



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第四版

○ 盛祥耀 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013/9=5

2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第四版

盛祥耀 主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。作者按照“必须、够用”为度的原则,对本书第三版的结构和内容进行了较大的调整、修订,使其更能够适应目前高职高专教育的现状。全书包括空间解析几何及向量代数,函数、极限与连续、微分学、积分学、微分方程和级数等内容。

本书叙述流畅,讲解清晰,平易简练,要言不烦,易教易学,可作为高职高专院校各专业教材,也可供需要高等数学知识的技术人员自学、参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/盛祥耀主编.—4版.—北京:高等教育出版社,2008.2

ISBN 978-7-04-023155-7

I. 高… II. 盛… III. 高等数学-高等学校:技术学术-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004726 号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 董达英 封面设计 王凌波 责任绘图 黄建英
版式设计 王艳红 责任校对 张颖 责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 中国农业出版社印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 19.5
字 数 350 000

版 次 1987 年 10 月第 1 版
2008 年 2 月第 4 版
印 次 2008 年 2 月第 1 次印刷
定 价 27.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23155-00

第四版前言

考虑到高职高专的学制、培养目标、“必需、够用”的原则以及近几年的教学实践,我们对《高等数学》(第三版)作了以下的调整:

1. 全书不再分上、下册。适当调整内容,缩短篇幅。除打*号内容可以不讲外,有些内容因学校不同、专业不同可有不同的选取。这样做不影响内容的系统性。凡学时在64~96之间的均适用。如果每周安排4~6学时,16周即可完成,即一个学期结束高等数学的教学工作。这对完成高职高专的教学计划是有利的。

2. 全书各章不以一元与多元划分,内容包括空间解析几何、向量代数;函数、极限与连续;微分学;积分学;微分方程;级数等六章。多元函数微分法作为一元的延伸来处理,理论上不作系统介绍。删除了三重积分、曲面积分等并非必需的内容。

3. 除以上变动外,其他部分基本保持不变,仅在个别地方作了必要的修改。

4. 第一章中§1的内容是为未学过其内容的学生而写的,供他们自学。

我们相信这本第四版的高等数学教材将更符合高职高专院校数学教育的学时和内容要求,也期待在广大师生的教、学实践中提出意见,帮助本教材不断提高。

感谢北京印刷学院朱晓峰教授、孟赵玲副教授在百忙之中审阅了全书,并提出了许多宝贵意见。

盛祥耀

2007年9月于清华园

第三版前言

根据新近制定的“高等数学课程的教学基本要求”(送审稿),本版对第二版作了如下的一些修改。

1. 极限的“ $\varepsilon-N$ ”与“ $\varepsilon-\delta$ ”定义,改为描述性的,相应部分也随之修改。
2. 无穷小量的比较一节中保留定理一,删去定理二。
3. 导数的应用章中删除:罗尔定理与拉格朗日定理的证明、方程的近似根。
4. 积分章中删除:有理函数的积分法、近似积分法。改写了部分内容。
5. 多元函数及其微分法章中删除:全微分在近似计算中的应用、曲线
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$$
的切线方程与法平面方程。引进记号 f'_1, f'_2 等。
6. 无穷级数章中删除:幂级数收敛半径的存在性定理、近似计算。改写了泰勒级数的部分内容。
7. 常微分方程章中删除:可化为 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 型的方程、伯努利方程、微分方程的近似解、可降阶的高阶微分方程、弹簧振动问题的解法。
8. 订正了几处错误或不当之处。
9. 数学家史略分散到各有关内容之中。

编者

2003年12月于清华园

第一版前言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的。全书共十二章,分上下两册出版。上册包括:空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章。把空间解析几何放在第一章讲授,是考虑到新生入学时学习热情很高,他们期待学习新的知识。如把函数作为第一章似不能满足这个要求。几年实践说明,这样安排较合适。当然,把它放在定积分之后,也是可以的。下册包括:多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章,最后附有数学史料。

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外,还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求(讨论稿)及中央电大的教学大纲。另外,我们吸收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法:全书不写多余的内容,所写内容均为教学所必需,但根据各专业的需要可以有所选取。例如,某些专业可以不学面积分、傅氏级数。类似这些内容我们用*号表示。为了便于自学,安排了不少数量的例题,讲授时可酌情采用。本书每节后有习题,每章后有总习题。习题数量适中,多数应让学生完成。答案附在每章之后。

本书内容用150学时左右就能讲完,如果每学期以17周计算,那么第一学期每周可排5学时,第二学期每周可排4学时。

编写本书时,参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》,同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第二版);盛祥耀、葛严麟、胡全德、张元德四人编的《高等数学辅导》,同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》;别尔曼著、景毅等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》(未出版)。在此,对以上所提到的作者表示感谢。

限于编者水平,有不当之处,希望广大读者提出宝贵意见。

盛祥耀

1985年12月于清华园

目 录

第一章 空间解析几何 向量代数	1
§ 1 备用知识	1
习题	8
§ 2 空间直角坐标系	8
习题	10
§ 3 曲面、曲线的方程	11
习题	17
§ 4 向量及其加减法 数与向量的乘积 向量的坐标表示式	18
习题	24
§ 5 数量积 向量积	25
习题	31
§ 6 平面的方程	32
习题	34
总习题	35
第一章习题答案	35
第二章 函数 极限 连续	38
§ 1 映射与函数	38
习题	45
§ 2 初等函数	45
习题	48
§ 3 函数的简单形态	49
习题	51
§ 4 数列的极限 函数的极限	52
习题	58
§ 5 无穷小量与无穷大量 无穷小量的运算	58
习题	61
§ 6 极限运算法则	61
习题	65
§ 7 两个重要极限	65
习题	71
§ 8 无穷小量的比较	72

习题	75
§ 9 函数的连续性	75
习题	82
§ 10 二元函数及其极限与连续	83
习题	86
总习题	86
第二章习题答案	88
第三章 微分学	91
§ 1 导数概念	91
习题	97
§ 2 函数的微分法	97
习题	104
§ 3 微分及其在近似计算中的应用	105
习题	115
§ 4 高阶导数	116
习题	122
§ 5 极值 最值	122
习题	133
§ 6 未定型的极限	134
习题	139
§ 7 曲线的凹凸及拐点 函数作图	140
习题	143
总习题	143
第三章习题答案	145
第四章 积分学	149
§ 1 原函数与不定积分	149
习题	153
§ 2 凑微分法(简称凑法)	153
习题	159
§ 3 变量置换法与分部积分法	161
习题	166
§ 4 定积分概念	166
习题	171
§ 5 定积分的性质	172
习题	175
§ 6 定积分的基本公式(牛顿-莱布尼茨公式)	176
习题	180
§ 7 定积分的变量置换法与定积分的分部积分法	181

习题	186
§ 8 反常积分	186
习题	189
§ 9 定积分的应用	189
习题	197
§ 10 二重积分	199
习题	210
§ 11 曲线积分	211
习题	220
总习题	221
第四章习题答案	222
第五章 微分方程	227
§ 1 微分方程的基本概念	227
习题	229
§ 2 一阶微分方程	229
习题	238
§ 3 高阶线性常系数微分方程	240
习题	251
总习题	251
第五章习题答案	252
第六章 无穷级数	254
§ 1 常数项级数的概念及其性质	254
习题	258
§ 2 正项级数的收敛性	258
习题	263
§ 3 任意项级数	264
习题	268
§ 4 幂级数	268
习题	274
§ 5 函数展开为幂级数	274
习题	278
§ 6 傅里叶级数	278
习题	286
总习题	287
第六章习题答案	287
附积分表	290

第一章 空间解析几何 向量代数

§1 备用知识

一、极坐标

1. 极坐标

在平面上选定一点 O , 并在水平位置上作一条半射线 OA , 其上规定单位长. 点 O 称为极点, OA 称为极轴, 极轴与半射线 OB 之间的夹角 θ 称为辐角 (图 1-1) 它可正可负, 当极轴绕极点以逆时针方向旋转到 OB 时的角 θ 为正, 反之, 顺时针为负. θ 也可以大于 2π 或小于 -2π , 例如 $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ 是指当极轴转到 $\frac{\pi}{4}$ 后再以逆时针方向转 2π (图 1-1). 这样在平面上建立了极坐标系.

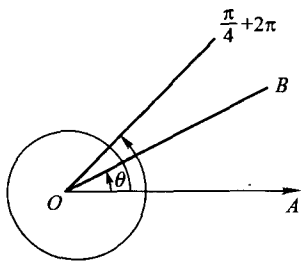


图 1-1

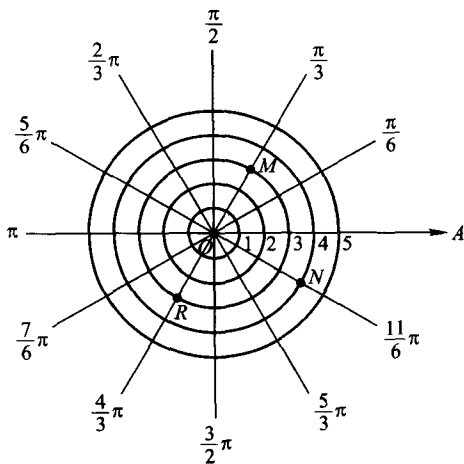


图 1-2

下面介绍在极坐标系中点与有序数组之间的关系.

在平面上任意给定一点 M , 它与极点 O 的距离记为 ρ , 称为点 M 的极半径、半射线 OM 的辐角为 θ , 则点 M 就对应着一个有序数组 ρ, θ , 记作 (ρ, θ) 或 $M(\rho,$

θ). ρ, θ 称为点 M 的极坐标. 反之, 给定了一个有序数组 (ρ, θ) , 在平面上就对应着一点 M . 从而建立起平面上的点与有序数组 (ρ, θ) 之间的对应关系. 如 $\left(3, \frac{\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ 分别对应着平面上点 M 和 N (图 1-2), 极半径 ρ 也可以为负值. 如 $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ 是在辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的半射线 OM 的相反方向上距极点 O 为 3 单位距离的点 R (图 1-2).

2. 极坐标与直角坐标之间的关系

所谓极坐标与直角坐标之间的关系是指: 极坐标系中的极点 O 、极轴 OA 与直角坐标系中的原点、 x 轴的正向分别重合时, 点 M 的极坐标与直角坐标之间的关系.

由图 1-3, 易得

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (1)$$

运用公式①, 可以将平面上一条曲线在直角坐标系下的方程化为极坐标系下的方程, 后者简称为极坐标方程.

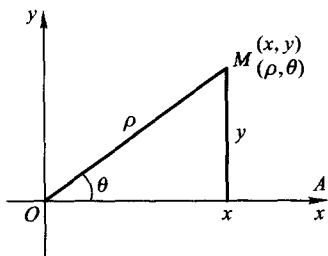


图 1-3

例 1 试将直角坐标系下圆心在原点, 半径为 R 的圆的方程 $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$, 为常数) 化为极坐标方程.

解 将公式①代入 $x^2 + y^2 = R^2$, 得

$$\rho = \pm R.$$

取正号①. 所以圆心在极点, 半径为 R 的圆的极坐标方程为

$$\rho = R. \quad (\text{图 1-4})$$

例 2 试将直角坐标系中圆的方程 $x^2 + y^2 = 2Rx$ (R 为大于 0 的常数) 化为极坐标方程.

解 将公式①代入, 化简后得该圆的极坐标方程

$$\rho = 2R \cos \theta. \quad (\text{图 1-5})$$

3. 极坐标方程的图形

作极坐标方程的图形通常要做两方面的工作. (1) 对称性的判定. 当极坐标中的 θ 换为 $-\theta$ 时, 该极坐标方程不变或 ρ 不变, 则该方程所表示的图形关于极轴对称 (图 1-6). 当极坐标方程中的 θ 换为 $\pi - \theta$ 时, 该极坐标方程不变或 ρ 不变, 则该方程所表示的图形关于半射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称. (图 1-6). 请注意, 由于点

① 该圆的极坐标方程也可取 $\rho = -R$, 它与 $\rho = R$ 表示同一个圆, 通常取 $\rho = R$.

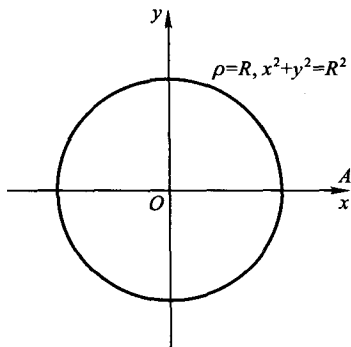


图 1-4

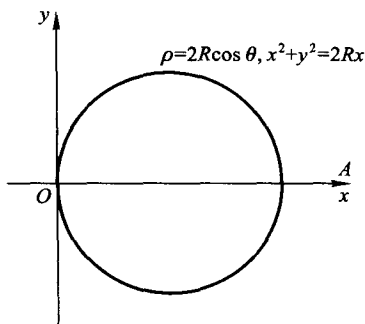


图 1-5

的极坐标表示式不唯一,所以当上述判定不成立时,不能得出关于极轴或半射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 不对称的结论.(2) 画出在图形上一系列能反映图形变化的点,并把这些点连成光滑的曲线,从而得出其图形.

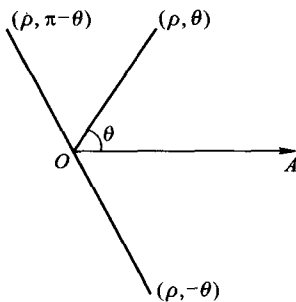


图 1-6

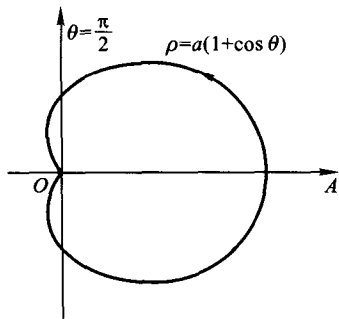


图 1-7

例 3 试作极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的图形,其中 a 为大于零的常数,该图形称为心形线.

解 对称性:当 θ 换成 $-\theta$ 时, $\rho = a(1 + \cos(-\theta)) = a(1 + \cos\theta)$,即 ρ 不变,所以图形对称于极轴.

列表:只需列出 θ 由 0 到 π 的对应值.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π
ρ	$2a$	$1.87a$	$1.5a$	a	$0.5a$	0

把表上的对应点描在图上并连成光滑曲线. 再利用图形关于极轴对称, 从而作出 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的图形 (图 1-7). 图形上的箭头是指当辐角 θ 增大时图形上对应点的走向.

例 4 试作 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 的图形, 其中 a 为大于零的常数. (此图形称为双纽线).

解 对称性: 当 θ 换成 $-\theta$ 时, 方程不变, 又 θ 换成 $\pi - \theta$ 时, 方程也不变. 所以图形关于极轴对称, 也关于半射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称. 当 θ 在 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{3\pi}{4}$ 之间时, 方程右边不为正, 所以此间无图形. 因而只需列出 θ 由 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 之间的对应值, 见图 1-8.

列表

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	$0.7a$	0

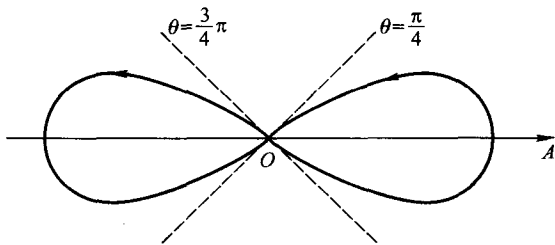


图 1-8

图形上的箭头是指: 当 θ 增大时图形上对应点的走向.

二、几种常见的参数方程

1. 圆的参数方程

圆心在原点半径为 R 的圆的参数方程为 (图 1-9)

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = R \sin t, \\ y = R \cos t. \end{cases}$$

圆心在点 (a, b) , 半径为 R 的圆的参数方程为 (图 1-10)

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta, \\ y = b + R\sin\theta. \end{cases}$$

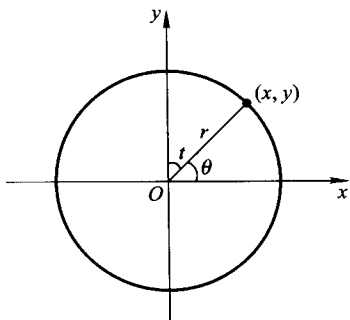


图 1-9

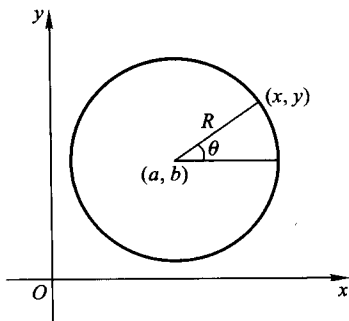


图 1-10

2. 椭圆的参数方程

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$$

当椭圆中心在点 (x_0, y_0) 且其长短轴分别平行于坐标轴时, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta, \\ y = y_0 + b\sin\theta. \end{cases}$$

3. 旋轮线(又称摆线)的参数方程

旋轮线的形成及其方程: 半径为 R 的圆, 其圆心在正 y 轴上且相切于原点. 当该圆沿 x 轴滚动(无滑动)时, 则圆周上原与原点相切的点所形成的轨迹称为旋轮线(图 1-11).

设点 $P(x, y)$ 为轨迹上的点(图 1-11), $\angle ACP = t$. 由轨迹可知

$$OA = \widehat{AP} = Rt,$$

则

$$\begin{cases} x = OA - AM = Rt - R\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = Rt - R\sin t, \\ y = PB + BM = R\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + R = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

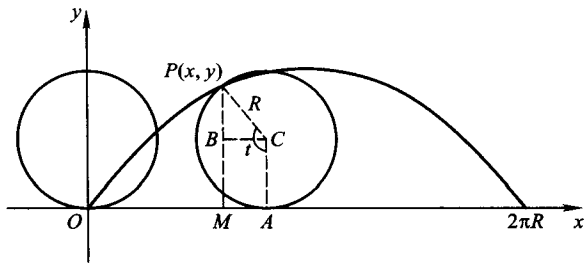


图 1-11

所以旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

滚动一周后点 P 的横坐标为 $2\pi R$.

三、二、三阶行列式简介

为了以后的需要,在此介绍二、三阶行列式.

1. 二阶行列式

设 a_1, b_1, a_2, b_2 为实数,我们将表达式 $a_1b_2 - a_2b_1$ 用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

表示,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

称上述记号为二阶行列式. a_1, b_1, a_2, b_2 称为元素,横排称为行,竖排称为列. 它的计算规则是:左上角与右下角元素的乘积减去右上角与左下角元素的乘积.

二元一次方程组的解可用二阶行列式表示. 设

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

则其解为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0).$$

读者可自证之.

例 5 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 4 \times (-3) = 22.$

例 6 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 7y = 1. \end{cases}$$

解
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 7 - 1 \times (-1)}{2 \times 7 - 3 \times (-1)} = \frac{36}{17}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times 1 - 3 \times 5}{17} = \frac{-13}{17}.$$

2. 三阶行列式

设 $a_i, b_i, c_i (i=1, 2, 3)$ 为实数, 我们将表达式

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

表示, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

上式记号称为三阶行列式. $a_i, b_i, c_i (i=1, 2, 3)$ 称为元素, 横排称为行, 竖排称为列. 三元一次方程组的解也可用三阶行列式表示, 在此不再详述.

例 7 试计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - (-4) \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 221.$$

习 题

1. 指出下列各点在极坐标系中的位置:

$$A\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}\right), B\left(2, \frac{-\pi}{4}\right), C(-1, \pi), D\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right).$$

2. 将下列在直角坐标系中的曲线方程转化为极坐标方程.

$$(1) x^2 + y^2 = -2Ry \quad (R > 0); \quad (2) x^2 + y^2 = 4x;$$

$$(3) x^2 + y^2 + x + y = 0.$$

3. 试作下列极坐标方程的图形.

$$(1) \rho = 4(1 - \cos\theta);$$

$$(2) \rho = 1 + \sin\theta;$$

$$(3) \rho = 2(1 - \sin\theta);$$

$$(4) \rho = 2;$$

$$(5) \theta = \frac{\pi}{4}.$$

4. 写出下列各方程的参数方程.

$$(1) \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; (2) x^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad (a > 0); (3) x^2 + y^2 = 2x.$$

5. 试计算下列各行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; (2) \begin{vmatrix} 8a-9b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix}; (3) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}; (4) \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

§2 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间取三条相互垂直且相交于一点的数轴(一般讲它们的长度单位相同),其交点是这些数轴的原点,记作 O . 这三条数轴分别叫做 x 轴、 y 轴和 z 轴. 一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上,那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向规定如下:从面对正 z 轴看,如果 x 轴的正方向以逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 时,正好是 y 轴的正方向,这种放置法称为右手系统. 右手系统可形象地用右手表示,当我们右手的食指、中指、大拇指相互垂直时,若食指指向 x 轴的正方向,中指指向 y 轴的正方向,那么大拇指就指向 z 轴的正方向. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间