GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

温永仙 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/温永仙编著．—厦门：厦门大学出版社，2005.8

ISBN 7-5615-2427-7

Ⅰ.概… Ⅱ.温… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076343 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

http://www.xmupress.com

xmup @ public.xm.fj.cn

厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷

2005 年 8 月第 1 版 2006 年 7 月第 2 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:13.625 插页:2

字数:365 千字 印数:5 001-7 000 册

定价:25.00 元

内容提要

全书分概率论与数理统计两部分,共十章.概率论包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和大数定律与中心极限定理五章.数理统计包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和线性回归分析五章.各章末附有一定量的习题,习题前半部分侧重于基本概念和基本定理的应用,后半部分侧重于概率与统计在各领域的应用,兼顾计算题与难度适中的推理题,并配有测试题,书末附有习题和测试题参考答案.

本书可作为高等院校非数学类各专业本科生及部分专业研究生的教材,也可供广大科技工作者和大学生考研复习参考使用.

前　言

概率论与数理统计是高等院校非数学专业的一门重要的公共基础课. 随着进入21世纪，国内的高等院校大多向综合性大学发展，许多交叉学科也随之应运而生. 为了便于教学组织和教学管理，传递学科之间的交叉与渗透，拓宽学生的知识面，需要一本以涵盖各领域的实际问题为背景的概率论与数理统计的教材，该书就是本着这一目的而编写的.

本书共十章，主要介绍概率论与数理统计的基础知识. 全书大部分内容只要求读者具有一定的微积分基础知识即可顺利阅读；个别内容需要有一定的线性代数知识，没学过线性代数的初学者这部分可以先不读. 为了掌握和运用基本理论和公式，书中列举了较多的例题，在每节的末端，尽量安排一些综合例题. 在几章后配有测试题，用以读者自我检测对所学知识的掌握情况. 本书可供60左右学时讲授，具体使用时可根据各专业的不同情况对内容做必要的变动或增减.

该书在编写时，特别重视对概率论及数理统计基本思想和基础理论的剖析与阐释，重视引导读者提升概率与统计原理解决实际问题的能力. 在文字叙述上力求简明易懂，便于自学，又不失科学性和严谨性.

本书是编者以及同仁们的教学经验的总结，在本书的编写过程中，陈同英教授、林文浩、张朝阳、姜永副教授和李德新老师提供了许

多宝贵意见和建议，编者对此表示衷心的感谢.

编者才疏学浅，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正.

温永仙

2005 年　仲夏

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机试验

一、随机现象

在自然界及人类的社会活动中，大体存在着两类不同的现象：一类是确定性现象.例如，在标准气压下，水加热到 100 ℃就会沸腾；向上抛掷的一颗石子必定要落回地面等.这种在一定条件下，某种必然发生或必然不发生(事先可以预言)的现象称为**确定性现象**.另一类是不确定现象.例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能国徽一面朝上，也可能数字一面朝上，在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一支手枪射击同一目标，各次射击的弹着点不尽相同，在射击之前无法预测弹着点的确切位置；检验产品质量，任意抽取的某一产品有可能是正品，也可能是次品；桥牌选手在拿到牌之前并不知道他将拿到一手怎样的牌，等等.这类带有偶然性的现象，可以归纳出一个共同的特点：在一定条件下，具有多种可能发生的结果，而且事先都不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.我们把这种现象称为**随机现象**.

二、随机试验

为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测(或观察、检

测、实验等)统称为**试验**.如果一个试验满足三个条件:(1)可以在相同的条件下重复进行;(2)每一次试验的可能结果不只一个,并且能事先明确试验的所有的可能结果;(3)每次试验的具体结果在试验之前是无法预知的,便称此试验是**随机试验**,简称为**试验**,一般用字母 E 表示.下面列举一些随机试验的实例:

例 1 抛一枚硬币,观察正面或反面(不妨约定国徽为正面)出现的情况.

例 2 掷一骰子观察向上一面出现的点数.

例 3 观察某精品店一天内接待的顾客数.

例 4 检测一批元件的使用寿命.

例 5 从装有多色球的袋中任取一个,观察其颜色.

通俗地说,我们把随机试验中每一种可能发生的现象,或者每一个可能出现的事情统称为事件.其中在每次试验中必然会发生的现象称为**必然事件**,记为 Ω;在每次试验中必然不会发生的现象称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$;而在任何一次试验中可能发生,也可能不会发生的现象称为**随机事件**,用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示.

例 6 一只布袋中装有号码为 $1,2,\cdots,n$ 的完全相同的 $n(>3)$ 个球,今从中任取一球,观察被取出的球的编号.容易看出这是一种随机试验,并且以下列举的若干个现象都是该随机试验中可能发生的现象:

Ω=“取出之球号码$\geqslant 1$”, $\varnothing$=“取出之球号码<0”,

A=“取出之球号码$=3$”, B=“取出之球号码$\leqslant 3$”.

显然,Ω 是必然事件,$\varnothing$ 是不可能事件,而 A、B 都是随机事件.

必然事件和不可能事件都是确定性的,但通常都把它们看成随机事件的特例,在这种意义下事件与随机事件便是等价的概念,并简称随机事件为事件.

三、随机现象的统计规律性

经验告诉我们,在一次随机试验中某些随机事件发生的可能要

大一些，而另一些随机事件发生的可能要小一些．例如，“某人的寿命不超过100岁”的可能性要比“某人的寿命超过100岁”的大，这是因为大多数人的寿命不超过100岁；乘火车比乘汽车更安全，等等．我们希望能用一个数量表示随机事件发生的可能性大小，而这种标志着随机事件发生可能性大小的数量指标就称为随机事件发生的**几率**或**概率**，即概率是度量随机事件发生的可能性大小的数量．

问题是随机事件是否总是存在着这样的固有属性，使人们可以度量其发生的可能性大小？大量的事实说明，该问题的答案是肯定的．

事实上，对一个随机试验，虽然在每次试验中某一特定的随机事件是否发生并不具有确定性，也无规律可言，但若将试验在相同的条件下重复进行大量次数，并记录下各次试验的结果，就会发现其中存在着规律性．例如，重复抛掷一枚均匀的硬币多次，就会发现国徽朝上的次数大致占试验总数的一半，从而我们可以推断抛掷一枚均匀的硬币一次，其国徽朝上的可能性约为1/2，等等．可见表面上看来是偶然的现象中却隐含着某些必然的规律性，这种在大量重复试验中所呈现的固有规律性，就称为**随机现象的统计规律性**．

概率论是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科．数理统计则以概率论为基础，研究如何依据在大量次数的随机试验中所得到的数据推断事物的本质特征．概率统计的理论与方法在应用上十分广泛，它几乎遍及所有科学技术领域以及国民经济和工农业生产的各个部门之中．

§1.2 随机事件、事件的关系与运算

一、基本事件和基本空间

前面说过随机试验中每一种可能发生的现象（或事情）称为随机

事件，这些事件中有的比较简单，有的却比较复杂，对它们加以区分是有好处的. 例如，§ 1.1 例 6 中的事件 B“取出之球号码$\leqslant 3$”是一复杂事件，它是由三个简单事件 ω_i=“取出之球号码为 i”($i=1,2,3$)组合而成的，当且仅当事件集合$\{\omega_i \mid i=1,2,3\}$中的元素之一发生时，随机事件 B 发生. 可见复杂事件是可以用简单事件来表示的. 仔细观察可以看出，例 6 中类似于 $\omega_i(i=1,2,3)$的简单事件共有 n 个，分别是 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，它们正是随机试验的每一种可能结果.

一般地，我们把随机试验中每一种可能出现的、最简单的、不能再分的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件或样本点构成的集合称为**基本事件空间**或**基本空间**或**样本空间**，记为 Ω.

用集合表示法，例 6 的基本空间(即样本空间)可写成

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}.$$

例 1 设 E_1 为§ 1.1 例 2 中的随机试验. 记 ω_i 为“出现 i 点”($i=1,2,\cdots,6$)，于是

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}.$$

例 2 设 E_2 为相同条件下接连不断地向一个目标射击，直到击中目标为止，观察射击次数. 记 ω_i 为“第 i 次射击时首次击中目标”($i=1,2\cdots$)，于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\cdots\}$.

例 3 设 E_3 为某天中任取一时刻，记录下当时的气温. 若当天最低气温为 a 度，最高气温为 b 度，则基本事件 ω 为“当时的气温为 x 度”($a\leqslant x\leqslant b$)，则基本空间为

$$\Omega=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b].$$

由上面的几个例子可见，随机试验大体可以分成只有有限个可能结果(如 E_1)，有可列个可能结果(如 E_2)和有不可列个可能结果(如 E_3)三种情况. 要注意的是基本空间中的基本事件不但要涵盖随机试验的全部结果(即每次试验必出现其中之一)，而且基本事件两两不能同时出现(即每次试验只能出现其中之一，或者说基本事件具有两两互斥性)，这些是基本事件应满足的两项准则.

二、随机事件及其记号

§1.1 中曾通俗地把随机试验中每一个可能出现的现象(或事情)称为随机事件，现在我们要在基本空间或样本空间下更为深入地来阐述随机事件的概念. 我们的目标是用样本空间的子集来表示随机事件. 事实上，在前面我们已经有过用事件集合$\{\omega_i | i=1,2,3\}$表示§1.1 例 6 中的事件 B 的经验. 现在再看一个例子.

例 4 设布袋里有三个白球(编号为 1,2,3)和两个黑球(编号为 4,5)，今从中不放回地接连任取两只球，观察先后取出的两只球的号码. 该试验的可能结果，即基本事件或样本点记为

(i,j)="第一次取出 i 号球，第二次取出 j 号球"$(i,j=1,2,3,4,5,i\neq j)$.

其样本空间为

$$\Omega=\{(i,j) | i,j=1,2,3,4,5;i\neq j\},$$

共含 20 个样本点，它们分别是：

$$\begin{array}{cccc}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\
(2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\
(3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4).
\end{array}$$

值得注意的是，在一次试验中除了基本事件之外，还可能观察到其他一些事件，例如

A="第一次取出的是黑球"，

B="第二次取出的是黑球"，

C="两次取出的都是黑球".

事件 A,B,C 都可以用样本点的集合表示，如

$$A=\{(i,j) | i=4,5;j=1,2,3,4,5;i\neq j\},$$

$$B=\{(i,j) | i=1,2,3,4,5;j=4,5;i\neq j\},$$

$$C=\{(i,j) | i,j=4,5;i\neq j\}.$$