国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

现代数学基础丛书 117

偏微分方程的调和分析方法

苗长兴　张　波　著

科学出版社
www.sciencep.com

0241.86/21
2008

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 117

偏微分方程的调和分析方法

苗长兴 张 波 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书利用调和分析的现代理论，特别是可微函数空间的各种实变刻画、三代 C-Z 奇异积分算子理论、Fourier 限制型估计、Littlewood-Paley 理论等应用到非线性偏微分方程的研究，主要内容涉及奇异积分算子在椭圆边值问题中的应用、抛物型方程的时空估计方法、Littlewood-Paley 理论与不可压 Navier-Stokes 方程、Bourgain 的 Fourier 截断方法与能量归纳法、Tao 的 I-方法、Keel-Tao 的端点型 Strichartz 估计、驻相方法与振荡积分等在非线性 Schrödinger 方程与非线性波动方程中的应用,特别是在 Bourgain 空间的框架下研究了非线性 Schrödinger 方程与非线性波动方程的低正则性，同时也介绍了在共形变换或其他变换群下的不变量、Morawetz 型估计、Tao-相互作用的 Morawetz 型估计及 Morawetz 估计的局部化技术.

本书可供理工科大学数学系，应用数学系的高年级学生、研究生、教师以及相关的科学工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程的调和分析方法/苗长兴，张波著．—北京：科学出版社，2008

(现代数学基础丛书；117)

ISBN 978-7-03-020889-7

I. 微… II. ① 苗… ② 张… III. 偏微分方程-调和分析 IV. O241.86

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 006488 号

责任编辑：鄢德平　张　扬 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：赵德静 / 封面设计：王　浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2008 年 1 月第一次印刷　印张：23 3/4

印数：1—3 500　字数：448 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

现代调和分析可以追溯到 19 世纪初 Fourier 关于热传导方程的求解. 经历了近 200 年的发展, 它已经成为现代数学的核心研究领域之一, 特别是偏微分方程、解析数论、数学物理、工程科学等研究领域的重要工具. 偏微分方程的研究进程和历史表明, 调和分析的许多经典结果已被充分证明是解决偏微分方程本质问题的最有效的研究手段和方法之一. 我们从如下诸条中可以体会调和分析在偏微分方程研究中的重要作用：

(i) $\mathcal{H}_1$ 与 BMO 空间：在建立椭圆型方程、抛物型方程解的 L^p 理论、C^α 理论中, BMO 空间 ($\mathcal{H}_1$ 的对偶空间) 的引入和使用起着本质的作用. 借助于 L^p 理论、C^α 理论就可以建立椭圆型方程、抛物型方程边值问题解的正则性. 另一方面, 作为 L^1 和 L^∞ 空间的替代空间, Hardy 空间 $\mathcal{H}_1$ 与 BMO 空间在插值理论、算子有界性的研究中有着极其重要的作用.

(ii) 经典 Calderón–Zygmund 奇异积分理论 (第一代)：著名的 Hilbert 变换、Riesz 变换是其典型例子, 在众多的数学物理研究中都有广泛的应用. 就偏微分方程 (partial differential equations, PDEs) 而言, 它在正对称双曲型方程组、位势积分估计 (单层位势、双层位势) 及椭圆边界问题的研究中起着重要的作用. 另一方面, 利用 Bessel 位势、Riesz 位势可以将整数阶的 Sobolev 空间推广到相应的分数阶函数空间.

(iii) 第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子：在拟微分算子理论中起着重要作用, 特别是拟微分算子的 L^p 理论可视为经典位势理论的推广, 可以讲它是研究一般椭圆边值问题的基本方法之一. 当然, 作为拟微分算子进一步发展的 Fourier 积分算子, 本质上可以视为第二型的振荡积分.

(iv) Hardy-Littlewood 极大函数理论：在研究算子的有界性、函数的点态收敛, 特别对椭圆边值问题边值的刻画有着重要作用.

(v) 可微函数空间如 Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间、通常的 Sobolev 空间, 特别是它们的 Littlewood-Paley 刻画、原子分子刻画、Gauss 核刻画及 Possion 核刻画等调和分析技术, 不仅为偏微分方程的研究提供了工作空间, 同时也为线性估计、非线性估计提供了有效工具.

(vi) 球调和函数理论：它是偏微分方程各种定解问题的经典研究方法, 特别是基于逼近的紧致性方法的基础, 为数值求解提供了工具. 当然, 它在奇异积分理论等调和分析的核心方向 (如：奇异积分算子理论等) 的研究中亦扮演着重要角色.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(vii) 插值理论与插值方法：无论是实插值方法、复插值方法还是 Stein 插值方法，都是研究空间理论、算子理论、非线性估计的主要手段. 例如：Marcinkiewicz 插值定理将端点弱型算子估计转换成内点的强型算子估计，这在偏微分方程的研究中是至关重要的.

(viii) Hörmander 平移不变算子理论、Littlewood–Paley 的 g 函数方法、Calderón–Stein 的 g_λ^* 函数方法是乘子理论的基础. 与此同时，乘子理论可用于判断线性发展方程的适定性 (解算子是否在所考虑的 Banach 空间 X 中生成一个 C_0 半群). 它本质上为研究对应的非线性偏微分方程的定解问题提供了合适的工作空间.

(ix) Littlewood-Paley 的分解理论在函数空间的刻画、非线性函数在分数阶 Sobolev 空间中的估计等诸多方面显示出巨大的应用潜力. Bony 的二次微局部分解与分数阶求导估计正是基于 Littlewood-Paley 的分解理论的一个典型范例.

(x) 振荡积分估计、Fourier 变换在几何曲面上的限制性估计：借此可建立线性发展方程解的 L^p–L^q 估计，解的 Strichartz 型时空估计、正则型的 Strichartz 时空估计、解的倒向时空估计 (极大模估计) 等. 所有这些为非线性发展方程的适定性理论、波方程及色散波方程散射性的研究提供了有力的工具. 最近 30 年偏微分方程特别是发展型方程的许多突破性成果均与此有关，读者可参考 Stein, Ginibre-Velo, Brenner, Bourgain, Kenig, Klainerman, Ponce 及 Tao 等人的工作.

苗长兴受田刚院士、肖玲教授邀请，2000 年在中科院晨兴数学中心作了为期一个月的数学系列讲座. 随后，承蒙林芳华教授、方道元教授的邀请，在浙江大学数学系做了 12 讲的偏微分方程的调和分析方法系列讲座. 在此基础上，苗长兴受英国皇家学会皇家基金的资助，在英国 Coventry 大学数学系进行了为期一年的学术访问，两位作者进行了深入的学术讨论与合作，完成了本书的初稿. 之后，苗长兴受辛周平教授的邀请，在香港中文大学数学研究所作了一系列的讲座，报告了本书的部分内容. 苗长兴受田刚院士邀请，2003 年 7 月，在田刚院士主持的北大特别讲座上作了系列讲座. 另外，苗长兴曾在复旦大学数学研究所、南京大学数学系报告过与本书相关的内容. 然后经过整理逐步形成这本数学著作. 本书的宗旨是为纯粹数学家、应用数学家及数学研究生提供一本偏微分方程的调和分析方法的专著，特别强调调和分析方法的核心作用. 重点放在非线性发展方程 (如：抛物型方程、Navier-Stokes 方程、非线性 Schrödinger 方程、非线性波动方程) 等当今数学物理界所关注的重大问题.

全书共分五章. 第一章首先回顾一下经典的可微函数空间、调和分析的几个经典结果. 其次，扼要地阐述椭圆边值问题研究方法与研究进程，读者从中可以领略第二代、第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在椭圆边值问题研究中的作用，特别是调和分析方法在处理具 Lip 边界的椭圆边值问题时所起的关键作用. 与此同时，我们从宏观的角度来考察发展方程的调和分析方法的研究背景、乘子估计及算

子半群的乘子刻画、Fourier 变换在紧致光滑曲面或具非零 Gauss 曲率的曲面上的限制性估计与线性方程解的时空估计的关系, 用 Scaling 的原则来推测和构造非线性发展方程合适的时空 Banach 空间等.

第二章主要讨论半线性抛物型方程解的适定性问题. 为此我们引入三元容许簇与广义三元容许簇的概念, 类似于波动方程及色散波方程, 首先建立线性抛物型方程的时空估计, 给出了一个统一处理半线性发展方程的有效方法. 这种方法不仅简化了已有的重要结果的证明, 同时借助于 Scaling 技术及非线性函数在 Besov 空间的估计, 建立半线性抛物型方程在分数阶 Sobolev 空间、Besov 空间中的局部适定性, 小解的整体存在性等问题.

第三章讨论 Navier-Stokes 方程. 在第一节中, 我们从问题的提出乃至详细阐述 Leray-Hopf 弱解及其研究历史, 其间涉及 Wahl W 的抽象方法、Solonikov 估计、Serrin–Wahl 的正则性理论. 第二节采用时空估计方法证明 Kato 的局部存在性及小解的整体适定性. 当然, 这些结果可以推广到负阶次的 Besov 空间上. 第三节主要介绍 Meyer 及 Cannone 的一些新结果. 利用 Littlewood-Paley 理论, 给出了所谓合适 Banach 空间 X 的刻画, 进而在合适 Banach 空间 X 上建立 Navier-Stokes 方程的局部适定性. 需要指出的是合适的 Banach 空间包含了 Navier-Stokes 方程已有研究所用的非临界型工作空间. 在第四节, 着重介绍 Koch 及 Tataru 的方法. 采用 BMO 空间的热核刻画, 并在此基础上定义一个更大的, 度数为 -1 的 Banach 空间 BMO^{-1}, 证明当初值函数 $\varphi \in \mathrm{BMO}^{-1}$ 时, Navier-Stokes 方程在相应的工作空间 $X = \mathrm{BMO}^{-1}$ 上小解的整体适定性. 这一结果推广了在已知的临界空间如 L^n, $\dot{B}_{p,q}^{-\frac{n}{p}+1}$ 上的适定性结果.

第四章着重讲述非线性 Schrödinger 方程的适定性理论及散射性理论, 特别是 Bourgain 与 Tao 的杰出工作. 第一节主要给出线性 Schrödinger 方程的 Strichartz 时空估计、极大模估计、Kato 的局部光滑效应, 特别 Keel–Tao 的端点情形的 Strichartz 估计等基本估计. 第二节主要回顾非线性 Schrödinger 方程解的适定性及散射性的研究历史、存在的主要问题, 并简要举例说明 Strichartz 型估计在这些问题研究中的作用. 第三节主要介绍 Bourgain 的 Fourier 截断方法, 通过 Bourgain 空间与 Littlewood-Paley 的二进制分解给出了双线性估计, 证明了三次非线性 Schrödinger 方程在分数阶 Sobolev 空间中适定性及对称情形下的散射性. 第四节着重介绍 Tao 的 I- 能量方法, 它是处理低正则性问题的另一种有效方法, 它可以直接用于散射性理论的研究. 其局限性是仅适用于处理特殊的非线性项. 如果 Tao 的 I-能量方法能适用于一般的非线性项, 它的适用范围将会更广泛, 威力更强大. 第五节主要讨论当初始函数 $\varphi(x) = \varphi(|x|) \in H^1$ 时, 具 H^1 临界增长的非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题及散射性理论. 重要的是了解 Bourgain 是如何利用 Morawetz 估计去排除无限多次的“聚积”现象, 这里采用了 Tao 的一个新的证明方法. 需要指

出的是, 对一般 H^1 初值函数, Tao 及其合作者最近解决了 $\mathbb{R}^3$ 上 H^1- 临界非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题及散射性理论这一公开问题.

第五章讨论波动方程 Cauchy 问题的适定性理论及散射性理论. 第一节着重介绍 Fourier 变换在流形上的限制性估计以及经典的 Strichartz 时空估计. 第二节介绍双线性方法及 Keel-Tao 的端点 Strichartz 时空估计. 第三节主要介绍半线性波动方程的能量解的整体适定性, 所用的方法是 Strichartz 时空估计和压缩映射技术. 第四节主要介绍 $\mathbb{R}^3$ 中次临界与临界增长的波动方程的整体光滑解的适定性, 通过 Lagrange 密度函数可以建立所谓的 Morawetz 估计, 进而证明能量不可能在一点聚积, 从而建立整体光滑解的适定性. 第五节主要介绍低能量空间中 Klein-Gordon 方程的 Cauchy 问题的整体适定性理论, 这里主要采用 Bourgain 的初值分解技术及非线性函数在 Besov 空间中的估计.

此项工作得到了国家杰出青年科学基金 (No.10725102)、国家科学技术学术著作出版基金、英国皇家学会皇家基金、中科院百人计划等项目的资助. 周毓麟院士、张恭庆院士、郭柏灵院士始终对作者予以热情的支持和鼓励, 作者深表感谢. 借此机会, 作者还要感谢李大潜院士、洪家兴院士、田刚院士、林芳华教授、辛周平教授、陆善镇教授、肖玲教授、彭立中教授、韩永生教授、周青教授、周忆教授、江松教授、方道元教授、尹会成教授等所提供的诸多帮助. 国外著名数学家: Cannone、Ginibre、Kato、Keel、Kenig、Sogge、Ponce、Taira、Tao、Wahl 等向作者提供了他们的文章, 作者一并表示感谢. 最后, 对于曾经参加作者主持的 "偏微分方程的调和分析方法学术讨论班" 的年轻同事: 谌稳固研究员、张晓轶博士、章志飞博士、陈琼蕾博士、原保全博士、徐桂香博士、李俊峰博士、许孝精博士、赵立丰博士、叶耀军博士、朱佑彬博士、王月山博士、邹雄博士及博士生苑佳、张军勇、毋海根、吴刚等表示感谢, 他们为本书的校对做了许多有益的工作.

作　者

2007 年秋

目　录

第一章　椭圆型方程的边值问题与抽象发展方程的调和分析方法概述

§1.1　常用的函数空间与调和分析的某些经典结果

本节给出一些常用函数空间的定义及其范数的刻画，并适当地给予评注. 与此同时，对于进一步的刻画将指出其参考文献. 此外，尽可能简要地给出一些我们常用的调和分析的一些经典结果，以方便读者日后使用.

首先引入一些标准记号. $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间，$\mathbb{N}$ 表示所有自然数的集合，$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$，$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上无穷次连续可微函数的集合，$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示具有紧支集的全体无穷次连续可微函数所组成的集合. 定义 Schwartz 空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\Big\{\varphi\big|\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\quad \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\varphi|<\infty,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n\Big\}. \tag{1.1}$$

众所周知，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在准范簇 $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$ 下形成一个 Fréchet 空间. 易见

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示 $S(\mathbb{R}^n)$ 拓扑对偶空间，这就是常说的 Schwartz 广义函数空间或缓增分布空间，有关广义函数的知识，可见 [Ta2], [Ho] 或 [Yo]. 同理可在一般的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上定义相应的函数空间，详见 [Tr1], [Tr2]. 为简单起见，我们仅就 $\mathbb{R}^n$ 上函数空间予以阐述. 记

$$C^k(\mathbb{R}^n)=\left\{f\middle|f\in 线性空间\ C^k(\mathbb{R}^n),\quad \|f;C^k\|=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f|<\infty\right\}, \tag{1.3}$$

这里

$$\partial^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad C^0=C.$$

用 m 表示 Lebesgue 测度，若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，记其分布函数为

$$f_*(\alpha)=m\{x\in\mathbb{R}^n,\quad |f(x)|>\alpha\}. \tag{1.4}$$

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

(I) Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$L^p(\mathbb{R}^n)=\left\{f\,\middle|\,f(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\quad \|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty, 1\leqslant p<\infty\right\},$$

$$L^\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\,|\,f(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\|f\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|<\infty\}.$$

注记 1.1 L^p 空间有如下等价的范数：

$$\|f\|_p=\left(p\int_0^\infty \alpha^{p-1}f_*(\alpha)d\alpha\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty \tag{1.5}$$

及

$$f_*(\alpha)\leqslant \alpha^{-p}\|f\|_p^p,\quad 1\leqslant p<\infty,\quad \text{Chebyshev 不等式}, \tag{1.6}$$

$$\|fg\|_p\leqslant\|f\|_q\|g\|_r,\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r},\quad \text{Hölder 不等式}, \tag{1.7}$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)dx\right\|_{L_y^p}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\|f(x,y)\|_{L_y^p}dx,\quad \text{Minkowski 不等式}. \tag{1.8}$$

另外, 由 Chebyshev 不等式可诱导弱 L^p 空间, 有些学者称为 Marcinkiewicz 空间, 记为 $L_w^p(\mathbb{R}^n)$, 即

$$L_w^p(\mathbb{R}^n)=\{f\,|\,f(x)\text{可测};\quad \|f,L_w^p\|=\sup_{\alpha>0}\alpha(f_*(\alpha))^{\frac{1}{p}}<\infty\}.$$

此空间适用于 Marcinkiewicz 插值定理.

(II) Hölder-Zygmund 空间

对任意 $s\in\mathbb{R}^+$, 可作分解 $s=[s]+\{s\}=[s]^-+\{s\}^+$, 这里 $[s]$, $[s]^-$ 是整数,

$$0\leqslant\{s\}<1,\qquad 0<\{s\}^+\leqslant 1. \tag{1.9}$$

借此可定义 Hölder 空间 $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(0<s\neq\text{整数})$,

$$C^s=\left\{f\,\middle|\,f\in C^{[s]}(\mathbb{R}^n);\ \|f;C^s\|=\|f;C^{[s]}\|+\sum_{|\alpha|=[s]}\|\partial^\alpha f;C^{\{s\}}\|<\infty\right\},$$

这里

$$\|f;C^\sigma\|=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\sigma},\quad 0<\sigma<1. \tag{1.10}$$

若记

$$\Delta_h^k f(x)=\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x+hj),\quad k\in\mathbb{N},h\in\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

这里 $\binom{m}{j}$ 是组合数. 于是, 可引入 Zygmund 空间

$$\mathcal{C}^s = \Big\{ f \,\Big|\, f \in C^{[s]^-}(\mathbb{R}^n); \|f;\mathcal{C}^s\| = \|f;C^{[s]^-}\| + \sum_{|\alpha|=[s]^-} \sup_{0\neq h\in\mathbb{R}^n} |h|^{-\{s\}^+}\|\Delta_h^2 D^\alpha f; C\| < \infty. \Big\}.$$

注记 1.2 (i) 当 $k=1,2,\cdots$ 时, $\mathcal{C}^k$ 称为 Zygmund 空间, 并且满足如下嵌入关系

$$C^k \subset \mathcal{C}^k, \quad 且 \quad C^k \neq \mathcal{C}^k.$$

(ii) 当 $s\neq$ 整数时, Hölder 空间与 Zygmund 空间重合, 即

$$\mathcal{C}^s = C^s. \qquad s\in\mathbb{R}^+, \quad s\neq 整数.$$

(iii) Zygmund 空间有如下等价刻画：设 $s>0$, $k\in\mathbb{N}_0$ 且 $k<s$. 设 $m\in\mathbb{N}$ 满足 $m>s-k$, 则 $\mathcal{C}^s$ 有如下等价范数

$$\|f,\mathcal{C}^s\| = \|f;C^k\| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{0\neq h\in\mathbb{R}^n} h^{-(s-k)}\|\Delta_h^m D^\alpha f, C\|. \tag{1.12}$$

在讨论下面可微函数空间之前, 先引入几个记号. 记 $D_j = i^{-1}\partial_{x_j}$, $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换或 Fourier 逆变换,

$$\mathcal{F}\varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx = \hat{\varphi}(\xi), \tag{1.13}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\psi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi = \check{\psi}(x). \tag{1.14}$$

易见, $\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi) = \hat{\varphi}(-\xi)$.

(III) Sobolev 空间 记 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 定义

$$W^{k,p} = \big\{ f \big| f\in\mathcal{S}', \quad \partial^\alpha f\in L^p, \quad |\alpha|\leqslant k, \quad k\in\mathbb{N}_0 \big\},$$

配带范数

$$\|f,W^{k,p}\| = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{1.15}$$

注记 1.3 当 $k=0$ 时, $W^{0,p}=L^p$. 在偏微分方程的研究中, 最常用的是 $1<p<\infty$ 的情形. 当 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时, 上述定义的 Sobolev 空间仍是 Banach 空间, 只是失去了自反性.

(IV) Nikolskij 空间与 Slobodeckij 空间

这两类空间是将 Sobolev 空间推广到分数阶 Sobolev 空间的最早形式, 以后用 Bessel 位势、Riesz 位势、Littlewood-Paley 分解等工具给出分数阶 Sobolev 空间各式各样的推广和刻画.

Nikolskij 空间 设 $0 < s \neq$ 整数, $1 < p < \infty$,

$$B^s_{p,\infty} = \Big\{ f \Big| f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \|f; B^s_{p,\infty}\| = \|f; W^{[s],p}\| + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{0\neq h\in\mathbb{R}^n} |h|^{-\{s\}} \|\Delta_h \partial^\alpha f\|_p < \infty \Big\}.$$

这里 $\Delta_h = \Delta_h^1$ 是一阶差分.

Slobodeckij 空间 设 $0 < s \neq$ 整数, $1 < p < \infty$, 定义 Slobodeckij 空间为

$$B^s_{p,p} = \Big\{ f \Big| f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \|f; B^s_{p,p}\| = \|f; W^{[s],p}\| + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-\{s\}p} \|\Delta_h \partial^\alpha f\|_p^p \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}.$$

注记 1.4 无论是 Nikolskij 还是 Slobodeckij 空间, 均是下面定义的 Besov 空间的特殊情形.

(V) Besov 空间

将 Zygmund 空间采用的二阶差分与高阶差分的方式, 应用到分数阶 Sobolev 空间, 就得到了一般的可微函数空间, 即 Besov 空间.

Besov 空间的定义：设 $s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 定义

$$B^s_{p,q} = \Big\{ f \Big| f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \|f; B^s_{p,q}\| = \|f; W^{[s]^-,p}\| + \sum_{|\alpha|=[s]^-} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-\{s\}^+ q} \|\Delta_h^2 \partial^\alpha f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \Big\},$$

$$B^s_{p,\infty} = \Big\{ f \Big| f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad \|f; B^s_{p,\infty}\| = \|f; W^{[s]^-,p}\| + \sup_{0\neq h\in\mathbb{R}^n} |h|^{-\{s\}^+} \|\Delta_h^2 \partial^\alpha f\|_p < \infty \Big\},$$

这里 $s = [s]^- + \{s\}^+$.

注记 1.5 (i) 类似于 Zygmund 空间, 当 s 是分数时, 上式定义中的二阶差分可换成一阶差分 Δ_h, 所得的模等价. 显然, Nikolskij 空间、Slobodeckij 空间是其特例.

(ii) Besov 空间模有如下等价刻画：

(a) 设 $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m > s - k$, 则

$$\|f; B^s_{p,q}\| = \|f, W^{k,p}\| + \sum_{|\alpha|=k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-(s-k)q} \|\Delta^m_h \partial^\alpha f\|^q_p \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.16}$$

$$\|f; B^s_{p,\infty}\| = \|f; W^{k,p}\| + \sup_{0 \neq h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-(s-k)} \|\Delta^m_h \partial^\alpha f\|_p. \tag{1.17}$$

(b) 在进行非线性估计时, 常采用如下极坐标形式的等价模

$$\|f; B^s_{p,q}\| = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=[s]^-} \left(\int_0^\infty t^{-q\{s\}^+} \sup_{|y|<t} \|\Delta^2_y \partial^\alpha f\|^q_p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$s > 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant q < \infty, \tag{1.18}$$

$$\|f; B^s_{p,\infty}\| = \|f\|_p + \sup_{\substack{|y|<t \\ t>0}} t^{-\{s\}^+} \|\Delta^2_y \partial^\alpha f\|_p, \quad s > 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.19}$$

特别, 当 $s \neq$ 整数时, (1.18)、(1.19) 可改写成如下等价形式

$$\|f; B^s_{p,q}\| = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_0^\infty t^{-q\{s\}} \sup_{|y|<t} \|\Delta_y \partial^\alpha f\|^q_p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.18$'$}$$

$$\|f; B^s_{p,\infty}\| = \|f\|_p + \sup_{\substack{|y|<t \\ t>0}} t^{-\{s\}} \|\Delta_y \partial^\alpha f\|_p. \tag{1.19$'$}$$

(iii) Besov 空间可以推广到 $0 < p < 1$ 的情形. 此时, 当 $p < 1$ 或 $q < 1$ 时, 已不是 Banach 空间, 仅是拟 Banach 空间, 在 PDEs 的研究中很少使用, 有兴趣的读者详见 [Tr1], [Tr2].

(iv) 与 Sobolev 空间 $W^{k,p}$、Besov 空间 $B^s_{p,q}$ 相应的齐次空间分别记成 $\dot{W}^{k,p}$, $\dot{B}^s_{p,q}$, 其定义分别是

$$\dot{W}^{k,p} = \Bigg\{ f \,\Bigg|\, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), \ |\alpha| = k,$$

$$\|f; \dot{W}^{k,p}\| = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|^p_p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Bigg\},$$

$$\dot{B}^s_{p,q} = \Bigg\{ f \,\Bigg|\, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

$$\|f; \dot{B}^s_{p,q}\| = \sum_{|\alpha|=[s]^-} \left(\int_0^\infty t^{-\{s\}^+ q} \sup_{|y|<t} \|\Delta^2_y \partial^\alpha f\|^q_p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \Bigg\},$$

这里采用了等价刻画. 当 $q=\infty$ 时, 仅需做相应的修正即可.

(VI) Bessel 位势空间及 Riesz 位势空间

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=\big\{f\big|f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\quad \|f;H^{s,p}\|=\|(I-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p$$
$$=\|\mathcal{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\xi)\big)\|_p<\infty\big\}$$

就是经典的 Bessel 位势空间, 这里 $s\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 与它相对应的齐次空间恰是 Riesz 位势空间

$$\dot{H}^{s,p}=\big\{f\big|f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$
$$\|f,\dot{H}^{s,p}\|=\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p=\|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\hat{f})\|_p<\infty\big\}.$$

通常, 将乘子 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ 及 $|\xi|^{-s}$ 对应的算子分别记为

$$J_s=(I-\Delta)^{-\frac{s}{2}}=\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}*, \tag{1.20}$$

$$I_s=(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}=\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{-s}*, \tag{1.21}$$

分别称是 Bessel 位势及 Riesz 位势算子. 此称源于 $\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ 对应着 Bessel 函数. 容易看出

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=J_sL^p(\mathbb{R}^n),\quad \dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)=I_sL^p(\mathbb{R}^n). \tag{1.22}$$

注记 1.6 (i) 直接验证, 对任意 $k\in\mathbb{N}_0$, 有

$$H^{k,p}=W^{k,p},\qquad 1<p<\infty.$$

(ii) 设 $1<p<\infty$, s, $\sigma\in\mathbb{R}$. 则 J_s 是 $H^{\sigma-s,p}$ 到 $H^{\sigma,p}$ 的同胚映射, I_s 是 $\dot{H}^{\sigma-s,p}$ 到 $\dot{H}^{\sigma,p}$ 上的同胚映射, 即

$$J_sH^{\sigma-s,p}=H^{\sigma,p},\qquad I_s\dot{H}^{\sigma-s,p}=\dot{H}^{\sigma,p}. \tag{1.23}$$

(iii) 采用 Fourier 乘子理论, 可将一般 Sobolev 空间推广到负指数的情形. 同理, 此方法应用到 $B^s_{p,q}$ 及 $\mathcal{C}^s$ 上, 亦可将 Besov 空间及 Zygmund 空间推广到负指数的情形. 对 $\forall p$, $1<p<\infty$, s, $\sigma\in\mathbb{R}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 亦有

$$J_sB^{\sigma-s}_{p,q}=B^{\sigma}_{p,q},\quad J_s\mathcal{C}^{\sigma-s}=\mathcal{C}^{\sigma}, \tag{1.24}$$

$$I_s\dot{B}^{\sigma-s}_{p,q}=\dot{B}^{\sigma}_{p,q},\quad I_s\dot{\mathcal{C}}^{\sigma-s}=\dot{\mathcal{C}}^{\sigma}. \tag{1.25}$$

(iv) 当 $p=2$ 时, $H^{s,2}\equiv H^s$ 就是经典的 Hilbert 型 Sobolev 空间且有

$$B^s_{2,2}=H^s,\qquad \dot{B}^s_{2,2}=\dot{H}^s. \tag{1.26}$$

为引入更多的可微函数空间, 先介绍一下 Littlewood-Paley 理论. 设 $\varphi_0(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{cases} \varphi_0(\xi) = 1, & |\xi| \leqslant 1, \\ \varphi_0(\xi) = 0, & |\xi| \geqslant 2 \end{cases} \tag{1.27}$$

的对称实值 Bump 函数, 自然

$$\begin{cases} \varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi) - \varphi_0(2^{-j+1}\xi), & j \in \mathbb{N}, \\ \psi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi) - \varphi_0(2^{-j+1}\xi), & j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.28}$$

仍然是对称的 Bump 函数, 且

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} 2^{j|\alpha|} |\partial^\alpha \psi_j(\xi)| < \infty, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.29}$$

因此, 有如下两个二进制单位分解

$$\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.30}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.31}$$

对任一个 L^2 函数, 就诱导如下分解

$$f = \sum_{j=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f) = \sum_{j=0}^\infty \check{\varphi}_j * f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), ,$$

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}(\psi_j \mathcal{F} f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \check{\psi}_j * f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

其中级数是在 L^2 范数下收敛. 有时, 为方便书写引入

$$\psi_j(D) f = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j \mathcal{F} f) = \check{\psi}_j * f, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1.32}$$

$$\varphi_j(D) f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f) = \check{\varphi}_j * f, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \tag{1.33}$$

由于 $\psi_j(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\operatorname{supp}(\psi_j(\xi)) \subset \left\{\xi; \quad 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{supp}(\varphi_j(\xi)) \subset \left\{\xi; \quad 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com