中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

微积分

白素英　吕保献　主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

微积分

中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

微积分

主　编：白素英　吕保献
副主编：石　琦　徐伟刚　王福义
主　审：韩云瑞
编　委：（按姓氏笔画排序）
王福义　白素英　石　琦　吕保献
刘育江　张淑娟　徐伟刚　隋葳葳

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/白素英,吕保献主编.—武汉:武汉大学出版社,2008.3
21世纪职业院校规划教材·数学系列
ISBN 978-7-307-06105-7

Ⅰ.微… Ⅱ.①白… ②吕… Ⅲ.微积分—高等学校:技术学校—教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第010840号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务公司
开本:787×1092　1/16　印张:11.125　字数:269千字　插页:1
版次:2008年3月第1版　　2008年3月第1次印刷
ISBN 978-7-307-06105-7/O·379　　定价:22.00元

内容简介

本书是中国高等教育学会教育数学专业委员会组织编写的“高职高专精品规划教材”之一.是作者经过二十多年教学实践和在吸收我国“十五”期间高职高专经济管理类高等数学教改成果的基础上编写而成的.本书在内容安排及编写格式上，充分考虑到高职高专学生的特点，紧密联系实际，并把数学知识与教学方法融合为一体，通俗易懂，简明适用，便于自学.书中列举了一些日常生活中有趣的实例，以提高学生的学习兴趣和运用数学知识解决实际问题的能力.作者坚持以实用为主，以“理论必需、够用为度”的教学原则，突出三个基本，即“基本概念、基本思想、基本方法”，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本理论，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础与良好的数学素质.在编写过程中，我们努力使教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材.

本书主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分，偏导数与全微分，MATLAB在微积分学中的应用等.本书内容简捷，概念清晰，语言简明，注重培养学生用数学概念、数学思想及数学方法来消化吸纳经济概念及经济原理的能力，强化学生应用所学的数学知识求解数学问题的能力，特别是将数学软件包MATLAB结合具体教学内容进行讲授，可以极大地提高学生利用计算机求解数学模型的能力.每节后附有相应的思考题与练习题.每章后附有习题和自测题.在每章的后面还附有与微积分学发展有关数学家的经典故事，以扩大知识面，增加学习兴趣.

本书既适合高职高专院校使用，也适合成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用，还可以作为经济管理人员更新知识的自学或参考用书.

前 言

教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位. 为了适应高等院校培养精理知文的应用型、复合型高级专门人才，为了能更好地将数学课程与实际经济管理专业教学相结合，中国高等教育学会教育数学专业委员会，在认真总结全国高职高专院校经济类各专业高等数学课程教学改革经验的基础上，组织编写了"21世纪高职高专规划教材"，本书正是其中之一.

本教材内容的选取充分体现了高职高专基础课教学中"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，以"强化概念，注重应用"为依据，既考虑了人才培养的应用性，又能使学生具有一定可持续发展性. 在教材编写过程中，我们主要遵循以下原则：

1. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣. 培养学生用数学的原理和方法消化吸收经济概念、经济原理和专业知识的能力. 加强数学建模教学内容，将经济问题转化为数学问题的思想贯穿各章，注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换.

2. 注重对学生能力的培养，注意提高学生基本素质. 对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入、取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础. 为了突出重点，强化对难点的理解、消化，对一些重点问题给出说明或注意.

3. 缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当把握教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分学的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性.

4. 结合具体教学内容学习数学软件包 MATLAB，便于读者结合实际教学条件灵活处理，力求做到易教、易学、易懂、易用.

5. 充分考虑高职高专学生的特点，以符合高职高专学生的认知结构，便于学生自学. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力，以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养. 对课程的每一主题都尽量从几何、数值和解析三个方面加以体现，避免只注重解析推导.

6. 注意相关概念及结果的实际情况解释，力求表达确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与数学方法的阐述. 注意培养学生综合素质，体现数学课改革的新思路. 数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

7. 每节后附有思考题和练习题，通过思考题试图达到使学生能从新的角度理解概念，掌握运算. 练习题难度较低，主要为学生巩固知识提供素材. 每章后附有习题和自测题，习题可以作为本章的综合练习题，自测题可以作为每章学完后的小测验.

另外，本书的一个显著特色是紧密结合了高职高专经济管理类专业高等数学的教学实际，在各章节的知识体系中融入了一些经济管理类专业的知识，这种有针对性的安排融会了作者多年来从事高等数学教学的经验.

全书共分六章，主要内容包括函数、极限、连续，导数与微分，导数的应用，不定积分与定积分，偏导数与全微分，MATLAB在微积分学中的应用等. 书后还附有各章的习题与自测题的参考答案.

本书的编写是在中国高等教育学会教育数学专业委员会的指导下、部分高职高专院校的教师通力协作的结果. 本书由白素英、吕保献担任主编，石琦、徐伟刚担任副主编. 哈尔滨金融高等专科学校的石琦、青岛滨海学院的王福义编写了第1章；白素英编写了第2章；青岛飞扬职业技术学院的徐伟刚编写了第3章；安徽商贸职业技术学院的刘育江编写了第4章；河南工业职业技术学院的吕保献编写了第5章；北京市崇文区职工大学的张淑娟编写了第6章. 河北农业大学海洋学院的隋崴崴参与了本书的校对审阅工作. 全书的结构安排、统稿、定稿工作由白素英承担.

本书的编写得到了中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长、清华大学韩云瑞教授的大力支持和热情帮助，他对本书的编写进行指导，提出了许多宝贵的意见并为本书作了主审. 武汉大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，编写时间较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来.

所有意见和建议请发至：bsy19591231@sina.com，作者不胜感谢.

作　者

2007年9月

目　录

第1章　函数　极限　连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的主要对象. 极限也是高等数学中的基本概念，极限理论是近代微积分学的理论基石，近代微积分学中的许多重要概念都是用极限作为工具来定义的. 本章包括函数的概念和各种性质、极限理论，以及连续函数等. 这些内容是整个高等数学的基础知识.

§1.1　函数概念及其基本性质

1.1.1　函数的概念

在自然界中，存在着各种变化着的量，一些变量之间存在着相互之间的联系，函数就是描述变量之间相互依赖关系的基本工具.

引例1　移动通信推出的一项业务，手机每月基础费10元，在此基础上，每分钟通话0.25元，则每月通话 x 分钟的话费(元)

$$y = 10 + 0.25x \tag{1.1}$$

对于每一个给定的通话时间 x，根据式(1.1)给定的规则，有惟一确定的话费 y 与之对应.

引例2　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜的气温变化，如图1.1所示，可见对于一昼夜的每一个时刻 t，都有惟一确定的温度 T 与之对应.

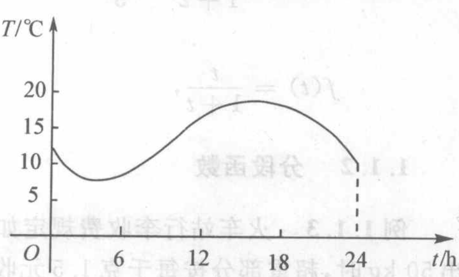

图 1.1

定义1.1.1　设 D 是一个非空的实数集合，如果对 D 中的每一个 x，按照某种对应规则 f，都有惟一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域.

对于 $x_0 \in D$，按照对应规则 f，有确定的值 y_0(记为 $f(x_0)$)与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值. 当自变量 x 取遍 D 中所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合称为函数的值域，记为 W，即 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

在许多纯数学问题中，函数关系经常用一个解析表达式表示，如果不加特殊说明，函数的定义域就是使函数表达式中涉及的所有运算都有意义的实数集合. 这样的定义域称为函数的自然定义域. 在实际问题中，函数的定义域需要根据问题的实际意义确定.

函数的定义域与对应规则是函数的两个要素. 两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应规则均相同.

函数的常用表示法：

1. 解析法

自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又称解析表达式）来表示的方法. 但是并非一个关于 x 与 y 的解析式一定表示一个函数关系. 如 $y=\sqrt{-2-x^2}$，在实数范围内没有意义，不是一个函数关系.

2. 图像法

在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

3. 表格法

自变量的值与对应的因变量的值列成表格的方法.

例 1.1.1 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$； (2) $f(x)=\sqrt{x+3}+\ln(x-2)$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，即 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq 0$.

即定义域为
$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2) 该函数的定义域应满足不等式组 $\begin{cases}x+3\geqslant 0\\x-2>0\end{cases}$

解为 $x>2$，即定义域为 $(2,+\infty)$.

例 1.1.2 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f(2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(t)$，$f(x+1)$.

解 $f(2)=\dfrac{2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$， $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，

$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$， $f(x+1)=\dfrac{x+1}{1+(x+1)}=\dfrac{x+1}{x+2}$.

1.1.2 分段函数

例 1.1.3 火车站行李收费规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按每千克 0.5 元收费，当超出 50 kg 时，超重部分按每千克 1.5 元收费，则行李收费 $f(x)$（元）与行李重量 x（kg）之间的函数关系为

$$f(x)=\begin{cases}0.5x, & x\leqslant 50\\2.5+1.5(x-50), & x>50\end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的解析式表示的函数称为分段函数. 在分段函数中，将整个定义域分成若干段的点称为分界点.

例 1.1.4 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\x^2 & 0\leqslant x<1\\1 & x\geqslant 1\end{cases}$

为一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,0)\cup[0,1)\cup[1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，分界点为 0，1. 其图像如图 1.2 所示.

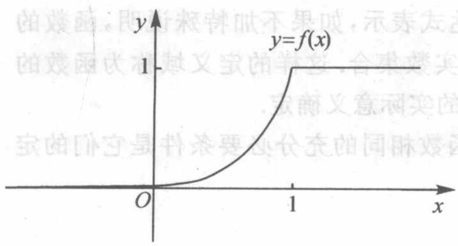

图 1.2

1.1.3　反函数

定义 1.1.2　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.若对于值域 W 中的每一个 y 的值,根据 $y = f(x)$,在定义域 D 中有惟一确定的 x 与之对应,则称 x 是 y 的函数,记为 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)$ 的反函数.反函数的定义域为 W,值域为 D. $y = f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以 $y = f(x)$ 的反函数通常记为 $y = f^{-1}(x)$,$x \in W$.在同一坐标系下,直接函数与其反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称.

例如,指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 与其反函数对数函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 的图像如图 1.3 所示.

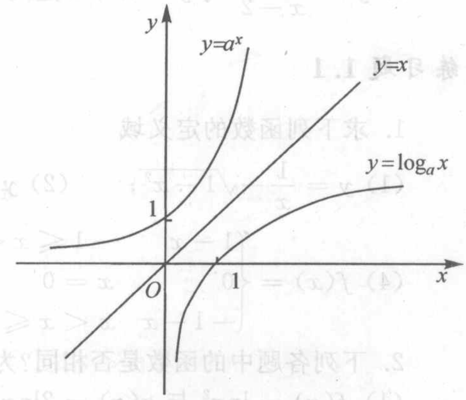

图 1.3

例 1.1.5　求函数 $y = \dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解　由 $y = \dfrac{x}{1+x}$　解得 $x = \dfrac{y}{1-y}$,改变变量的符号,得所求反函数为

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

1.1.4　函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b) 内有定义,对于(a,b) 内任意两点 $x_1 < x_2$,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 内单调增加(或单调减少).

例如,$y = x^2$ 在$(-\infty,0)$ 内单调减少,在$(0,+\infty)$ 内单调增加.而 $y = x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.若任给 $x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若任给 $x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T(T \neq 0)$,使得对一切 $x \in D$,有 $x + T \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数. T 为 $f(x)$ 的正周期.

如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $2T$,$3T$ 等都是 $f(x)$ 的周期.通常周期函数的周期指的是其最小正周期.例如,2π、4π 和 8π 都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期,但是通常只说 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b) 内有定义,若对于任意 $x \in (a,b)$,总存在一个正数 M,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间(a,b) 内有界,或称 $f(x)$ 为区间(a,b) 内的有界函数.否则称 $f(x)$ 在区间(a,b) 内无界,或称 $f(x)$ 为区间(a,b) 内的无界函数.

例如,对任意实数 x,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以 $\sin x$ 为$(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数.而函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$ 内无界,在区间$(1,+\infty)$ 内有界.

注:函数的奇偶性与函数的周期性是对整个定义域而言的,因而是整体性质;而函数的单调性与函数的有界性是对某区间而言的.

思考题 1.1

1. 两个函数相等的充要条件是什么?

2. $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $y = x+2$ 是同一函数吗?为什么?

练习题 1.1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;　(2) $y = \ln(4-x^2)$;　(3) $y = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$;

(4) $f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1-x & x < x \leqslant 2 \end{cases}$.

2. 下列各题中的函数是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$;　(2) $y = 3x+2$ 与 $s = 3t+2$;

(3) $f(x) = x+1$ 与 $g(x) = \sqrt{(x+1)^2}$.

3. 判断下列函数的奇偶性

(1) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;　(2) $y = x(x-2)(x+2)$;　(3) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

4. 设 $f(x) = \dfrac{1}{x}$,求 $f(x+\Delta x) - f(x)$.

5. 计划造一个容积为 V 的圆柱形无盖蓄水池,已知其侧面单位面积的造价为底面单位面积造价的 2 倍.如果底面的造价是 50 元 $/\mathrm{m}^2$,试建立蓄水池的总造价 A(元)与底面半径 r(m)的函数关系.

§1.2　初等函数

1.2.1　复合函数

在实际问题中,两个变量之间的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量来联系的.因此有下述定义.

定义 1.2.1　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,$u = \varphi(x)$ 的值域为 W_φ,若 $D_f \cap W_\varphi \neq \varnothing$,则称 $y = f[\varphi(u)]$ 为复合函数.其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

实际上,复合函数就是将一个函数 $u = \varphi(x)$ 带入另一个函数 $y = f(u)$ 的自变量位置得到的新的函数 $y = f[\varphi(u)]$.复合函数的定义域就是 D 中那些使得 $y = f(\varphi(x))$ 有意义的 x 组成的集合.

并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数.

例如,$y = \arcsin u$,$u = 2+x^2$,前者的定义域为$[-1,1]$,而后者的值域为$[2,+\infty)$,因此对于所有实数 x,运算 $\arcsin(2+x^2)$ 都没有意义,所以两者不能复合成复合函数.

复合函数也可以由多个函数复合而成,如 $y = f\{g[\varphi(x)]\}$.