

数字信号处理

副主编 蒋明峰 王秀萍

10101101010110.....

101010101010

浙江教育出版社

TN911.72/218

2008

 浙江省高等教育重点教材

SHUZI
XINHAO CHULI

数字信号处理

主 编 戴文战

副主编 蒋明峰 王秀萍

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理 / 戴文战主编. —杭州:浙江教育出版社,
2008. 2

ISBN 978-7-5338-7414-8

I. 数… II. 戴… III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 025160 号

数字信号处理

主 编 戴文战

副主编 蒋明峰 王秀萍

-
- 出版发行 浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号 邮编 310013)
- 责任编辑 王 华
- 责任校对 胡 星
- 封面设计 曾国兴
- 责任印务 温劲风
- 图文制作 杭州兴邦电子印务有限公司
- 印刷装订 浙江新华印刷技术有限公司
-

- 开 本 787×1092 1/16
- 印 张 19.25
- 插 页 1
- 字 数 445 000
- 印 数 001—800
- 版 次 2008 年 2 月第 1 版
- 印 次 2008 年 2 月第 1 次
- 标准书号 ISBN 978-7-5338-7414-8
- 定 价 28.00 元
-

联系电话: 0571-85170300-80928

e-mail: zjjy@zjcb.com

网址: www.zjeph.com

前 言

本书是编者根据长期从事数字信号处理教学的经验,并吸收国内外同类教材的优点,为大学本科电子、通信、信息工程、自动化类等专业的学生学习数字信号处理而编写的一本入门教材,同时也是一本对从事数字信号处理工作的科研人员颇有价值的参考书。

本书系统介绍了数字信号处理的基本理论、基本分析方法及基本实现方法。全书前八章分别介绍信号的抽样与重构、离散时间信号与系统、 Z 变换、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、数字系统的等效描述及实现、有限长脉冲响应(FIR)数字滤波器设计、无限长脉冲响应(IIR)数字滤波器设计,第九章介绍基于 MATLAB 的数字信号处理上机实验。

本书根据学科最新发展组织内容,取材新颖。全书力求深入浅出,立足于实际应用,系统性强,例题丰富,便于读者自学。

本书由浙江理工大学副校长、博士生导师戴文战教授、浙江理工大学蒋明峰博士、浙江工商大学王秀萍博士编写,全书由戴文战教授负责内容安排、组织编写、统稿和定稿。

作为浙江省高等教育重点教材,本书得到了浙江省教育厅高教处领导的大力支持。编者借此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误或不当之处,恳请读者批评指正。

编 者

2007 年 11 月于浙江理工大学

目 录

绪 论	1
0.1 数字信号处理理论	1
0.2 数字信号处理实现方法	2
0.3 数字信号处理的特点	2
0.4 数字信号处理的应用	3
第1章 信号的抽样与重构	5
1.1 引 言	5
1.2 连续时间信号回顾	6
1.2.1 连续周期信号的傅里叶级数	6
1.2.2 连续非周期信号的傅里叶变换	7
1.2.3 傅里叶级数与傅里叶变换的区别与联系	7
1.3 抽样信号的频谱及采样定理	8
1.3.1 理想采样	8
1.3.2 理想采样信号的频谱	10
1.3.3 采样定理	11
1.4 模拟信号重构器	12
1.4.1 理想重构器	12
1.4.2 阶跃重构器	14
1.4.3 后置滤波器	16
1.5 采样定理的应用	16
1.6 关于正弦信号抽样的讨论*	18
习 题	21
第2章 离散时间信号与系统	23
2.1 离散时间信号——序列	23
2.1.1 离散时间信号概述	23
2.1.2 典型离散时间信号	24
2.1.3 离散时间信号的运算	26
2.2 离散时间系统的基本概念	29
2.2.1 线性系统	29
2.2.2 时不变系统	30
2.2.3 因果系统	30

2.2.4	稳定系统	31
2.3	线性时不变(LTI)系统的输入输出关系	31
2.3.1	单位脉冲响应	31
2.3.2	LTI系统的输入输出关系	31
2.3.3	常系数线性差分方程	35
2.3.4	LTI系统的频率响应	37
2.4	FIR滤波及卷积计算	38
2.4.1	直接卷积形式	38
2.4.2	表格卷积形式	40
2.4.3	LTI卷积形式	41
2.4.4	矩阵卷积形式	42
	习 题	44
第3章	Z变换	46
3.1	Z变换的定义及其与拉氏变换和傅氏变换的关系	46
3.2	Z变换的收敛域	48
3.2.1	有限长序列	49
3.2.2	右边序列	50
3.2.3	左边序列	51
3.2.4	双边序列	51
3.3	Z变换的性质	53
3.3.1	线性	53
3.3.2	序列的移位	54
3.3.3	序列的指数加权性质	55
3.3.4	序列的线性加权性质	55
3.3.5	复序列的共轭	55
3.3.6	翻褶序列	56
3.3.7	初值定理	56
3.3.8	终值定理	56
3.3.9	时域卷积性质(卷积定理)	57
3.3.10	序列乘积(复卷积定理)	58
3.3.11	帕塞伐(Parseval)定理	59
3.4	Z反变换	60
3.4.1	幂级数法	60
3.4.2	部分分式展开法	62
3.4.3	围线积分法(留数法)	63
3.5	用Z变换求解差分方程	66
3.5.1	求稳态解	66

3.5.2 求暂态解	66
习 题	67
第 4 章 离散傅里叶变换(DFT)	69
4.1 引 言	69
4.1.1 连续时间非周期信号与连续谱密度函数	69
4.1.2 连续时间周期信号与离散频谱密度函数	70
4.1.3 离散时间信号(序列)与频率的周期延拓	70
4.1.4 离散的周期信号与周期离散的频谱函数	71
4.2 离散时间信号傅里叶变换(DTFT)	72
4.2.1 DTFT 的定义	72
4.2.2 DTFT 的性质	73
4.3 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)	78
4.3.1 DFS 的定义	78
4.3.2 DFS 的性质	81
4.4 有限长序列离散傅里叶变换(DFT)	83
4.4.1 DFT 的定义	83
4.4.2 DFT 与 DTFT 及 Z 变换之间的关系	85
4.4.3 DFT 的性质	86
4.5 频域采样理论	94
4.6 与 DFT 有关的几个问题	97
4.6.1 混叠现象	97
4.6.2 频率分辨率	97
4.6.3 栅栏效应	99
习 题	100
第 5 章 快速傅里叶变换(FFT)	102
5.1 概 述	102
5.2 按时间抽取的基-2FFT 算法	104
5.2.1 算法的基本原理	104
5.2.2 算法的讨论	107
5.3 按频率抽取的基-2FFT 算法	110
5.3.1 算法的基本原理	110
5.3.2 算法的讨论	114
5.4 离散傅里叶反变换(IDFT)的快速计算方法	114
5.5 任意基 FFT 算法	115
5.5.1 整数的多基多进制表示形式	116
5.5.2 $N=r_1 r_2$ 的快速算法	117

5.6	线性卷积的 FFT 算法——快速卷积	120
5.6.1	FFT 的快速卷积法	120
5.6.2	重叠相加法	122
5.6.3	重叠保留法	123
习 题		126
第 6 章	数字系统的等效描述及实现	127
6.1	线性时不变系统(LTI)的等效描述	127
6.1.1	LTI 系统的等效描述	127
6.1.2	离散系统的零极点分析	129
6.2	离散时间系统的网络表示方法	132
6.3	无限长脉冲响应滤波器的实现	134
6.3.1	直接 I 型	134
6.3.2	直接 II 型	136
6.3.3	级联型	139
6.3.4	并联型	140
6.4	有限长脉冲响应滤波器的实现	141
6.4.1	直接型	142
6.4.2	级联型	142
6.4.3	频率采样型	142
习 题		146
第 7 章	FIR 数字滤波器设计	148
7.1	引 言	148
7.2	数字滤波器的分类	149
7.3	FIR 数字滤波器的特点	151
7.4	离散时间系统的相频特性	154
7.5	FIR 系统的线性相位特性	154
7.5.1	线性相位滤波器的频率响应特点	154
7.5.2	线性相位 FIR 数字滤波器相位函数的特点	155
7.5.3	线性相位 FIR 数字滤波器幅度函数的特点	157
7.6	具有线性相位的 FIR 数字滤波器零点分布	161
7.7	基于窗函数法的 FIR 数字滤波器设计	162
7.7.1	加矩形窗的设计方法	162
7.7.2	典型窗函数	168
7.7.3	基于窗函数的 FIR 数字滤波器设计示例	172
7.7.4	加 Kaiser 窗的设计法	173
7.8	FIR 数字滤波器设计的频率采样法	178

习 题	181
第 8 章 IIR 数字滤波器设计	184
8.1 引 言	184
8.1.1 借助模拟滤波器的设计方法	184
8.1.2 直接设计法	185
8.2 模拟滤波器设计简介	185
8.2.1 巴特沃思模拟低通滤波器	185
8.2.2 切比雪夫模拟低通滤波器*	191
8.2.3 模拟域频率变换	200
8.3 IIR 数字滤波器设计的脉冲响应不变法	209
8.4 IIR 数字滤波器设计的双线性变换法	214
8.5 IIR 数字低通滤波器设计示例	219
8.5.1 巴特沃思数字 IIR 低通滤波器的设计	219
8.5.2 用双线性变换法设计切比雪夫 I 型数字 IIR 低通滤波器	223
8.6 IIR 数字高通、带通、带阻滤波器设计	225
8.6.1 原型变换	225
8.6.2 Z 平面变换	231
8.7 IIR 数字滤波器的实现	237
8.8 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器的简要比较	239
习 题	240
第 9 章 MATLAB 上机实验	243
9.1 引言	243
9.2 采样与重构	243
9.2.1 常用离散信号	243
9.2.2 序列的运算	247
9.2.3 采样与重构	249
9.3 LTI 离散时间系统的 MATLAB 实现	252
9.3.1 LTI 离散时间系统模型的建立	252
9.3.2 LTI 系统不同表示形式之间的转换	255
9.3.3 单位脉冲响应 $h(n)$	257
9.3.4 频率响应 $H(z)$	259
9.3.5 LTI 离散时间系统的输出	261
9.4 Z 变换	264
9.4.1 用符号运算工具函数求 Z 变换和 Z 反变换	264
9.4.2 部分分式展开	265
9.5 离散傅里叶变换	266

9.5.1 离散时间傅里叶变换(DTFT)	266
9.5.2 离散傅里叶变换(DFT)	269
9.6 FIR 数字滤波器设计	274
9.7 IIR 数字滤波器设计	286
9.7.1 滤波器阶次和参考频率 Ω 的计算	287
9.7.2 模拟滤波器设计	288
9.7.3 双线性变换法和脉冲响应不变法	290
9.7.4 数字滤波器设计示例	291
习 题	296
参考文献	300

绪 论

数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)是 20 世纪 60 年代以来伴随着信息学科和计算机学科的高速发展而诞生的一门新兴学科。它通过计算机或通用(专用)信号处理设备,用数值计算方法对信号进行处理(如滤波、变换、压缩、估计、识别等),以达到提取有用信息,便于应用的目的。由于数字信号处理系统具有精度高、抗干扰能力强、速度快、体积小、成本低、时分复用等模拟信号处理系统无法比拟的优势,它的重要性日益在各个领域中表现出来。

0.1 数字信号处理理论

数字信号处理所涉及的理论范围极其广泛。数学领域中的微积分、高等代数、近世代数、概率统计、随机过程、数值分析、复变函数等都是它的基本工具,网络理论、信号与系统等都是它的理论基础。

国际上一般将 1965 年 Cooley 和 Turkey 提出快速傅里叶变换(FFT),作为数字信号处理这一学科的开端。在随后 40 多年的发展中,数字信号处理逐渐发展成了一套较为完整的理论体系。数字信号处理理论主要包括:

- (1) 离散时间线性时不变系统分析。
- (2) 离散时间信号时域及频域分析、离散傅里叶变换(DFT)理论。
- (3) 信号的采集,包含 A/D 技术、D/A 技术、抽样、量化噪声理论等。
- (4) 数字滤波技术。
- (5) 谱分析与快速傅里叶变换(FFT),快速卷积与相关算法。
- (6) 自适应信号处理。
- (7) 估计理论,包括功率谱估计及相关函数估计等。
- (8) 信号的压缩,包括语音信号与图像信号的压缩。
- (9) 信号的建模,包括 AR、MA、ARMA、CAPON、PRONY 等各种模型。
- (10) 其他特殊算法(如同态处理、抽取与内值、信号重建等)。
- (11) 数字信号处理的实现。
- (12) 数字信号处理的应用。

数字信号处理所涉及的信号包括确定性信号、平稳随机信号、时变信号、一维及多维信号、单通道及多通道信号;所涉及的系统包括单通道系统和多通道系统。对每一类特定的信号与系统,上述理论的各个方面又有不同的内容。

0.2 数字信号处理实现方法

数字信号处理的实现是指将信号处理的理论应用于某一具体的任务中。随着任务的不同,数字信号处理实现的途径也不同。总的来说,它可以分为软件实现和硬件实现两大类。

软件实现是指在通用计算机上用软件来实现信号处理的某一方面的理论。这种实现方式多适用于教学及科学研究,如产品开发前期的算法研究与仿真。这种实现方式的速度较慢,一般无法实时实现。目前,有关信号处理的最强大的软件工具是 MATLAB 语言及相应的信号处理工具箱(tool box)。

硬件实现是指采用通用或专用的 DSP 芯片以及其他半导体元件(IC)构成的满足数字信号处理的任务要求的目标系统。DSP 芯片较之单片机有着更为突出的优点,如内部带有乘法器和累加器,采用流水线工作方式及并行结构,多总线,速度快,配有适于信号处理的指令(如 FFT 指令)等。目前市场上的 DSP 芯片有:TI 公司的 TMS320CX 系列,AT&T 公司的 DSP16、DSP32 系列, Motorola 公司的 DSP56x、DSP96x 系列以及 AD 公司的 DSP21X、ADSP210X 系列。市场上也有专门用于 FFT、FIR 滤波器、卷积等相关的专用数字芯片,如:BB 公司的 DF17XX 系列,AXIM 公司的 MAXIM27X、MAXIM28X 系列, National 公司的 National-SEMI 系列、F 系列。

0.3 数字信号处理的特点

与模拟信号处理系统(Analog Signal Processing, ASP)相比,数字信号处理系统具有如下特点:

(1) 精度高

模拟信号处理系统的精度是由元器件决定的,模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上。而在数字信号处理系统中,17 位字长就可达 10^{-5} 精度,所以在高精度系统中,有时只能采用数字信号处理系统。

(2) 可靠性强

数字信号处理系统只有两个信号电平 0 或 1,受噪声及环境条件等的影响较小。而在模拟信号处理系统中,各参数都有一定的温度系数,易受周围环境,如温度、振动、电磁感应等影响,产生杂散效应甚至振荡等。而且数字信号处理系统采用大规模集成电路,其故障率远远小于采用众多分立元件构成的模拟信号处理系统。

(3) 灵活性大

数字信号处理系统的性能主要取决于乘法器的各系数,且系数存放于系数存储器内,只需改变存储的系数,就可得到不同的系统,比改变模拟信号处理系统方便得多。

(4) 易于大规模集成

数字部件由于其高度规范性,便于大规模集成和生产,对电路参数要求不高,故产

品成品率高。例如地震波分析,需要过滤几赫兹至几十赫兹的信号,用模拟信号处理系统处理其电感器和电容器的数值,体积、重量非常大,且性能亦不能达到要求,而数字信号处理系统在这个频率处优越性非常明显。

(5) 时分复用

利用数字信号处理系统能够同时处理几个通道的信号。例如,某一路信号的相邻两抽样值之间存在很大的时间空隙,因而在同步器的控制下,在此时间空隙中送入其他路的信号,而各路信号则利用同一数字信号处理系统,后者在同步器的控制下,算完一路信号后,再算另一路信号,因而处理器运算速度越高,能处理的信道数目也就越多。

(6) 可获得高性能指标

例如模拟频谱仪在频率低端只能分析到 10Hz 以上频率,且难于做到高分辨率(即足够窄的带宽)。但在数字的谱分析中,已能做到 10^{-3} Hz 的谱分析。又如有限长冲激响应数字滤波器,可实现准确的线性相位特性,这在模拟系统中是很难达到的。

(7) 二维与多维处理

利用庞大的存储单元,可以存储一帧或数帧图像信号,实现二维甚至多维信号,包括二维或多维滤波,二维及多维谱分析等。

0.4 数字信号处理的应用

自 20 世纪 60 年代以来,数字信号处理的应用日趋广泛,已成为应用最快、成效最为显著的新学科之一。它在语音、雷达、地震、图像、通信系统、系统控制、生物工程、航空航天、电力系统、故障检测、自动化仪表等众多领域都获得了极其广泛的应用,有效地推动了众多工程技术领域的技术改造和学科发展。下面我们通过几个例子来探讨数字信号处理的应用。

(1) 语音处理

语音处理是最早采用数字信号处理技术的领域之一。20 世纪 50 年代提出的语音形成数字模型,经过几十多年对语音的分析、综合,被证明是正确的。在语音领域现存在语音分析系统(如自动语音识别系统,它能识别语音,辨认说话的人是谁,而且破译后,能立即作出决断)、语音综合系统(如盲人的自动阅读机,声音响应的计算机终端,会说话的玩具,CD、VCD、DVD 等家用电器)以及语音分析综合系统(如语音存储和检索系统、语音编码、语音合成、语音识别、语音增强、说话人确认、语音邮件、语音存储等)。

(2) 图像处理

成功应用数字信号处理技术的图像处理方法有:

- 数据压缩
- 图像复原
- 清晰化与增强

(3) 雷达

雷达系统的主要信号处理功能包括:

- 信号产生
- 匹配滤波
- 门限比较
- 目标参数(如射程、方位和速度)估计

(4) 通信

整个通信领域几乎没有不受数字信号处理技术影响的地方。数字技术已应用于信号的调制、解调、滤波、混频、检波和多路传输等技术中。语音数据压缩与解压是数字信号处理的重要内容。在电信领域,数字处理技术已发展到音调检测、回波清除、数字开关网和自适应均衡、数据加密、数据压缩、可视电话等方面。许多音频通信的信号处理功能已由单块集成电路实现。

综上所述,数字信号处理是一门涉及众多学科,又应用于众多领域的新兴学科,它有着较完整的理论体系,以最快的速度形成自己的产业。数字信号处理涉及的内容非常丰富。本书主要介绍了信号离散时间线性时不变系统分析、离散时间信号时域及频域分析、离散傅里叶变换(DFT)理论、信号的采集和重建(包含 A/D、D/A 技术,抽样,量化噪声理论)、数字滤波技术、谱分析与快速傅里叶变换(FFT)、快速卷积与相关算法等数字信号处理等基本理论和基本分析方法。

第 1 章 信号的抽样与重构

内容提要

本章首先回顾连续时间信号的傅里叶变换,然后详细介绍时域周期采样的过程,阐明奈奎斯特采样定理,分析离散时间信号如何重构恢复成连续时间信号,介绍理想重构器、阶跃重构器原理,讨论若干采样定理的应用,最后就正弦信号的采样进行讨论。

1.1 引言

信号是信息的载体。按照特点的不同,可以将信号表示成一个或几个独立变量的函数。习惯上我们把一维信号的参量取作时间,则得到以下几种形式的信号:

(1) 连续时间信号:即在连续时间范围内定义的信号,但其幅度不仅可以是连续的,也可以是离散的。这种信号在一些特定情况下也被称为模拟信号。

(2) 离散时间信号:即时间为离散变量的信号,就是指独立变量时间被量化了的信号。

(3) 数字信号:即时间与幅度都被离散量化了的信号。

将连续时间信号转换为数字信号是在计算机上实现信号数字化处理的必要步骤。对连续信号进行数字化处理有以下三个步骤:

- (1) 将模拟信号经过采样和量化编码形成数字信号;
- (2) 采用数字信号处理技术进行处理;
- (3) 处理完毕,如果需要,再转换成模拟信号。

这种处理方法称为模拟信号数字处理方法,其原理框图如图 1.1.1 所示。

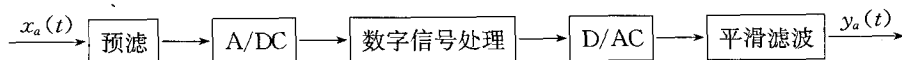


图 1.1.1 模拟信号数字处理框图

下面对模拟信号数字处理框图中的各个模块作简要介绍:

(1) 预滤模块:在实际工作中,为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆,一般在采样器前加入一个保护性的前置低通滤波器,称为防混叠滤波器,以滤掉高于 $\Omega_s/2$ 的杂散频率分量(Ω_s 为采样频率)。预滤模块实现对模拟信号进行抗混叠滤波处理,使进入模拟—数字转换模块的模拟信号的最高频率为低通滤波器的截

止频率。详细内容将在本章第 3 节中加以阐述。

(2) A/DC 模块:模拟—数字转换模块(Analog-Digital Converter),将模拟信号转换为数字信号。

(3) 数字信号处理模块:对数字信号进行处理、变换,以获得人们所期望的信号,从而达到提取有用信息的目的。数字信号处理通过数字信号处理器来实现。数字信号处理器可以是数字计算机或微处理机。它通过软件编程对输入数字信号进行预处理。这是一种软件实现方法。另一种方法采用数字硬件组成的处理芯片或通用数字信号处理芯片作为数字信号处理器,这种方法的优点是可以进行实时处理。

(4) D/AC 模块:数字—模拟转换模块(Digital-Analog Converter),将处理好的数字信号转换为模拟信号。

(5) 平滑滤波模块:由于频谱混叠,实际的 D/AC 在重建模拟信号的同时也往往将杂散的频率成分引入重建信号中,从而无法达到理想重建效果。为了消除这类影响,可以在 D/AC 模块后添加平滑滤波模块。

图 1.1.1 说明了从模拟域到数字域,又从数字域回到模拟域的完整过程是由五个模块组成的。但它并不意味着模拟信号的数字处理必须要包含五个模块,实际应用中可以根据需要作出取舍。例如,实际中如不需要重建模拟信号,就可以省去 D/AC 模块和平滑滤波模块。

1.2 连续时间信号回顾

在日常生活中,我们接触到的很多信号都属于连续时间信号,又称模拟信号。连续时间信号可分为连续周期信号和连续非周期信号。在连续时间信号处理中,傅里叶变换是一种非常重要的信号处理方法,对此我们在“信号与系统”这门课中已经进行过详细讲解,下面我们作一下简要的回顾。

1.2.1 连续周期信号的傅里叶级数

设 $x(t)$ 是一周期信号,其周期为 T_0 ,即

$x(t) = x(t + mT_0)$, 其中 m 为整数, T_0 为常数。

若 $x(t)$ 满足如下的 Dirichlet 条件:

(1) 在一个周期内的能量是有限的,即

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.2.1)$$

(2) 如果在任一周期内有间断点存在,则间断点的数目应该是有限的。

(3) 在任一周期内极大值和极小值的数目应该是有限的。

那么,可将 $x(t)$ 展成如下形式的傅里叶级数:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (1.2.2)$$

我们可将(1.2.2)式理解为周期信号 $x(t)$ 的分解。式中 $X(k\Omega_0)$ 为傅里叶系数, 其值为:

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (1.2.3)$$

它代表 $x(t)$ 中第 k 次谐波的幅度。需要注意, $X(k\Omega_0)$ 是离散取值的, 因为 k 只能取整数。(1.2.3)式称为指数形式的傅里叶系数。

1.2.2 连续非周期信号的傅里叶变换

设 $x(t)$ 是一连续时间信号, 若 $x(t)$ 满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.2.4)$$

那么, $x(t)$ 的傅里叶变换存在, 并定义为:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1.2.5)$$

其反变换是

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1.2.6)$$

式中, $\Omega = 2\pi f$ 为角频率, 单位是 rad/s。 $X(j\Omega)$ 是 Ω 的连续函数, 称为信号的频谱密度函数, 或简称为频谱。

实现傅里叶变换, 除了要满足(1.2.4)式所给出的条件外, 与 $x(t)$ 展成傅里叶级数一样也需要满足 Dirichlet 条件。除了将考虑的区间由一个周期扩展到 $(-\infty, \infty)$ 外, 其 Dirichlet 条件的表示方法和傅里叶级数是一样的。其中与 $x(t)$ 展成傅里叶级数的第(3)条要求相对应的条件来自于傅里叶变换的定义, 即

$$|X(j\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.2.7)$$

因此, 只要 $x(t)$ 满足绝对可积的条件, $X(j\Omega)$ 便是有界的, 即傅里叶变换存在。

1.2.3 傅里叶级数与傅里叶变换的区别与联系

傅里叶级数对应的是连续周期信号, 而与傅里叶变换对应的是连续非周期信号; 前者要求信号在一个周期内的能量是有限的, 而后者要求信号在整个时间内的能量是有限的。

此外, 傅里叶级数的系数 $X(k\Omega_0)$ 是离散的, 而傅里叶变换 $X(j\Omega)$ 是 Ω 的连续函数。由此可见, 傅里叶级数和傅里叶变换二者的物理含义不同, 因而量纲不同。 $X(k\Omega_0)$ 代表了周期信号 $x(t)$ 的第 k 次谐波幅度的大小, 而 $X(j\Omega)$ 表示频谱密度。读者在有关“信号与系统”的教科书中, 可看到关于连续时间信号傅里叶级数和傅里叶变换的详细讨论。

下面给出几个常用周期信号傅里叶变换的例子。