普通高校专升本

高等数学

专升本考试命题研究组 编

考试指导

西北工業大學出版社

高等数学考试指导

专升本考试命题研究组　编
王向东　编

西北工業大學出版社

【内容简介】 为了广大考生更好地把握高等数学的主脉，跨越抽象、枯燥的门槛，增强学习兴趣，提高学习效率，获取高等数学的基本概念、基本理论和基本运算技能，具有本科学习所必须的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、基本运算能力以及综合运用其分析问题和解决问题的能力，并在应试中获得好成绩，编者在仔细研究专升本的考试大纲，认真分析近几年命题的基础上，以一种新颖别致的结构，科学系统的编排，生动活泼的形式，将考纲要求的内容简要、系统地展现给考生，使考生尽快地对繁杂、众多的数学概念，理论、公式能全面系统、层次分明地牢固掌握。并通过各单元的测试题和综合仿真模拟试题的强化练习，迅速提高应试能力。

本书分为基本知识单元测试及解析部分和模拟试题及解析部分，最后附录中给出一份往年考试试题及评分标准。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学考试指导/专升本考试命题研究组编. —西安：西北工业大学出版社，2004.12
(普通高校专升本丛书)

Ⅰ. 高… Ⅱ. 专… Ⅲ. 高等数学—高等学校—升学参考资料 Ⅳ. O13
ISBN 7-5612-1860-5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 123360 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
E-mail：fxb@nwpup.com
印 刷 者：陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本：787mm×1 092mm　1/16
印　　张：17.5
字　　数：433 千字
版　　次：2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：23.00 元

前 言

本套丛书严格按照最新的《普通高校专升本考试“教学、考试大纲”》编写，内容涵盖了“大纲”规定的所有考点和知识点，不仅有考点的讲解、分析，而且还附有仿真试题及解答，**最具权威，名副其实。**

为了帮助参加普通高校专升本考试的广大考生全面、系统、快速、高效地复习各门应试课程，我们特聘请著名高校中具有丰富的专升本考试辅导经验和评阅试卷经验的教授、专家，严格按照“大纲”精心编写了本套丛书。

本套丛书包括高等数学、大学英语、大学语文共三册。本套丛书不仅质量上乘，而且结构科学、合理，体系完备，是普通高校专升本考生的首选教材。各科教材均具有**“新、全、真、快”**四大显著特点：

(1)**新**　本丛书是目前惟一按最新“大纲”编写的第一套高等教育(普通高校)专升本考试教程。

(2)**全**　在编写过程中，编者既注重知识的系统性、完整性，又突出重点、难点、考点，并且节节把关，章章细审，逐项验收，力求做到不多、不重、不漏。考生通过做各章的强化练习题及仿真试卷，能及时发现自己的薄弱环节，便于查缺补漏，巩固复习成果，提高应试能力。

(3)**真**　编者均是具有很高知名度的专升本考试辅导名家、教授，且亲笔编写。书中积淀了他们多年来成熟的教学辅导方略，同时也吸纳了他们对专升本考试命题规律的研究成果，对考生复习具有极大的指导作用。

(4)**快**　针对性强，切题率高，短期复习，考前复习见效特别快。

由于时间所限，书中难免有疏漏和不足之处，敬请广大读者和同仁批评指正。本书一、二篇由康涛同志组织编撰，第三篇由操龙升和尹斐同志组织编撰。

我们相信本套丛书会为您考试成功助一臂之力。预祝参加普通高校专升本考试的广大考生取得理想的成绩。

专升本考试命题研究组

2004 年 10 月

目　录

第一篇　基本知识、单元测试及解析

第二篇　专升本模拟试题及解析

第三篇　附　录

第一篇　基本知识、单元测试及解析

第一章　函数、极限、连续

知识结构图

- 函数
  - 概　念
    - 定　义
    - 定义域确定的思路
    - 表示法
  - 分　类
    - 初等函数
      - 基本初等函数定义、性质、图形
      - 复合函数定义及分解
      - 初等函数
    - 隐函数
    - 分段函数
  - 反函数
    - 定义、表示法、求法、图象
  - 性　质
    - 奇偶性、单调性、有界性、周期性
- 极限
  - 定　义
    - 数列的极限
    - 函数的极限
      - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
      - 左、右极限
      - 极限存在的充要条件
  - 性　质
  - 无穷小(大)量
    - 定　义
    - 无穷小量的性质
    - 无穷小量的比较
    - 无穷小量与无穷大量的关系
  - 极限的四则运算法则
  - 两个重要极限
  - 求极限的常用方法
    - 分子或分母有理化
    - 利用极限的运算法则及函数的连续性
    - 两个重要极根
    - 无穷小量乘有界变量

- 连续
  - 定 义
    - 在点 x_0 连续的概念
    - 在 $[a,b]$ 上连续的概念
  - 间断点
    - 定 义
    - 分 类
    - 求 法
  - 在闭区间上连续函数的性质
    - 最大值、最小值定理
    - 有界性定理
    - 介值定理
    - 零点存在定理
  - 基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续

重点内容

本章是微积分学的引论部分，其中函数是我们今后研究的对象，函数的连续性是函数最重要的性态之一，而极限的理论和运算又是研究函数的工具。所以本章的重点概念是函数、极限及函数连续，本章的重点运算是求函数极限的初等方法。

本章是基础知识，也是学习后续内容的必备知识，因此是考试重点内容，题型多，内容覆盖面大，难度变化多，在整个试卷中约占 15%～20%。

主要题型

1. 求函数的定义域。
2. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式。
3. 判断函数的奇偶性和有界性，周期性，单调性。
4. 求给定函数的极限。
5. 无穷小量的比较。
6. 求函数的间断点或连续区间。
7. 判断分段函数在分段点处的连续性。

常见求极限的方法

1. 利用函数连续性的定义。若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；若 $f(x)$ 在 $u=u_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(x)=u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[u(x)]=f[\lim_{x\to x_0} u(x)]=f(u_0)$$

2. 利用极限的四则运算法则（注意须满足法则成立的条件）。

3. 对于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 为 x 的多项式，由无穷小量分出法可推导出公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

4. 对于求分式函数的极限：

(1) 若分子的极限为零，而分母的极限不为零，则利用无穷小量与无穷大量的关系，可得其所求极限为零。

(2) 若分母的极限为零，而分子的极限不为零，则利用无穷小量与无穷大量的关系，可得其所求极限不存在，记为 ∞。

(3) 若分子、分母的极限都为零，可通过分解因式或分子、分母有理化等方法进行恒等变形，然后约去分子、分母中的零因子后再求极限。

5. 利用两个重要极限：

(1) 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$($\dfrac{0}{0}$型) $=1$，可理解为 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$，其中 $\square$ 可以是 x，也可以是 x 的函数。

(2) 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$($1^\infty$ 型) $=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$($1^\infty$ 型) $=\mathrm{e}$，可理解为 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\square\to\infty}(1+\dfrac{1}{\square})^{\square}=\mathrm{e}$。

6. 利用无穷小量的性质：

无穷小量与有界函数或变量的乘积仍为无穷小量。

无穷大量的倒数是无穷小量。

有限个无穷小量的和、差、积仍是无穷小量。

7. 利用等价无穷小量代换法。在使用时，只能在乘除法中做整体代换或因子代换，不能在加减法中代换，并应记熟一些常用的等阶无穷小量。如 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$。

8. 利用变量代换法。

9. 利用左、右极限法。求分段函数在分段点处的极限时就须用左、右极限的方法。

10. 利用洛必达法则（第二章专门讲解此种方法）。

测试及解析

第一章测试题(一)

一、单项选择题

1. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是(　　)。

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 有界函数　　D. 周期函数

2. 下列各对函数中,两函数相同的是(　　)。

A. $f(x)=\cos x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

B. $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$

C. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

D. $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 与 $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x+2)$ 的定义域是(　　)。

A. $x=-2$ 且 $x\neq 0$　　B. $x>0$　　C. $x>-2$　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

4. 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$,则 $f(\cos x)=$(　　)。

A. $3-\sin 2x$　　B. $3+\sin 2x$　　C. $3-\cos 2x$　　D. $3+\cos 2x$

5. 函数 $y=e^x-1$ 的反函数是(　　)。

A. $y=\ln x+1$　　B. $y=\ln(x+1)$　　C. $y=\ln x-1$　　D. $y=\ln(x-1)$

6. 下列极限存在的是(　　)。

A. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=$(　　)。

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

8. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的(　　)。

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

9. 当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)$ 与 x 比较是(　　)。

A. 高阶的无穷小　　B. 等价的无穷小

C. 非等价的同阶无穷小　　D. 低阶的无穷小

10. 当 a 取(　　)时,函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 处处连续。

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. -1

二、填空题

11. 设 $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{x+1}{x^2}(x \neq 0)$，则 $f(x) =$ $\underline{\ x^2-x\ }$。

12. 函数 $y = \arcsin(1-x) + \lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域是 $\underline{\ [0\ 1)\ }$。

13. $y = (\operatorname{arccot}\frac{1-x}{1+x})^3$ 是由函数 $\underline{\ y=u^3\quad u=\operatorname{arccot}t\ }$ 复合而成。 $t=\frac{1-x}{1+x}$

14. 设 $f(x)$ 为奇函数，且 $F(x) = f(x)\cdot(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2})$，其中 a 为不等于 1 的正常数，试判断 $F(x)$ 的奇偶性 $\underline{\ 偶\ }$。

15. 设 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin kx}{\ln(1+2x)} = \mathrm{e}$，则 $k =$ $\underline{\ 2e\ }$。

16. 若 $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^2-2x+k}{x-3} = 4$，则 $k =$ $\underline{\ -3\ }$。

17. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x =$ $\underline{\ e^{-2}\ }$。

18. 变量 $f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$ 在过程 $x \to$ $\underline{\ -1\ }$ 时为无穷大量。

19. 函数 $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间是 $\underline{\ (1,2)\ (2,+\infty)\ }$。

20. 函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的间断点是 $\underline{\ -1\ }$，是第 $\underline{\ 一\ }$ 类间断点。

三、计算题

21. 设 $y = f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$，求 $f(\frac{\pi}{6})$，$f(\frac{\pi}{4})$，$f(-\frac{\pi}{4})$，$f(-2)$，并作出函数 $y = f(x)$ 的图形。

22. 设 $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$，求 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$，并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 的奇偶性。

23. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ a-1, & x = 0 \\ x^2+b, & x > 0 \end{cases}$，试确定 $f(x)$ 的定义域，并求常数 a 和 b，使 $f(x)$ 在定义域内连续。

24. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{9x^2+1} - 3x)$。 $\frac{1}{6}$

25. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$。 $\frac{1}{2}$

26. $\lim\limits_{n \to \infty}\{n[\ln(n+2) - \ln n]\}$。 2

27. 已知 $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x} = 5$，求 a 和 b。

28. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cos\dfrac{1}{x-\pi}$。

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x^2)}{\cos(1+x^2)}$。

四、证明题

30. 证明:方程 $x^5-3x+1=0$ 在 1 与 2 之间至少存在一个实根。

第一章测试题(一)解析

一、单项选择题

单项选择题的解题方法:

(1) 直接法:从题目的已知条件出发,经过验算、推理或证明,得出与选择题的某一选项相同的结论,这种决定选择项的方法,称为直接法。

(2) 筛选法:通过排除容易判断为错误的选择项,逐渐缩小选择范围,再进行比较和验证,选择正确的答案,这种解法又叫间接法或排除法。

(3) 赋值法:用满足条件的特殊值检验各选项是否正确,从而找出正确答案。

(4) 图示法:把题设条件或者备选答案用图形表示出来,从而选择正确答案。

以上常用方法中,直接法是基本的、可靠的方法,也是解选择题的首选方法。这种方法适用于解答概念、性质及解析式子类型的题目;赋值法适用于解答某个范围内成立的题型;图示法适用于解答集合或易作出图形的题型,对某些题上述几种方法都适用,应根据情况灵活运用,选择最简捷的方法。

1. B

解析 因为 $f(-x)=(-x)^3\sin(-x)=x^3\sin x=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数。故选择 B。

考点 函数的奇偶性的判定。

2. C

解析 A. $f(x)=\cos x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$,定义域相同,但对应规律不同。

B. $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域 D_f 为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$,而 $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ 的定义域 D_g 为 $[1,+\infty)$,$D_f\neq D_g$。

C. 因为 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)$,$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 与 $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ 对应规律相同,又 $D_f=D_g=(-1,1)$。

D. 因为 D_f 为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,$D_g$ 为 $(1,+\infty)$,故 $D_f\neq D_g$。

考点 函数的两个要素。

3. D

解析 要使 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$ 有意义,须有 $x\neq 0$,且 $2+x>0$,即

$$x>-2 \text{ 且 } x\neq 0$$

考点 函数定义域的求法。

4. D

解析　因为 $f(\sin x)=3-\cos 2x=3-(1-2\sin^2 x)=2+2\sin^2 x$，所以

$$f(u)=2+2u^2$$

由此有
$$f(\cos x)=2+2\cos^2 x=2+(1+\cos 2x)=3+\cos 2x$$

考点　函数的表示法。

5. B

解析　由 $y=e^x-1$ 解得，$e^x=1+y$，即 $x=\ln(y+1)$，再将 x,y 互换可得

$$y=\ln(x+1)$$

考点　求反函数的方法。

6. D

解析　A. 因为

$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}\neq\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在。

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}=\infty$，也不存在。

C. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 显然不存在。

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1}=1$

考点　极限的概念。

7. D

解析　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

考点　用第一个重要极限求极限。

8. B

解析　因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足三个条件，(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在只是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的必要条件。

考点　连续与极限的关系。

9. B

解析　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$，所以当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)$ 与 x 是等价无穷小。

考点　无穷小量的比较。

10. A

解析 因为 $f(x)$ 在 $x<0$ 和 $x>0$ 时连续，要求处处连续，须在分段点 $x=0$ 处也连续，由连续的充要条件知，$f(x)$ 在 $x=0$ 点一定左、右连续，即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x=1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a$$

要使 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=a$，只须 $a=1$。

考点 连续的充要条件。

二、填空题

11. $x(x-1)$

解析 1 因为 $f(\dfrac{x+1}{x})=\dfrac{x+1}{x^2}(x\neq 0)$，令 $u=\dfrac{x+1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{u-1}$，于是

$$f(u)=\frac{\dfrac{1}{u-1}+1}{(\dfrac{1}{u-1})^2}=u(u-1)$$

所以
$$f(x)=x(x-1)$$

解析 2 因为 $f(\dfrac{x+1}{x})=\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}(\dfrac{x+1}{x}-1)$，所以

$$f(x)=x(x-1)$$

考点 函数的表示法。

12. $[0,1)$

解析 因为函数 $y=\arcsin(1-x)+\lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的定义域是函数 $\varphi(x)=\arcsin(1-x)$ 及函数 $g(x)=\lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 定义域的公共部分，$\varphi(x)$ 的定义域是 $|1-x|\leqslant 1$，即 $x\in[0,2]$，$g(x)$ 的定义域是 $x\in(-1,1)$，所以函数 $y=\varphi(x)+g(x)$ 的定义域是 $[0,1)$。

考点 函数定义域的求法。

13. $y=u^3,u=\operatorname{arccot}v,v=\dfrac{1-x}{1+x}$

解析 $y=(\operatorname{arccot}\dfrac{1-x}{1+x})^3$ 是由 $y=u^3,u=\operatorname{arccot}v,v=\dfrac{1-x}{1+x}$ 复合而成。

考点 复合函数的分解。

14. 偶函数。

解析 利用 $f(x)$ 为奇函数的条件，计算 $F(-x)$。

$$F(-x)=f(-x)\cdot\frac{2-(a^{-x}+1)}{2(a^{-x}+1)}=-f(x)\cdot\frac{2a^x-(1+a^x)}{2(a^x+1)}=$$

$$-f(x)\cdot\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}=f(x)\cdot\left[\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right]=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是偶函数。

考点 函数奇偶性的判断。

15. 2e

解析　因为当 $x\to 0$ 时，$\sin kx\sim kx$，$\ln(1+2x)\sim 2x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{2x}=\frac{k}{2}=e$$

即

$$k=2e$$

考点　用等价无穷小代换法求极限。

16. -3

解析　$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，而 $x\to 3$ 时，$(x-3)\to 0$，所以当 $x\to 3$ 时，$(x^2-2x+k)\to 0$，即必有

$$\lim_{x\to 3}(x^2-2x+k)=9-6+k=0$$

所以 $k=-3$。

考点　当分母趋近于零时，分式的极限存在，分子必趋近于零。

17. e^{-2}

解析　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{-2}{x+1})^{\frac{x+1}{-2}}]^{-2}(1+\frac{-2}{x+1})^{-1}=e^{-2}$

考点　用第二个重要极限求极限。

18. $x\to -1$

解析　因为 $f(x)=\frac{x(x-1)\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$，只有当 $x\to -1$ 时，$f(x)$ 为无穷大量。

考点　无穷大量的概念。

19. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

解析　因为初等函数在定义区间内是连续的，该函数的定义区间即是连续区间，由 $y=\frac{1}{\ln(x-1)}$ 知，$x-1>0$，且 $x-1\neq 1$，可得 $x>1$ 且 $x\neq 2$，所以连续区间为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$。

考点　初等函数的连续性。

20. $x=-1$，$x=1$，一

解析　$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}$

在分段点 $x=-1$ 处，因为

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x)=-1$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x)$$

即 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 不存在，所以 $x=-1$ 是第一类不可去间断点。

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x)=1$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1$$

所以 $x=1$ 也是第一类不可去间断点。

考点　判断分段函数在分段点处的连续性和间段点的类型。

三、计算题

21. **解析**　因为　$y=f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant-\dfrac{\pi}{3}\\ -\sin x, & -\dfrac{\pi}{3}<x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & x\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

所以有

$$f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(-\frac{\pi}{4})=-\sin(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(-2)=0$$

$y=f(x)$ 的图形如图 1-1 所示。

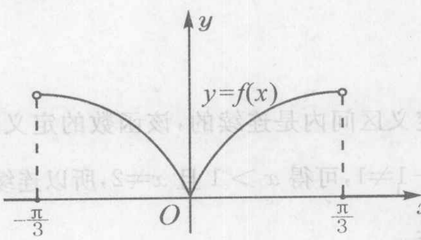

图　1-1

考点　分段函数函数值的求法和图形的画法。

22. **解析**　因为　$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=$

$$\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+2x^2+6(-x)-3]=2x^2-3$$

$$\varphi(-x)=2(-x)^2-3=2x^2-3$$

所以 $\varphi(x)$ 是偶函数。

同理

$$\psi(x)=6x$$

$$\psi(-x)=6(-x)=-6x=-\psi(x)$$

所以 $\psi(x)$ 是奇函数。

考点　函数的奇、偶性的判定方法。

23. **解析**　此分段函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，显然$f(x)$在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内均连续，欲使$f(x)$在定义域$(-\infty,+\infty)$内连续，只须它在分段点$x=0$处连续即可，这就必须使

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$$

而

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+b)=b$$

$$f(0)=a-1$$

于是$b=1=a-1$，从而$a=2,b=1$。

考点　分段函数的定义域及在分段点处连续性的判断。

24. **解析**　$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{9x^2+1}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x[(9x^2+1)-9x^2]}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{1}{6}$$

考点　极限的求法。

25. **解析**　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{(1-\cos x)}{x^2\cos x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}=$$

$$1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

考点　用第一个重要极限求极限。

26. **解析**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{[n\ln(n+2)-\ln n]\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n[\ln\dfrac{n+2}{n}]\right\}=$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{2}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]^2=$$

$$2\ln\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]=2\ln e=2$$

考点　用第二重要极限求极限。

27. **解析**　因为$x\to1$时，分母$1-x\to0$，欲使$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，必有

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$$

即

$$1+a+b=0,a=-b-1$$

于是

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+(-b-1)x+b}{1-x}=$$