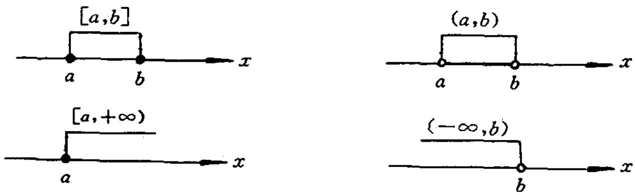


图 1—1

当 x 在开区间(a,b)内取值时,称 x **属于该区间**,用$x\in(a,b)$表示．以后,我们把有限区间与无穷区间简称为**区间**,且常用字母 I 表示．

邻域是一个与区间有关并且经常用到的概念,定义如下:

定义 2 设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$,称以 a 为中心且长度等于 2δ 的开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域,记作$U(a,\delta)$. 即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

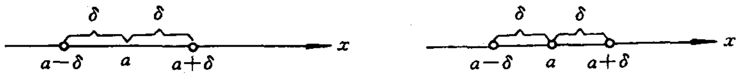
这里,点 a 叫做这邻域的**中心**,δ 叫做这邻域的**半径**．

点 a 的 δ 邻域用集合可表示为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

几何上,点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心,δ 为半径的开区间(图 1—2(a)).

有时用到的邻域需要去掉邻域中心 a,称去掉中心 a 后的邻



(a) (b)

图 1—2

域(图 1—2(b))为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$
$$=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

例如,邻域 $U(1,1)$ 就是区间 $(0,2)$,它以 1 为中心,2 为长度;去心邻域 $\mathring{U}(-1,0.01)$ 是区间 $(-1.01,-1)\cup(-1,-0.99)$,它以 -1 为中心,0.02 为长度,但不包含点 -1.

三 函数概念

1. 函数定义

在同一问题中出现几个变量时,这些变量之间往往存在相互依赖、相互制约的关系.当一些变量的值在某一范围内取定之后,其他变量的值也按照某种规律随之确定,变量之间的这种依从关系数学上称之为函数关系.对两个变量之间的这种对应关系,有如下定义:

定义 3 设 x 和 y 是两个变量,如果对于变量 x 在其变化范围内所取得的每一个值,变量 y 按照一定的规律总有确定的值与之对应,便称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),$$

其中,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

这里要注意:

(1) 当自变量 x 取定某一个数值 x_0 时,如果函数 $y=f(x)$ 有确定的值与之对应,便称函数在 x_0 处有定义,且将 x_0 处的函数值记为 $f(x_0)$.

(2) 使函数有定义的点的全体(即 x 的变化范围)叫做函数的**定义域**,用字母 D 表示. 相应的全体函数值,叫做函数的**值域**,用字母 W 表示(图 1—3),记作

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\},$$

函数的定义域与值域,都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,以后不再说明.

(3) 对应规律与定义域是构成函数的两个要素. 如果两个函数具有相同的对应规律和定义域,那么这两个函数是相同的.

(4) 只有一个自变量的函数叫做**一元函数**,有两个或两个以上自变量的函数叫做**多元函数**. 一元函数是函数中最简单也是较重要的一类函数,本章我们只研究一元函数,关于多元函数,以后再进行研究.

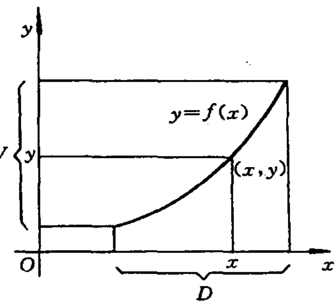


图 1—3

2. 函数的定义域

在研究函数关系时,必须注意它的定义域. 只有当自变量在定义域内取值时,因变量才有确定的对应值,即函数才有意义.

在考虑函数定义域时,对于表示实际问题的函数关系,定义域应由所研究问题的实际意义来确定. 如研究物体的自由落体运动,如果用 T 表示物体落地的时刻,则自由落体运动中物体下落的距离与时间的函数关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是区间 $[0,T]$.

在数学中,为了对各种函数的性质作深入的研究,需要舍弃函数的实际意义,抽象地研究函数的分析表达式(即用来表示函数的公式). 对于用数学公式表示的函数 $y=f(x)$,其定义域是使这个表达式有意义的自变量的一切值组成的集合. 例如下列情况:

(1) 分母不得为零；

(2) 偶次方根的被开方式必须大于或等于零；

(3) 对数的真数部分必须大于零，底数部分必须大于零且不等于 1；

(4) 反正(余)弦函数其自变量的绝对值不能大于 1.

这样一来，求函数的定义域往往就归结为解不等式或不等式组．在高等数学中，定义域通常用区间表示．

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$； (2) $y=\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\ln(x-1)$.

解 (1) 要使 y 有确定的值，必须使 $|x|-x\neq 0$，即 $x<0$，于是函数 $y=\dfrac{1}{|x|-x}$ 定义域为 $(-\infty,0)$.

(2) 要使 y 有确定的值，x 必须同时满足不等式组

$$\begin{cases}5-2x\geqslant 0\\ x+1\neq 0,\end{cases}$$

解得 $x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 且 $x\neq -1$，于是所求定义域为区间 $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\dfrac{5}{2}\right]$.

(3) 要使 y 有确定的值，必须

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1\\ x-1>0,\end{cases}$$

解得 $-2\leqslant x-3\leqslant 2$ 且 $x>1$，即 $1\leqslant x\leqslant 5$ 且 $x>1$，于是定义域为 $(1,5]$.

3. 函数符号与函数值

在函数 $y=f(x)$ 中，字母 f 是表示对应规律的记号，称为**函数符号**．一般来讲，$f(x)$ 有两层含意：一是表示“x 的函数”，二是表

示"函数 f 在 x 处的值". 当把 x 看作自变量时,$f(x)$表示 x 的函数;当把 x 看作自变量所取的某个特定值时,$f(x)$就表示对应函数的函数值.

例如,按照第二层含意,$f(1)$、$f(x_0)$、$f(x_0+\Delta x)$、$f[\varphi(x)]$分别表示函数 $y=f(x)$在点 1、x_0、$x_0+\Delta x$ 及 $\varphi(x)$处的值. 这时,f 的作用是指明对括号里的数或公式按照怎样的规则运算.

除了用 f 表示函数关系外,还可以用其他字母来表示. 例如,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$等等.

应当注意,在同一过程中,不同的函数关系要用不同的记号来表示,以免引起混淆. 例如,圆周长 L 和圆面积 A 都是半径 r 的函数,如果在同一问题中要用到这两个函数,就必须用两个不同的函数记号来表示. 比如,可用 $L=f(r)$表示 $L=2\pi r$,用 $A=\varphi(r)$表示 $A=\pi r^2$.

例 2 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}$,求 $f(0)$,$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,以及 $f[f(x)]$的值.

解

$$f(0)=0+\frac{1}{1+0}=1,$$

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=\left[(x_0+\Delta x)+\frac{1}{1+(x_0+\Delta x)}\right]-\left(x_0+\frac{1}{1+x_0}\right)\\&=\Delta x-\frac{\Delta x}{(1+x_0+\Delta x)(1+x_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=\left(x+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{1+\left(x+\dfrac{1}{1+x}\right)}\\&=x+\frac{1}{1+x}+\frac{1+x}{(1+x)^2+1}.\end{aligned}$$

例 3 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解 **方法** 1(配方法) 因为

$$f(x+1)=x^2-3x+2$$