学习与考研备考指导系列

文都图书
Wendu.com

DIALOGUE

对话考研名师 解读大学数学

线性代数过关与提高

与同济大学线性代数（第五版）配合使用

编著 黄先开 曹显兵

与最新版教材配合使用

原子能出版社

大学数学学习与考研备考指导

文都图书
Wendu.com

DIALOGUE

对话考研名师 解读大学数学

线性代数过关与提高

与同济大学线性代数(第五版)配合使用

编著 黄先开 曹显兵

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数过关与提高/黄先开，曹显兵编著. —北京：原子能出版社，2007.7

(对话考研名师·解读大学数学)

ISBN 978-7-5022-3971-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①黄…②曹… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 118568 号

线性代数过关与提高

出版发行	原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑	刘 朔
特约策划	韦环伟
封面设计	刘志彦
印　　刷	北京长阳汇文印刷厂
经　　销	全国新华书店
开　　本	850×1168 毫米 1/32
印　　张	13.625
版　　次	2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978—7—5022—3971—8
定　　价	18.00 元

 网址：http://www.aep.com.cn

前 言

《线性代数》是高等学校理工科和经济管理类各专业的一门主要基础理论课程，不仅各高等学校作为本科生培养阶段的核心必修课程，而且是硕士研究生、MBA 等入学考试的主考课程之一，线性代数所研究的理论和处理问题的思想、方法被广泛应用到自然科学和社会科学的各个领域，因此学好这门课程是十分重要的。

线性代数的概念众多，内容繁杂，前后知识相互联系、相互渗透，环环相扣，在知识体系与逻辑推理方式上独树一帜，初学者往往感到迷茫和困惑，而教科书因受到课时及篇幅的限制，不可能对所有的问题都作出详尽的陈述，也不可能对前后相关的知识进行系统的归纳总结并介绍较多的解题方法。为帮助读者把《线性代数》这门课程的知识学到手，深刻理解其知识体系的内涵和精髓，并能轻松自如地应对大学课程考试和研究生入学考试，笔者根据多年的本科教学实践和近二十年考研辅导的经验，潜心编著了这本既适合本科阶段与教学进度同步的学习需要，又适合为研究生入学考试作准备的学习辅导用书。

本书根据现行的通用教学大纲和研究生入学数学考试大纲进行编写，采用独特新颖的体例设计和版式设计，对这门课程中所有可能的题型进行了系统的分析归类，精心选编和解析了大量的经典例题，并最新设计了许多新颖的综合例题，希望以此启发读者的解题思路并融会贯通所学的内容。配合大学课程考试和研究生入学考试的需要进行编写是本书最突出的特色。

本书的编写体系和特点如下：

1. 学习要求：大学数学教学目标与考研大纲考试要求的有机结合

以几所高校教材为蓝本，同时严格遵循《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写，考研大纲与大学数学教学目标有机结合。

2. 知识点结构图—内容概述

将各章知识点用图表的形式表现出来，使学生站在更高的层次把握知识，并较为翔实的归纳出各部分知识。内容提要简述学习过程中所要求掌握的基本概念、性质和定理，对于一些基础性知识理论进行讲解，使读者具备扎实的基础知识。

3. 难点、疑点解析及重要公式与结论

针对每一章的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结本章的重要公式与结论，特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳，从而帮助读者站在一个更高层次上去认识问题、分析问题和解决问题，达到认识和理解的新境界，而这些要求对于期望在课程结业考试和研究生入学数学考试中取得优秀的成绩的读者来讲，是一项重要的基本功。

4. 典型例题：基础过关题—历年真题精选精解—拓展提高题

例题编排由浅入深，按照“基础过关题——考研历年真题精选——拓展提高题”的顺序安排典型例题，使读者在复习的过程中有参照、有对比，通过精读典型例题达到信心百倍。通过借助众多经典例题的解析和评注，帮助读者更好地把握典型问题的分析处理方法和可能的各种延伸，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

5. 精选习题—精选习题答案

对于掌握一门数学课程内容并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的。本书编写的习题紧扣大学课程及研究生入学考试大纲要求，习题具有一定的层次感，使读者在自我检测中达到知识、方法、技巧的升华。

本书可作为大学数学教学同步指导书，供大一、大二的在校学生使用；本书也可供参加硕士生入学考试的考生从开始阶段打基础到冲刺阶段全面提高的全程辅导用书使用。本书也可作为教师教学参考用书。

在成书过程中，编者参考了众多著作和教材、教学参考资料，在此谨向有关作者表示衷心感谢！由于编者水平所限，错误和不妥之处敬请同行与读者赐教指正。

6. 特别提示

建议刚开始学习本门课程的同学主要阅读每章的“内容概述”及“基础过关题”部分，其他内容可至拥有相关知识后再读。

编者

目　录

第一章　行列式

【知识点结构图】

- 行列式
  - 二阶、三阶行列式
  - n 阶行列式
    - 排列与逆序
    - n 阶行列式的定义及性质
  - 代数余子式的定义及性质
  - 行列式按行(列)展开
    - 按一行(列)展开
    - 按第 k 行(列)展开
  - 克莱姆法则

【学习要求】

1. 了解 n 阶行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(或列)展开定理计算行列式.
3. 知道克莱姆法则.

1.1　内容概述

一、排列和逆序

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数为 $n!$ 个.

定义 1.2　一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t > i_s$,则称这一对数 i_ti_s 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为偶排列,否则称为奇排列. 在所有的 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中,奇排列个数 $=$ 偶排列个数 $=\dfrac{n!}{2}$.

定义 1.3 在排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换，记为 (i_t,i_s). 对换改变排列的奇偶性.

二、n 阶行列式的定义

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素列下标（行下标按自然顺序排列时）的逆序数，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号.

三、行列式的性质

性质 1 行列式的行列互换，行列式的值不变.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值反号.

性质 3 行列式某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于 k 乘此行列式.

推论 1 如果行列式中有一行（列）的元素全为零，则此行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行（列）的所有元素都是两个元素之和，则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行（列）的元素分别为对应的两个相加元素之一，其余各行（列）的元素与原行列式相同.

性质 5 把行列式的某一行（列）的所有元素乘以数 k 加到另一行（列）的相应元素上，行列式的值不变.

推论 2 如果行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

四、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按一行(或列)展开定理

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，

即 $$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\,(1\leqslant i\leqslant n)$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\,(1\leqslant j\leqslant n).$$

一般地，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D,i=k,\\0,i\neq k.\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}D,j=k,\\0,j\neq k.\end{cases}$$

五、拉普拉斯定理

在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n$)，由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D. 即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,\quad \left(t=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

其中 A_i 是子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式.

六、克莱姆(Cramer)法则

$$方程组\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组，当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ 时，此方程组有惟一解，且可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 b_1，b_2，$\cdots$，b_n，其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注：(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

(2) n 元非齐次线性方程组，当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一解，当系数行列式 $D=0$ 时克莱姆法则失效，方程组可能有解也可能无解.

(3) n 元齐次线性方程组，当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一零解，当系数行列式 $D=0$ 时，齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

1.2 难点、疑点解析及重要公式与结论

一、难点、疑点解析

1. n 阶行列式的定义

对于 n 阶行列式的定义，重点应把握两点：一是每一项的构成，二是每一项的符号. 直观地说，每一项的构成是不同行不同列的 n 个元素相乘，一个 n 阶行列式共有 $n!$ 项；n 阶行列式的展开式中每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面所带符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当行指标为自然排列时，根据列指标排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 的逆序数确定此项的符号，当 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶排列时，符号为正；当 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇排列时，符号为负.

若 n 阶行列式的展开式乘积项行指标不是自然排列时，乘积项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号应为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

当 n 较大时，用定义计算行列式将是十分繁琐的，一般采用行列式的性质和按行列展开定理进行分析.

2. 行列式的计算方法

行列式的基本计算方法有两个：

(1) 利用行列式的性质将行列式化成较简单的且易于计算的行列式(如上(下)三角形行列式等)；

(2) 利用行列式的展开定理,将高阶行列式化成低阶行列式进行计算.

在实际计算过程中,往往将以上两种方法交替使用:先利用性质将某行(列)化出尽可能多的零元素,再用按行(列)展开定理进行降阶.注意,在化零元素的过程中,尽量不要出现分式,否则,计算过程往往会变得十分繁杂.

另外,行列式的性质和按行列展开定理还是讨论行列式相关理论的重要基础,在后面的学习过程中经常会遇到,因此,务必理解行列式的性质和行列展开定理的含义和功能.

3. 克莱姆法则

克莱姆法则是行列式的重要应用,利用它可以简洁地表示方程组的解,还可以在不求解方程组的情况下判断方程组解的情况.但应注意应用克莱姆法则有两个条件:一是方程组方程的个数与未知量的个数必须相同,二是系数行列式不为零.由于受到这些条件的限制以及计算高阶行列式的困难,使得克莱姆法则主要用于理论分析及较简单方程组求解,而求解线性方程组的一般方法在后面还会详细介绍.

二、重要公式与结论

1. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 对于副对角线行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 两类特殊的分块行列式(拉普拉斯展开式的应用)

(1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$