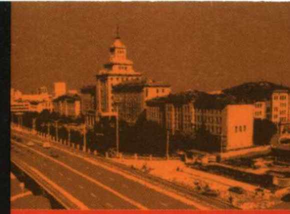

HIT

数学・统计学系列

Statistics of Fuzzy Data

模糊数据统计学

王忠玉 吴柏林 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

模糊数据统计学

王忠玉　吴柏林　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书把可利用模糊数据刻画的模糊现象纳入到统计学的研究范畴，将模糊数学的研究思想及方法与统计学融合，并且结合软计算方法，提出模糊数据描述统计量、模糊数据问卷调查、模糊数据均数估计、模糊数据假设检验、模糊数据回归模型、模糊数据样本排序及非参数检验方法、模糊数据时间数列分析及预测等，阐述深入浅出，理论结合实际，在探讨模糊统计基本理论基础上，构建一套完整的专门研究模糊数据的统计方法体系，反映出发展中的模糊数据统计学的最新成果及趋势，为研究和处理复杂性数据提供一种新的软计算方法及理论。

本书可作为数学、应用数学、统计学等专业的本科高年级的前沿专题及研究生教材，也可作为数量经济学、金融学、心理学、社会学等专业硕士研究生以及对模糊统计感兴趣的科技人员的有关教材及参考书。

图书在版编目(CIP)数据

模糊数据统计学/王忠玉著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-5603-2657-3

Ⅰ.模…　Ⅱ.王…　Ⅲ.模糊数学-统计学　Ⅳ.C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第016199号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　王勇钢
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张15.25　字数266千字
版　　次　2008年3月第1版　2008年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2657-3
印　　数　1~2 000
定　　价　48.00元

前　言

统计是用来分析、处理自然科学及社会科学信息的工具，在复杂的自然或社会现象中，人们可以借助于样本数据所提供的信息，经过归纳分析、推断检验、决策、预测等过程，使我们对现实状况更了解、更好地处理现实世界的问题。传统统计学的目的主要针对各类信息，拟定一套对数据进行分析、估计、检验的测量方法，其过程包括：(1)设定合适的理论或模型；(2)收集样本数据(包括实验设计、抽样或模拟)；(3)进行数据分析；(4)实施推断估计；(5)假设检验；(6)决策或预测。

近年来，由于经济全球化、科学技术快速发展、计算机人工智能科技发展一日千里，经济社会现象日趋多变、全球信息网络化，以往的社会科学研究大多利用传统的统计分析方法，如今却因为时代的不断进步，而逐渐不符合现今多变环境的复杂性，以致常常感到研究方法的缺乏与不适用。传统的统计分析工具之所以不敷应用，一个主要的问题是：如何更有效处理分析日益复杂、海量的网络情报数据。虽然数据挖掘的兴起及发展，解决了不少数据分析的问题，但是，对于如何处理非实数样本数据，比如区间数据、多值数据形式的模糊数据样本，应用建立在实变函数与概率论基础上的传统统计方法已无法有效地进行分析和预测。尤其是，我们在决策过程中所遇到的不确定性问题比我们想象的更为复杂。情报信息除了随机性外，还包括不完全的信息、部分的已知知识，或者对环境模糊的描述等。

此外，从人类自身发展对外部现实世界事物认识的角度来看，如何对人的感知认识(绝大多数认识都是模糊性的观念等)——进行数量化，并加以统计信息处理及运算，进而实施统计推断及预测等一直困扰着统计学研究者。

事实上，我们所获得的信息源自测量与感知，而感知信息中的不确定因素，主要是我们的语言对某些概念表达模糊所引起的。显然，要作出比较好的判断，我们必须尽量将所能得到的信息都考虑在内。这包括用自然语言描述的行为、意义等的属性信息。因此，我们需要利用概率将模糊概念数学模式化，其实这也展示不确定性的另一种形式。模糊理论是一种定量化处理人类语言、思维的一门新兴学科。模糊逻辑并非如字面意思那样的马虎、不精确，而是面对生活上各种各样的不确定性，以更合理的规则去分析及管理控制，以期得到更有效率、更合乎人性与智慧的结果。模糊数据统计并不模糊，它是处理不确定事

件的一种新技术，带领我们从古典的统计估计与检验研究计算，进入一个需要软计算、稳健性的高科技的 e 时代。

在传统的统计推断方法中，为了了解未知总体参数值，我们经常借助于一些评估准则，找出适当的统计量来对总体参数进行估计。平均数是认识总体集中趋势最重要的总体参数之一，我们常常利用无偏估计量，比如样本平均数来估计总体集中趋势。然而，在日常生活中，总体平均数经常是带有模糊、不确定性的语意变量，或是一个可能区间，传统的估计量评估准则及估计方法便无法适用于此种情形。

在当今信息化时代，一个基本的问题是如何管理把不确定性（包括不准确性与模糊性）考虑进去的认知过程（Cognitive Process），这无论是在技术、经济学、工程、生物医学等方面，还是在实践上都是一个意义重大的问题。实际上，现实情形是促使人们研究这类问题的最初动机来源。

从理论观点来看，信息与不确定性是紧密联系的两个概念。事实上，不确定性源于信息的缺乏。另一方面，可以把信息看成是关于不确定性的缩减，尽管此观点很重要，但这只是考察信息概念的一种可行方式。因此，信息领域中的任何概念上的丰富充实都通过对新的不确定性形式的需求管理而与之对应。

在最近的二三十年里，不确定性理论在其概念领域及工具方法上都取得了显著的扩展。而这些扩展与数学思想上的两个扩展相互促进影响：一方面，经典的可加性测度理论向单调而非可加性测度（比如，可能性测度、信念函数、区间值可能性）的扩展；另一方面，经典集合理论以其标准形式和非标准形式向模糊集合理论的扩展。

统计推理是在部分信息条件下进行推理的方式，因此，也是在不确定性存在条件下实施推理的方式。上述曾提及的信息与不确定性领域的一些发展自然而然地对统计科学产生影响。众所周知，不确定性是决策分析研究中的最主要的困难所在。事件的不确定性主要有两种表现形式：随机性和模糊性。

自从美国控制论专家、著名模糊数学家扎德教授（L. A. Zadeh）在 1965 年提出模糊集合理论以来，最初的模糊集合理论在逻辑学、数学、技术及工程等方面得到了迅速普及与推广，经过四十多年的不断研究及发展，模糊数学方法在经济管理、工程、决策、聚类分析、控制等诸多领域，不论在理论研究，还是实际应用中均取得了相当丰硕的成果。对于统计方法来说，这提供了富有成果的新思想和新工具。

模糊数学方法应用到统计分析中，特别是近十多年来取得了长足的发展，目前这类研究正在蓬勃的发展中。

本书基于模糊数学的研究思想及方法，并结合软计算方法，定义出模糊数

据样本均数、模糊数据样本众数以及模糊数据中位数等，然后给出它们的许多相关性质。同时，针对模糊数据的参数估计量，我们提出适当而可行估计法的评判准则。对于古典的统计检验，必须陈列明确的假设。当我们要想检验两总体平均数是否有差异时，零假设(或称为原假设)是“两个平均数相等”。然而，有时我们想要知道的只是两平均值是否模糊相等，此时传统的检验方法并不适用于这种包含不确定性的模糊数据假设检验。因此，本书提出基于模糊数据样本的统计检验方法，针对模糊均数相等、模糊属于以及卡方同质性检验作出进一步的探讨。

本书内容自给自足，第1章和第2章是全书的基础内容，介绍模糊数学的基本知识，并阐述模糊数据的一些软计算方法等。而从第3章至第10章为本书的重点内容——模糊数据统计学，内容涉及模糊数据问卷调查，模糊聚类分析，模糊数据回归分析，模糊数据非参数统计，模糊数据时间数列分析及预测。我们列举出社会科学的一些应用实例，比如模糊问卷调查表，乐观测量表，风景区满意度调查，茶叶模糊分类，模糊回归及景气循环，模糊时间数列。第11章内容涉及当今模糊数据统计学发展中所遇到的问题与前景。

本书内容新颖，阐述深入浅出，理论结合实际，反映出发展中的模糊数据统计学的最新成果及趋势，为社会科学中的数量化方法及理论提供一种新颖的软计算方法及理论。期望以此抛砖引玉，开创21世纪模糊数据统计理论及应用研究的崭新领域。

全书内容写作安排如下：王忠玉撰写第1章、第2章、第5章、第6章、第9章以及附录1，其余内容由吴柏林撰写。

王忠玉于哈尔滨

吴柏林于中国台北

2007年，秋季

目　录

第 1 章　引　　论

第 1 章和第 2 章是全书的内容基础。第 1 章以人对事物现象认识的感知与模糊性作为切入点，阐述模糊性是人对事物认识的一种表征及反应。然后，引入模糊集合的定义及刻画模糊集合的表示函数 —— 隶属度(Membership)，对模糊集合的各种运算、模糊矩阵、模糊截集以及支集等内容进行较详细的讨论，并以各种事例阐明概念和运算。

对于已经学习过模糊数学的人来说，可以直接从第 3 章模糊数据描述统计量开始阅读及学习。对于那些没有模糊数学知识的人来说，第 1 章和第 2 章的内容则是极为基本而必需的，因为它们对学习后续各章的知识提供刻画与表述模糊现象的认识框架及数量化描述方法。本书内容写作的自给自足特点正是为以前没有学习过模糊数学知识的人而设计的。

1.1　人的感知与模糊性

人类的思维主要是源于对自然现象和社会现象的认知意识，而人类的知识语言也会因本身的主观意识、时间、环境以及分析事情的角度不同而具有模糊性。模糊理论的产生即是参考人类思维方式对环境所用的模糊测度与分类原理，给予较稳健的描述方式，以便处理多元复杂的暧昧关系与不确定性现象。

通常，人类思维有两种形式，一种为形式化思维(Formal Thinking)，另一种为模糊思维(Fuzzy Thinking)；前者具有逻辑性和顺序性的思考，而后者则是全体性和综合性的思考。当面临决策判断而进行思考时，基于形式化思维的二元逻辑，常常很难表示出人类思考的多元逻辑特性。

当有人说，他今天感到很快乐时，究竟他对于快乐的认知为何呢?什么样的测量标准可以称得上快乐呢?或是这样的感觉持续多久的时间以上才能算是快乐呢?然而，对这样的问题，每个人的回答皆因其主观性而有所不同，即使回答者为同一人，也会因为所处的环境、或是外在条件的不同，而可能出现与之前相异的答案。诸如此类很多的论点和问题，都不是能够用绝对的二元逻辑所可以界定的。其原因则皆源自人类思维的模糊性。但是，人们却经常被要求作出绝对

的判断或选择,以人性的观点来看,这是十分不合理的。

对不确定性的事物作出决策,是相当重要的人类活动。不确定性是决策分析研究中的最主要的困难所在。事件的不确定性主要有两种表现形式:随机性与模糊性。

如果不确定性仅仅是由于事物的随机所引起的,那么模糊数据统计分析的发展则为这类决策活动提供了很好的理论依据。事实上,我们在决策过程中所遇到的不确定性问题,往往不只是由于事物的随机所引起,这种不确定性还可能是:不完全的信息、已知的部分知识、对环境模糊的描述等,这类信息出自于测量与感知中的不确定因素,主要是由于我们的语言及人类思维对某些概念表达模糊所引起。通常,这些不明确性比我们想象的要复杂得多。

显然,如果要对人类思维的模糊性作出比较好的判断,我们必须尽量将所得到的信息都考虑在内,特别是属性问题。由于属性问题本身的模糊性与不精确性,若我们利用此假设的精确值来作出因果分析与计量度量,可能造成判定偏差及决策失误,甚至会扩大预测结果与实际状态之间的差异。因此,对于这些在思考认知不易表达完善的属性问题,借助于软计算方法与模糊数据统计分析可以更明确地表达出来。

有些学者认为,模糊理论是研究不确定的现象,应该与概率论相类似。然而,概率论是研究随机性问题,随机性虽不确定,但那是因为条件不充分引起的,事件的发生是随机的,事件发生之后就是确定的。例如,掷一个公正骰子,出现1,2,3,4,5,6点之概率均为1/6,当掷完一次骰子之后,出现多少就是多少。而模糊理论的事件本身却是模糊的、不精确的,例如,回答某家庭经济状况属于不错、小康或中等等,这些均不属于随机,而是事件本身的不完整性与不精确性。扎德(L.A.Zadeh,1999)更建议引用感知测度(Perception Measure)和软计算(Soft Computing)共同作为模糊函数估计量,这种应用模糊概念将属性关系数学模型化的方法,我们统称为软计算方法。实际上,软计算是一些计算方法的综合,其核心包括模糊逻辑、神经元算法、遗传算法以及概率算法。这些方法之间相互补充、协同作用而无优劣之分。

模糊理论的概念,主要强调人的喜好程度不需非常清晰或数值精确,因此,对人的感知而言,模糊模型比直接指定单一物体一个值,更适合于评估人所认识的物体之间多元或相关特性。

1.2 模糊集合与隶属度

普通集合对应于二值逻辑,表现为布尔代数。元素 x 属于或不属于某一个集合 A,非常清楚,毫不含糊。古典集合论在数理科学上已经建立起一套相当完善、系统的逻辑体系。

但是,若将此集合关系应用于描述某些事物现象时,经常会出现不合理的情况。因为某些现象并不一定存在"非此即彼"的关系。例如,进行某一教学单元后,将班级的学生划分成"精熟"和"不精熟"两类,这样的划分很明显的有不合理之处,因为学生的精熟程度并非是二元的现象,而是有各种不同精熟程度连续性的特性。自扎德(L.A.Zadeh,1965)提出模糊集合及模糊理论以来,此种思维可以解释许多事物现象。模糊理论将元素和集合之间的关系,通过介于[0,1]之间的隶属度加以描述。

设 U 表示所要研究对象的集合,称为论域。对于论域 U 的一个子集 A,可以利用它的特征函数(Characteristic Function)来表示。令

$$I_{\mu}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

$I_{\mu}(x)$ 表示在 U 上定义的取值于$\{1,0\}$的函数,称为集合 A 的特征函数,$I_{\mu}(x)$ 明确表示了集合 A,对于 $x \in A$,若 $I_{\mu}(x) = 1$,则表示 x 是 A 中的元素;若 $I_{\mu}(x) = 0$,则表示 x 不是 A 中的元素。由此,下面给出模糊集合的定义。

【定义 1.1】 模糊集合

设 U 表示一个论域,U 上的一个模糊子集 A 是指对于任何 $u \in A$ 都有一个实值函数 $\mu_A(u) \in [0,1]$ 与之对应,也就是

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$$
$$u \mapsto \mu_A(u) \in [0,1] \tag{1.2}$$

映射 μ_A 称为 A 的隶属函数,$\mu_A(u)$ 表示元素 u 属于 A 的程度,称为 u 对 A 的隶属度。

U 上的模糊子集所构成的集合全体称为模糊幂集,记为 $\Phi(U)$,即

$$\Phi(U) = \{A \mid \mu_A : U \rightarrow [0,1]\} \tag{1.3}$$

显然,$\Phi(U) \supset \Pi(U)$,其中 $\Pi(U)$ 表示普通幂集。

模糊子集是由其隶属函数来决定的。隶属函数则是普通集合中特征函数的推广。一般地说,模糊集合 A 是一个抽象的事物,而隶属函数 μ_A 则是一个具体

的。通常，只能通过 μ_A 来认识及掌握模糊集合 A。

隶属函数是模糊理论的基础，它是从传统集合中的特征函数所衍生出来的，用以表达元素对模糊集合的隶属度，其范围介于 0 到 1 之间。对于元素和集合的关系，古典集合将元素和集合之间的关系用特征函数来说明，亦即若 $u \in A$，则 $I(u) = 1$；若 $u \notin A$，则 $I(x) = 0$。但是，扎德(L. A. Zadeh，1965) 在模糊集合论中提到，若一个元素属于某一个集合的程度越大，则其隶属度值越接近于 1，反之则越接近于 0。

【例 1.1】 天气好坏的模糊集合。

设论域 U = {星期一，星期二，星期三，星期四，星期五，星期六，星期日}。若从星期一到星期三是好天气，而从星期四到星期日都是坏天气，按普通集合观点，特征函数有 $f_A(u) = 1$，u(好天气) $\in A$；$f_A(u) = 0$，u(坏天气) $\notin A$。隶属度分别为：μ_A(星期一) = 1；μ_A(星期二) = 1；μ_A(星期三) = 1；μ_A(星期四) = 0；μ_A(星期五) = 0；μ_A(星期六) = 0；μ_A(星期日) = 0。

实际上，在好天气、坏天气之间是有差异的，利用模糊集合的概念可以选取 [0,1] 之间的数，对天气情况加以细化。这时相对于好天气的隶属度可写成：μ_A(星期一) = 0.9；μ_A(星期二) = 0.8；μ_A(星期三) = 0.7；μ_A(星期四) = 0.4；μ_A(星期五) = 0.3；μ_A(星期六) = 0.2；μ_A(星期日) = 0.1。

模糊集合表示法

普通集合的表示法有枚举法，即枚举所有元素，适用于元素个数有限的集合；还有描述法，也就是给出元素的属性或判定性质。这两种方法都是集合的元素表达法。除此，还可以使用隶属函数表达，这是一种对外延的表达。

对于模糊集合来说，存在多种表示方法，其原则是要反映出每个元素及其隶属度。设论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$A$ 是其上的模糊子集。常见的表示方法有下述几种形式。

1. 扎德(Zadeh) 表示法

$$A = \frac{\mu_A(u_1)}{u_1} + \frac{\mu_A(u_2)}{u_2} + \cdots + \frac{\mu_A(u_n)}{u_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(u_i)}{u_i} \tag{1.4}$$

其中符号“+”与“$\sum$”都不再是加号与求和号，而是衔接符号，而 $\mu_A(u_i)/u_i$ 也不表示分数，只是表示 u_i 对模糊集合 A 的隶属度。

对于任何论域 U，特别是 U 为无限集，扎德还采用“积分符号表示法”，即将 U 上的模糊子集统一地用

$$A = \int_U \frac{\mu_A(u)}{u} \tag{1.5}$$

其中$\int$并不表示积分，只是表示模糊集合的一种符号。

前面的模糊集合事例可写成

$$A = \frac{0.9}{星期一} + \frac{0.8}{星期二} + \frac{0.7}{星期三} + \frac{0.4}{星期四} + \frac{0.3}{星期五} + \frac{0.2}{星期六} + \frac{0.1}{星期日}$$

其中“分母”表示论域中的元素，而“分子”是相应元素的隶属度。

2.“向量”表示法

将论域 U 上的隶属度按顺序写成向量形式，比如前面的模糊集合可写成

$$A = \{0.9, 0.8, 0.7, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1\}$$

对于一般的集合 A，可以表示为

$$A = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\} \tag{1.6}$$

其中，$\mu_i[0,1]$，$i = 1,2,\cdots,n$。μ_i 表示第 i 个元素对集合的隶属度。

3.“序偶”表示法

将元素与其对应的隶属度一起构成有序对的形式，前面的模糊集合事例可写成

$$A = \{(0.9,星期一),(0.8,星期二),(0.7,星期三),(0.4,星期四),$$
$$(0.3,星期五),(0.2,星期六),(0.1,星期日)\}$$

对于一般情况，有

$$A = \{(\mu_1, u_1), (\mu_2, u_2), \cdots, (\mu_n, u_n)\} \tag{1.7}$$

4.“单点”表示法(称为单点)

$$A = \{\mu_1/u_1, \mu_2/u_2, \cdots, \mu_n/u_n\} \tag{1.8}$$

5.具体给出隶属函数的解析式

当论域为实数集上的一区间时，此法显得简单而方便。

【例1.2】　扎德给出年龄论域 $U = [0,100]$ 上的老年(Old)及青年(Young)两个模糊子集的隶属函数如下

$$\mu_O(u) = \begin{cases} 0 & 当 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 当 50 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

$$\mu_Y(u) = \begin{cases} 1 & 当 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 当 25 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

其隶属函数曲线，如图 1.1 所示。

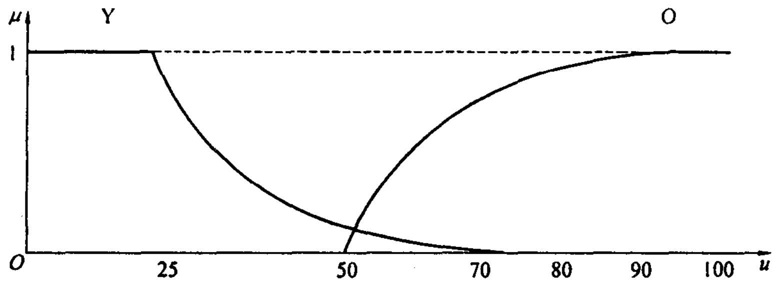

图 1.1 老年及青年的隶属函数

1.3 模糊集合运算

普通集合的运算可以利用特征函数来刻画及描述。由于隶属函数是特征函数的推广，所以模糊集合的运算也可以利用隶属函数描述。

【定义 1.2】 模糊集合运算

设 A,B,C,D 表示论域 U 上的模糊子集，可以定义出下述运算：

(1) 若对于任意的 $x \in U$，有 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$，则称 B 包含 A，记为 $A \subseteq B$，如图 1.2 所示。

(2) 若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$，如图 1.3 所示。

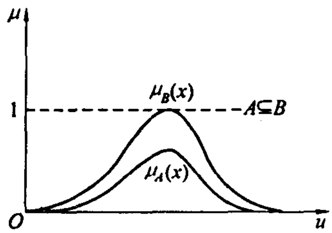

图 1.2

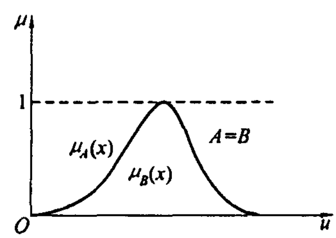

图 1.3

(3) 若对于任意的 $x \in U$，有

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \tag{1.9}$$

则称 C 为 A 与 B 的并集，记为 $C = A \cup B$，符号 $\vee$ 表示“取大(max)”运算，如图 1.4 所示。

(4) 若对于任意的 $x \in U$，有

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \tag{1.10}$$

则称 D 为 A 与 B 的交集，记为 $D = A \cap B$，符号 $\wedge$ 表示“取小(min)”运算，如

图 1.5 所示。

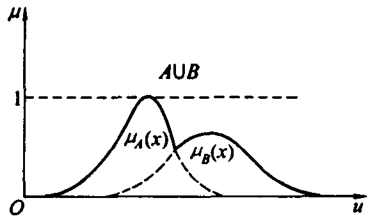

图 1.4

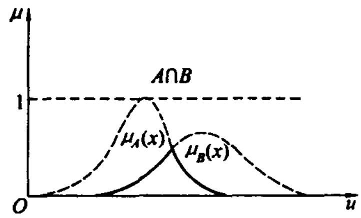

图 1.5

(5) 若对于任意的 $x \in U$,有

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{1.11}$$

则称 A^c 为 A 的余集(或者补集),如图 1.6 所示。

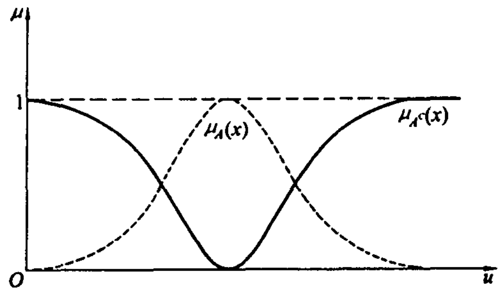

图 1.6

【例 1.3】 设 A,B 表示两国人民对宗教的隶属度,其具体表达式可利用式(1.4) 表示为

$$A = \frac{0.3}{\text{佛教}} + \frac{0.2}{\text{基督教}} + \frac{0.1}{\text{伊斯兰教}} + \frac{0.3}{\text{其他教}} + \frac{0.1}{\text{未信教}}$$

$$B = \frac{0.2}{\text{佛教}} + \frac{0.4}{\text{基督教}} + \frac{0.2}{\text{伊斯兰教}} + \frac{0.1}{\text{其他教}} + \frac{0.2}{\text{未信教}}$$

则根据定义 1.2 可得下述关系

$$A^c = \frac{0.7}{\text{佛教}} + \frac{0.8}{\text{基督教}} + \frac{0.9}{\text{伊斯兰教}} + \frac{0.7}{\text{其他教}} + \frac{0.9}{\text{未信教}}$$

$$A \cap B = \frac{0.2}{\text{佛教}} + \frac{0.2}{\text{基督教}} + \frac{0.1}{\text{伊斯兰教}} + \frac{0.1}{\text{其他教}} + \frac{0.1}{\text{未信教}}$$

$$A \cup B = \frac{0.3}{\text{佛教}} + \frac{0.4}{\text{基督教}} + \frac{0.2}{\text{伊斯兰教}} + \frac{0.3}{\text{其他教}} + \frac{0.2}{\text{未信教}}$$

为了简单起见,这里仅仅考察有限论域情况。至于无限论域的情况,可以作

出类似的讨论。

【定义 1.3】 模糊集合内积与外积

设 A,B 表示论域 U 上的模糊子集，把 A 与 B 的内积定义为

$$\bigvee_{x\in U}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)) \tag{1.12}$$

记为 $A \circledcirc B$；把 A 与 B 的外积定义为

$$\bigwedge_{x\in U}(\mu_A(x)\vee\mu_B(x)) \tag{1.13}$$

记为 $A\otimes B$。

特别地，当 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 都是模糊向量时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积、外积分别为

$$\boldsymbol{A}\circledcirc\boldsymbol{B}=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i),\quad \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\bigwedge_{i=1}^{n}(a_i\vee b_i) \tag{1.14}$$

【性质 1.1】 $A\circledcirc B=1-A^c\circledcirc B^c, A\otimes B=1-A^c\otimes B^c$。

【性质 1.2】 $A\circledcirc A^c\leqslant\frac{1}{2}, A\otimes A^c\geqslant\frac{1}{2}$。

【性质 1.3】 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，令

$$\bar{A}=\bigvee_{i=1}^{n}a_i,\underline{A}=\bigwedge_{i=1}^{n}a_i$$

称 $\bar{A}$ 与 $\underline{A}$ 分别为 A 的高与低，则

$$A\circledcirc B\leqslant\bar{A}\wedge\bar{B},\quad A\otimes B\geqslant\underline{A}\wedge\underline{B}$$

【性质 1.4】 若 $A\subseteq B$，则

$$A\circledcirc B=\bar{A},A\otimes B=\underline{B}$$

模糊集合之间的接近程度，可以利用一种类似于距离的贴近度来描述。下面给出贴近度的公理化定义。

【定义 1.4】 模糊集合贴近度

设有 $\Phi(U)$ 上的二元函数

$$\tau:\Phi(U)\times\Phi(U)\to[0,1],(A,B)\mapsto\tau(A,B) \tag{1.15}$$

若 $\tau(A,B)$ 满足：

(1) $\tau(A,A)=0,\tau(\varnothing,U)=0$；

(2) $\tau(A,B)=\tau(B,A)$；

(3) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow\tau(A,C)\leqslant\tau(A,B)\wedge\tau(B,C)$。

则称 τ 是 $F(U)$ 上的贴近度函数，称 $\tau(A,B)$ 为 A 与 B 的贴近度。

若把上述定义中的(1)换为(4)，即

(4) $\tau(A,B)=1\Leftrightarrow A=B$，且 $\tau(\varnothing,U)=0$，则称 $\tau(A,B)$ 为 A 与 B 的严格贴近度。