闻厚贵 著

# 初中数学解题思维

北京工业大学出版社

# 初中数学解题思维

闻厚贵　编著

北京工业大学出版社

## 内 容 摘 要

本书按先代数后几何的顺序，把初中数学分成十二个单元，在每个单元之前，给出知识提要，然后举出富于思考性的典型问题若干个，引导学生运用观察、联想的方法，探求解题的思路，寻求题断与题设之间的多种逻辑道路；并从广度和深度上发掘所解题目的内涵，在获解之后，作开拓性的引申，把原来表面上不关联的题目联系起来，形成一个题组、一个系列.

本书供初中师生参考，有助于提高学生的数学解题能力和逻辑思维能力.


**初中数学解题思维**

闻厚贵 编著

*

北京工业大学出版社出版

各 地 新 华 书 店 经 销

徐 水 宏 远 印 刷 厂 印 刷

*

1995 年 5 月第 1 版　1996 年 4 月第 1 版第 3 次印刷

787×1096 毫米 32 开本　10.5 印张　235 千字

印数：22001－33000 册

ISBN 7-5639-0444-1/G・219

定价：8.90 元

（京）新登字 212 号

# 序

中学生学习数学的最大困惑是，即使做了100道题，遇到第101道题，仍有束手无策之感．有些数学教师想通过“题海战术”让学生多做题目的办法，以解决学生的上述困惑，但这样做的结果既加重了学生负担，又没有达到理想的效果．

这是为什么呢？第一，就题论题，把解题的思维过程严格局限在本题的范围之中．解决了一题，得到一点知识，这些知识点在学生的大脑知识库里，呈点状分布，覆盖率很低．第二，就事论事，只注重教给学生解这一题的具体方法，而忽视教给学生探求和掌握解决这一类问题的方法．

要从根本上改变这种被动状态，就应该从初中开始，在数学课中加进数学方法论的教学内容．具体地说，首先要在解题教学中，引导学生运用观察、联想的方法，探求解题的思路，寻找题设与题断之间的多种逻辑通路．其次还要从广度和深度上发掘所解题目的内涵，在获解之后，作开拓性的引申，把原来表面上互不关联的题目联系起来，形成一个题组、一个系列．

如果我们做到了这些，就可以使学生大脑知识库里的知识结构呈网状分布，从而大大提高知识的覆盖率．

闻厚贵同志积多年的教学经验，在《不等式证法》出版之后，又推出了新作《初中数学解题方法》一书，可谓是给初中数学解题教学克服“题海战术”的毛病，提供了良方．他在这本书中，将初中数学知识按代数、几何分成12个单元．每单元先给出知识提要，然后举出富于思考性的典型问题若干个，引导读者进行观察和联想，接着探求解题思路，获得

多种解法．但并不就此止步，他将问题进一步引申，发现一系列相关命题，形成有机联系的问题链，使原来的一个知识点，扩大成为一个知识网．

这本书的特点还在于，在内容安排和深浅程度上，它与初中数学教学基本同步，十分便于教师和学生使用．我相信，这本书的出版将有助于初中学生解题能力的提高，有助于中学数学教学方法的改进，从而提高初中数学的教学质量．

正因为如此，我热忱地向全国广大初中学生和数学教师，推荐这本佳作．

胡炳生　序于安徽师大

1988年11月15日



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb

# 再版说明

本书第一版是以当时全日制中学数学教学大纲中的初中阶段的要求为主要依据编写的，其内容涉及到初中各年级的每一个方面内容．此次再版是依照九年义务教材的要求，删去了初中阶段不要求重点掌握的内容．

本书自1989年出版后，在读者中引起了较大的反响，很多读者在来信中就该书内容安排的合理性、例题的代表性及解题思维过程的科学性等方面均给予了较高的评价．尤其是书中的例题，在该书出版后的几年里，每年都能从中找到与一些省市中招考试题完全一致的题目．如：该书中P24例5与1993年吉林省中招考试第四大题第二小题完全一致；P104例6与1994年安徽省中招考试第五大题第二小题完全一致；P316引申3与1992年安徽省中招考试第六大题和1993年山西省中招考试第七大题完全一致；P363引申2为1993年杭州市中招考试加试题第12小题的逆命题；P380例5与1993年徐州市中招考试第四大题相一致等等，从而使出版社多次重印。考虑到该书的内容特点，此次再版将《初中数学解题方法》改为《初中数学解题思维》，同时对书的内容也作了一定的修改，并更正了原书中的错误。

在修改过程中，尚强、程金保、潘金华、夏隆瑛、操兴洋、张天、王开之、吴用明、张达等同志提出了很多宝贵意见，一些同志还参预了修改，在此对以上同志表示衷心的谢意！

希望广大读者多加斧正。

编　者

1994年12月

# 目　　录

## 第一篇　代数



## 第二篇　平面几何

# 第一篇 代 数

## 第一章 绝对值与算术根

首先回忆一下本章有关知识：

### 一、绝对值

1. 实数 $a$ 的绝对值规定为：

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

2. $|a|$的几何意义为：在数轴上表示这个实数 $a$ 的点离开原点的距离.

3. 对于实数 $a$，$a$ 的平方为非负数，即 $a^2\geqslant 0$.

### 二、算术根

1. 正数 $a$ 的 $n$ 次方根叫做 $a$ 的 $n$ 次算术根；零的 $n$ 次方根叫做零的算术根.

2. 当 $n$ 为偶数时：

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

## 三、例题研究

**例 1** 已知$(x-16y)^2+(8y-1)^2=0$，且$x$、$y$为实数，求$x$、$y$.

〔观察、联想〕根据$x$、$y$为实数，知$x-16y$，$8y-1$亦为实数. 由于所给的条件是两个二项式平方的和为零，于是联想到实数的性质：任何实数的平方为非负数.

〔探求〕要求出两个量$x$、$y$，一般地是根据条件得出关于$x$、$y$的方程组，进而解之. 而本例仅给出一个等式，无直接的方程组可解. 根据观察，联想利用实数的性质，不难求出$x$、$y$.

**解** $\because$ $x$、$y$为实数，

$\therefore$ $x-16y$，$8y-1$亦为实数，

$\therefore$ $(x-16y)^2\geqslant 0$，$(8y-1)^2\geqslant 0$，

由于$(x-16y)^2+(8y-1)^2=0$，

$\therefore$ $x-16y=0$，$8y-1=0$.

解之得：$x=2$，$y=\dfrac{1}{8}$.

亦可根据实数的性质，借助判别式求$x$、$y$.

**解法二** 将$(x-16y)^2+(8y-1)^2=0$的左边展开整理得：

$$x^2-32yx+(320y^2-16y+1)=0.$$

$\because$ $x$为实数.

$\therefore$ $\Delta=(-32y)^2-4(320y^2-16y+1)\geqslant 0$，

$$-16^2y^2+64y-4\geqslant 0,$$

$\therefore \quad -4[(8y)^2-16y+1]\geqslant 0,$

$\therefore \quad -4(8y-1)^2\geqslant 0.$

又　$y$ 为实数，

$\therefore \quad (8y-1)^2\geqslant 0.$

而　$-4(8y-1)^2\leqslant 0,$

于是得　$(8y-1)^2=0,$

$\therefore \quad y=\dfrac{1}{8}.$

将 $y=\dfrac{1}{8}$ 代入已知条件得　$x=2,$

$\therefore \quad x=2,\ y=\dfrac{1}{8}.$

结论不变，变条件，得以下引申.

**引申 1**　已知 $x$、$y$ 为实数，且 $|x-16y|+(8y-1)^2=0$，求 $x$、$y$.

利用绝对值的性质：$|a|\geqslant 0$，得 $|x-16y|\geqslant 0$，即可求出 $x=2, y=\dfrac{1}{8}$.

**引申 2**　已知 $x$、$y$ 为实数，且 $\sqrt{x-16y}+|8y-1|=0$，求 $x$、$y$.

对于二次根式 $\sqrt{a}$，知 $a\geqslant 0$，即 $x-16y\geqslant 0$，再根据绝对值的性质可求出 $x=2,\ y=\dfrac{1}{8}$.

改变条件和结论，可得以下引申.

将本例与根式、分式联系起来，得

**引申 3**　已知 $\dfrac{|16-x^2|+4(x-2y)^2}{\sqrt{x+4}}=0$，求实数 $x$、$y$.

**略解** 由已知可得：$\begin{cases}16-x^2=0,\\x-2y=0,\\x+4>0.\end{cases}$

**解得** $x=4, y=2$.

将本例与方程的整数解联系起来，得

**引申 4** 已知 $|2y-24|+\sqrt{ax-y-x}=0$，$a$ 为何整数时，$x$ 为负整数.

**略解** 由条件得：$\begin{cases}2y-24=0,\\ax-y-x=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{12}{a-1},\\y=12.\end{cases}$

根据题意解得 $a=0,-1,-2,-3,-5,-11$ 时，$x$ 为负整数.

将实数的性质与方程是否有解联系起来，得

**引申 5** 若 $x$ 为实数，不解方程，试判断方程：

$\sqrt[4]{(x-6)^4}+(x^2-10x+25)=0$ 是否有解？

**略解** 原方程可转化为：$|x-6|+(x-5)^2=0$，

得 $\begin{cases}x-6=0,\\x-5=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=6,\\x=5.\end{cases}$ 无公共解，

$\therefore$ 原方程无解.

还可将左边的两项引申到三项，两个未知数 $x$、$y$ 引申到三个未知数 $x$、$y$、$z$.

**引申 6** 已知实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $|x+y+z-3c|+(2x+y-3z-4c)^2+\sqrt{x^2+y^2+c^2-2xy-2xc+2yc}=0$，

求 $x:y:z$ 的值.



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb

**略解** 根据条件可得

$$\begin{cases}x+y+z-3c=0\\2x+y-3z-4c=0\\x-y-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{9}c,\\y=\dfrac{8}{9}c,\\z=\dfrac{2}{9}c.\end{cases}$$

$\therefore\quad x:y:z=17:8:2.$

**例 2** $x$ 为何值时，$|3x-2|=2-3x$ 成立.

〔观察、联想〕观察等式左边 $|3x-2|$，想到绝对值的性质：$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0)\\-a(a<0).\end{cases}$ 观察等式两边，知其互为相反数.

〔探求〕要求出 $x$，首先应考虑如何去掉绝对值符号，进而考虑 $3x-2$ 的符号. 由于 $3x-2$ 与 $2-3x$ 互为相反数，当 $2-3x$ 的符号确定后，$3x-2$ 的符号也就随之而定. 根据 $|3x-2|\geqslant0$，可得 $2-3x$ 的符号.

**解**：$\because\quad |3x-2|\geqslant0$，

$\therefore\quad |3x-2|=2-3x\geqslant0$，

$\therefore\quad 3x\leqslant2$，

$\therefore\quad x\leqslant\dfrac{2}{3}.$

即当 $x\leqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$|3x-2|=2-3x$ 成立.

亦可根据互为相反数的特点来解.

**解法二** $\because\quad 3x-2$ 与 $2-3x$ 互为相反数，

又 $|3x-2|=2-3x\geqslant0$，

$\therefore\quad -(3x-2)\geqslant0$，

$\therefore\quad 3x-2\leqslant0.$

即　$x\leqslant\frac{2}{3}$.

因此，当 $x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，$|3x-2|=2-3x$ 成立.

改变本例的条件，可得以下引申.

**引申 1**　$x$ 为何值时，$|3x-2|=3x-2$ 成立.

**略解**　$|3x-2|=3x-2\geqslant0$，得 $x\geqslant\frac{2}{3}$.

**引申 2**　$x$ 为何值时，$|3x-2|=3-2x$ 成立.

**略解**　两边平方得

$$9x^2-12x+4=9-12x+4x^2,$$

$\therefore$　$5x^2=5$，　$x=\pm1$.

将本例引申到分式时.

**引申 3**　$x$ 为何值时，$\left|\frac{x-4}{1-x}\right|=\frac{x-4}{x-1}$ 成立.

**略解**　易知 $\frac{x-4}{x-1}\geqslant0$，

$$\therefore\quad \begin{cases}x-4\geqslant0\\x-1>0\end{cases}\ \text{或}\ \begin{cases}x-4\leqslant0,\\x-1<0.\end{cases}$$

$\therefore$　$x\geqslant4$ 或 $x<1$.

当等式两边都含有绝对值时.

**引申 4**　$x$ 为何值时，$\left|(x-3)\left(\frac{3}{2}-x\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-x\right|\cdot|x-3|$ 成立.（$x$ 为任意实数时等式都成立.）

**引申 5**　$x$ 为何值时，$|1-x|=1+|x|$ 成立.

**略解**　两边平方得：$1-2x+x^2=1+2|x|+x^2$，

$\therefore$　$|x|=-x\geqslant0$，

即　$x\leqslant0$.

还可将本例引申到三角函数中.

**引申 6**　$x$ 为何值时，$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$　$(0°\leqslant x\leqslant 180°)$.

**略解**　$\because$　$\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\cos^2 x}=-\cos x\geqslant 0$,

$\therefore$　$\cos x\leqslant 0$.

由于　$0°\leqslant x\leqslant 180°$,

$\therefore$　$90°\leqslant x\leqslant 180°$.

**例 3**　化简：$\sqrt{x^2-4x+4}$.

〔观察、联想〕观察被开方数知，$x^2-4x+4$ 是完全平方方式 $(x-2)^2$. 根据根指数为 2，联想到算术根的性质：$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0). \end{cases}$

〔探求〕化简该式的关键在于如何化无理式为有理式. 利用算术根的性质容易化去根号.

**解**　原式 $=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases} x-2 (x\geqslant 2) \\ 2-x (x<2). \end{cases}$

还可用下面方法解答.

**解法二**　令 $\sqrt{x^2-4x+4}=y$,

平方得：　$y^2=x^2-4x+4$,

$\therefore$　$y^2=(x-2)^2$,

$\therefore$　$y=\pm(x-2)$.

由于　$y=\sqrt{x^2-4x+4}\geqslant 0$,

$\therefore$　当 $x-2\geqslant 0$ 时，$y=x-2$,

　　当 $x-2<0$ 时，$y=-(x-2)=2-x$.

改变被开方数，可得以下引申.

当 $x=\sin 52°$时，

**引申 1**　化简 $\sqrt{\sin^2 52°-4\sin 52°+4}$

**略解**　原式 $=|\sin 52°-2|$

$=2-\sin 52°$.

将本例的一项引申到两项时，

**引申 2** 已知$-3<x<2$,化简：

$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}$.

**略解** 由$-3<x<2$可得：$x+2>0$，$x-2<0$.

所以，原式$=|x+3|+|x-2|$

$=x+3-(x-2)$

$=x+3-x+2$

$=5$.

还可将判别式与根式的化简联系起来.

**引申 3** 已知一元二次方程$x^2-2ax+1=0$没有实数根，化简$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}$.

**略解** $\Delta=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$，

$\therefore\ -1<a<1$，

$\therefore\ \sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}$

$=|a-1|+|a+1|$

$=-(a-1)+a+1$

$=2$.

## 习 题 一

1. 在$3\leqslant|x|<8$中，求整数$x$.

2. 已知$m<0$，求$\dfrac{m+|m|}{1+|m|}-\dfrac{|m|}{m}$的值.

3. 化简

(1) $\sqrt{-a-b+2\sqrt{ab}}\quad(a<0,b<0)$，

(2) $\sqrt{(x-1)^2}-2|x-3|$，

(3) $|x|-x+\dfrac{|x|}{x}$，

(4) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$.

4. 已知$|2x-3y|+|4x-y-28|=0$,求 $x$、$y$.

5. 已知方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 无实数根,化简:$\sqrt{4a^2-12a+9}+|a-6|$.

6. 若 $\sqrt{x-3y}+\sqrt{3x+y}=0$,求$|x|+|y|+|xy|$的值.

7. 下列各式在什么条件下成立?

(1) $3x>x$; (2) $x^2>x$;

(3) $x\sqrt{y}=\sqrt{x^2b}$; (4) $\sqrt[3]{y}=\sqrt[6]{y^2}$.

8. $a$、$b$ 满足什么条件时,下列各式成立?

(1) $|a+b|=|a|+|b|$; (2) $|a-b|=|a|-|b|$;

(3) $|ab|=|a|\cdot|b|$; (4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

# 第二章　有　理　式

首先，让我们回忆一下本章有关知识：

## 一、整式

1. 整式加减法，实际上就是合并同类项

2. 整式乘法

乘法公式：

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(3) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

3. 整式除法

被除式＝除式×商式＋余式，若除式整除被除式，则余式为零.

4. 多项式的因式分解

(1)定义：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解.

(2)基本方法：提取公因式法、公式法、分解法、十字相乘法、配方法、待定系数法.

(3)应注意的问题：

①在没有特别注明要求时，因式分解是在有理数范围内进行，即系数皆为有理数.

②应把每个因式分解到不能再分为止.



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb