人教新课标版

Xue Lian Chuang

学练创

轻松学习　快乐练习　探究创新

九年级数学 下

总主编/刘文全

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

人教新课标版

Xue Lian Chuang

学练创

轻松学习　快乐练习　探究创新

九年级数学 下

总 主 编／刘文全
学科主编／汪四友
本册主编／王洪贵　何祥俊
编写者（排名不分先后）／冯瑞祥　方守恒
汪四友　石春祥　林　灿　任广富
万怀生　靳全有　秦国基　霍世详
明文静　崔志浩　段　炜　杨春华
熊新华　王洪贵　华秋实　谷万穗
张育林　蔡振国　付耀名　姜红松
欧阳欣　何祥俊

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字02号

图书在版编目(CIP)数据

学练创九年级数学(人教版)下/刘文全主编. —武汉:湖北教育出版社,2008.1
ISBN 978-7-5351-5007-3

Ⅰ.学… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第197076号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路277号
网　址:http//www.hbedup.com　　邮编:430015　　电话:027-83619605
经　销:新　华　书　店
印　刷:武汉市新华印刷有限责任公司（430200・武汉市江夏区纸坊古驿道91号）
开　本:880mm×1230mm　1/32　　9.75印张
版　次:2008年1月第1版　　2008年1月第1次印刷
字　数:346千字　　印数:1-6 000

ISBN 978-7-5351-5007-3　　定价:14.00元

寄读者朋友

亲爱的读者朋友：我是一部名副其实的集“学”“练”“创”为一身的系列丛书！脱胎换骨后的我，是依据《全日制义务教育课程标准》、《义务教育课程标准实验教科书》和《教师教学用书》打造的。你看到的我饱经风霜，经过了策划论证、专家研讨、读者访谈、实验反馈等一系列严格的历练，现在以更全面体现新课标的理念、反映课程改革的精神、贴紧学习实际的面貌与你见面，因此，毋庸质疑，我更具有科学性、实用性和权威性。

我的特点鲜明，现列出以下三点：

其一，传授方法，启迪思维——是破译科学思维方法的秘码

查理德·费思曼说过，“科学是一种方法”，因此，学习和运用科学知识的核心是方法，而方法的核心是思维方法，尤其是超常规思维方法，它是知识转化为创造的必经之路。我突出思维方法的训导，所开辟的“方法特快专递（方法快递）”专门用来引导你调整思维视角，扩大思维范围，寻求变异的思路和方法，做到触类旁通，举一反三。

其二，诠释课标，演绎时尚——是揭开新课标神秘面纱的秘籍

新课标目标设计中，我认为“过程和方法”是一切的根本。因此我注重“过程和方法”的目标指导，重视知识和方法的实际运用，尤其是提供了许多常见的自然现象和当前社会生活中诸多鲜活的情景材料，让你去探究，不仅可以激发你的学习兴趣，而且可以实实在在地培养你的创新精神和实践能力。

其三，完善功能，破解难点——是提高学习成绩的秘方

“知识——方法——能力”是我身体的三维架构：“知识全屏显示（知识小屋）”显示全方位知识内容和结构，“方法特快专递（方法快递）”传递思考并解答问题的技巧及风险规避的方法，“智能自动升级（能力展示）”提供从“双基”训练到考试竞赛的升级平台。不仅如此，语文学科的综合性实践活动、口语交际、作文（习作），数理化学科的考点等你特别关注的重点或疑难问题，都辟有专栏做了详尽、深入的点拨。

握着我的手，“学练创”无忧！我一定会不负众望，在你学习和人生发展道路上发挥魔力，助你走向辉煌！

你的朋友《学练创》

2007 年 11 月

目 录

第二十六章

二 次 函 数

26.1　二次函数

学前导思

1. 银行的储蓄利率是随时间的变化而变化的，也就是说，利率是一个变量. 在我国，利率的调整是由中国人民银行根据国民经济的发展情况而决定的. 设人民币一年定期储蓄的年利率是 x，一年到期后，银行将本金和利息自动按一年定期储蓄转存. 如果存款额是 100 元，那么两年后的本息和 y(元) 的表达式(不考虑利息税) 是什么?y 是 x 的函数吗?是 x 的什么函数?

2. 我们已经学习了一次函数、正比例函数和反比例函数，知道了它们的图象与性质. 那么，二次函数 $y = ax^2$ 的图象是什么样的?它又具有哪些性质呢?

3. 形如 $y = ax^2 + k$(a、k 是常数，$a \neq 0$) 的抛物线和形如 $y = a(x-h)^2$(a、h 是常数，$a \neq 0$) 的抛物线，它们与抛物线 $y = ax^2$(a 是常数，$a \neq 0$) 有怎样的联系与区别呢?是否可以由抛物线 $y = ax^2$ 经过平移得到呢?如何平移?

4. 任何一个二次函数都可以写成一般形式：$y = ax^2 + bx + c$(a、b、c 是常数，$a \neq 0$)，那么从二次函数的一般形式来看，它的图象有什么特点呢?它具有哪些一般的、更普遍的性质呢?

5. 小亮要将一根长 40cm 的铁丝弯成一个矩形框架，在动手操作时，他就想这样一个问题：能够弯成的矩形在什么条件下面积最大?它的最大面积是多少呢?你能帮他解决这个问题吗?

知识全屏显示

知识要点归纳

要点 1　二次函数的定义及自变量的取值范围

一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$(a、b、c 是常数，$a \neq 0$) 的函数，叫做二次函数. 其中，x 是自变量，a、b、c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

(1) 任何一个二次函数的关系式都可以化成 $y = ax^2 + bx + c$(a、b、c 是常数，$a \neq 0$) 的形式，因此把 $y = ax^2 + bx + c$(a、b、c 是常数，$a \neq 0$) 叫做二次函数的一般形式.

(2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，a、b、c 是常数，a 必须不为 0，否则没有了二次项

就不是二次函数了，而 b、c 可以为任意实数. 特别地，当 $b=0$ 时，二次函数形如 $y=ax^2+c$；当 $c=0$ 时，二次函数形如 $y=ax^2+bx$；当 $b=0$，$c=0$ 时，二次函数形如 $y=ax^2$，这些都是二次函数的特殊形式.

(3) 一般情况下，二次函数中自变量的取值范围是全体实数. 但对实际问题，自变量的取值范围必须使实际问题有意义.

要点 2　二次函数 $y=ax^2$ 的图象及其性质

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象.

(1) 二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条关于 y 轴对称的曲线，这条曲线叫做抛物线. 抛物线与对称轴的交点称为顶点，它的顶点是坐标原点. $a>0$ 时，抛物线的开口向上，并向上无限伸展；$a<0$ 时，抛物线的开口向下，并向下无限伸展.

(2) 抛物线 $y=ax^2$ 的开口大小由 $|a|$ 的大小决定，$|a|$ 越大，抛物线开口越窄；$|a|$ 越小，抛物线的开口就越宽.

2. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法.

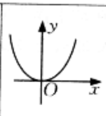
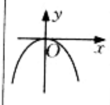
(1) 列表：先取原点(0,0)，然后以原点为中心对称地选取 x 的值，求出函数值，列表.

(2) 描点：在平面直角坐标系中描出表中的各点.

(3) 连线：用平滑的曲线按顺序连结各点.

3. 抛物线 $y=ax^2$ 的性质.

抛物线 $y=ax^2$ 的性质主要是从图象的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性、函数的最值五个方面来研究，如下表所示：

函数	图象		开口方向	顶点坐标	对称轴	函数变化	最大(小)值
$y=ax^2$	$a>0$		向上	(0,0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小	当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$
$y=ax^2$	$a<0$		向下	(0,0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x=0$ 时，$y_{最大}=0$

要点 3　函数 $y=ax^2+k$ 与函数 $y=ax^2$ 的图象之间的关系

函数 $y=ax^2+k$ 与函数 $y=ax^2$ 的图象形状相同，位置不同. 函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由函数 $y=ax^2$ 的图象经上下平移得到. 当 $k>0$ 时，函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由函数 $y=ax^2$ 的图象向上平移 k 个单位得到；当 $k<0$ 时，函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由函数 $y=ax^2$ 的图象向下平移 $|k|$ 个单位得到.

要点4　函数 $y=a(x-h)^2$ 与函数 $y=ax^2$ 的图象之间的关系

函数 $y=a(x-h)^2$ 与函数 $y=ax^2$ 的图象形状相同，位置不同，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可由 $y=ax^2$ 的图象经过左右平移得到. 当 $h>0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可看成是将函数 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位得到的；当 $h<0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是由函数 $y=ax^2$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位得到的.

要点5　抛物线 $y=ax^2+k$、抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的性质

抛物线 $y=ax^2+k$、抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的性质与抛物线 $y=ax^2$ 的性质异同点如下表所示：

函数	开口方向	对称轴	顶点坐标	增减性	最大(小)值
$y=ax^2$	$a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下	y 轴	$(0,0)$	当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大（$a<0$ 时，略）	$a>0$ 时，当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$；$a<0$ 时，当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$
$y=ax^2+k$		y 轴	$(0,k)$		$a>0$ 时，当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=k$；$a<0$ 时，当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=k$
$y=a(x-h)^2$		直线 $x=h$	$(h,0)$		$a>0$ 时，当 $x=h$ 时，$y_{最小值}=0$；$a<0$ 时，当 $x=h$ 时，$y_{最大值}=0$

要点6　抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的形状相同，只是位置不同. 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 有如下特点：

(1) $a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下；

(2) 对称轴是平行于 y 轴的直线 $x=h$；

(3) 顶点坐标是 (h,k)；

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可由抛物线 $y=ax^2$ 向右(或向左)平移 $|h|$ 个单位，再向上(或向下)平移 $|k|$ 个单位而得到.

(4) 由 $y=a(x-h)^2+k$ 中可以直接看出抛物线的顶点坐标，所以通常把 $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ 叫做二次函数的顶点式.

要点7　用配方法求抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点与对称轴

我们可以用配方法将抛物线的一般式方程 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 改写成顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，从而很快得出其顶点坐标和对称轴方程.

$y=ax^2+bx+c$　　　　　　　　　　　　　　一般式

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \qquad \text{提取二次项系数}$$

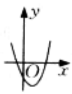
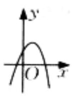
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \qquad \text{配方}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad \text{顶点式}$$

因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

要点 8　二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象的性质

函数	取值	图象	开口方向	顶点坐标及对称轴	增减性	最大(小)值
$y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数，$a\neq 0$)	$a>0$		向上	顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$
	$a<0$		向下		当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

要点 9　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的五点作图法

(1) 用配方法求出抛物线的顶点坐标和对称轴，在坐标系中描出顶点 O，并用虚线画出对称轴；

(2) 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点为 A、B，与 y 轴的交点为 C，再找出点 C 关于对称轴的对称点 D，把 A、B、C、D 和顶点 O 共五个点按从左到右的顺序连结起来，并向上或向下无限伸展，就得到函数的图象. 这种方法简称"五点法"作图.

要点 10　求二次函数的解析式

一般式：如果已知图象上三点或三对 x、y 的值，通常选用一般式，即 $y=ax^2+bx+c$.

顶点式：如果已知图象的顶点或对称轴或函数有最大（小）值，通常选用顶点式，即 $y=a(x-h)^2+k$.

交点式：如果已知图象与 x 轴交点坐标为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$，通常选用交点式，即 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

平移式：先把函数解析式化为顶点式，然后按照平移方向和平移距离确定函数解析式.

要点 11　求二次函数的最值

如果自变量的取值范围是全体实数，那么函数在顶点处取得最大（或最小）值，即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

如果自变量的取值范围是 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，那么首先要看 $-\frac{b}{2a}$ 是否在自变量的取值范围 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 内. 若在此范围内，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；若不在此范围内，则需要考虑函数在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 范围内的增减性. 如果在此范围内，y 随 x 的增大而增大，则当 $x=x_2$ 时，$y_{最大值}=ax_2^2+bx_2+c$；当 $x=x_1$ 时，$y_{最小值}=ax_1^2+bx_1+c$. 如果在此范围内，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=x_1$ 时，$y_{最大值}=ax_1{}^2+bx_1+c$；当 $x=x_2$ 时，$y_{最小值}=ax_2^2+bx_2+c$. 如果在此范围内，y 随 x 的增大有增有减，则需考察 $x=x_1$、$x=x_2$、$x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 的值如何.

要点 12　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位置与 a、b、c 的关系

(1)a 的正、负决定抛物线的开口方向. $a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下. $|a|$ 的大小决定抛物线的开口大小. $|a|$ 越大，抛物线开口越小，反之越大.

(2)$b=0$ 时，抛物线的对称轴为 y 轴；若 a、b 同号，则对称轴在 y 轴的左侧；若 a、b 异号，则对称轴在 y 轴右侧. 即“左同右异”.

(3) 抛物线与 y 轴的交点为 $(0,c)$. 当 $c=0$ 时，抛物线过原点；当 $c>0$ 时，抛物线与 y 轴的正半轴相交；当 $c<0$ 时，抛物线与 y 轴的负半轴相交.

方法特快专递

经典范例剖析

例 1　指出下列函数中，哪些是二次函数，哪些不是二次函数.

(1)$y=(x+2)^2-x^2$；(2)$y=2x(3-x)$；(3)$y=ax^2+bx+c$；(4)$y=-\frac{1}{3x^2}$；

(5)$y=-\frac{1}{2}x-\sqrt{3}x^3$；(6)$y=\sqrt{3x^2-2x+1}$；(7)$y=(m^2+1)x^2-3$.

分析 判断一个函数是不是二次函数，应结合二次函数的定义，而且要先化简整理成二次函数的一般形式.(1) 右边整理后为一次二项式；(2) 右边整理后为二次二项式；(3) 中若 a 为 0 时，则为一次函数($b \neq 0$)；(4) 右边为分式；(5) 右边为三次二项式；(6) 右边为无理式；(7) 中 $m^2+1\neq 0$，故右边为二次二项式.

解 (2)(7) 是二次函数；(1)(3)(4)(5)(6) 不是二次函数.

例 2 如果函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 是二次函数，试确定 m 的值.

分析 根据二次函数的定义，只需满足 $m^2-3m+2=2$ 且 $m-3\neq 0$，函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 就是二次函数.

解 依题意，函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 是二次函数.

则 $\begin{cases} m^2-3m+2=2, & (1) \\ m-3\neq 0. & (2) \end{cases}$

$\therefore$ 由(1) 得 $m_1=0, m_2=3$；由(2) 得 $m\neq 3$.

故当 $m=0$ 时，函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 是二次函数.

例 3 如图 26-1，已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6\text{cm}$，$BC=12\text{cm}$，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动，P、Q 分别从 A、B 同时出发，用 S 表示图形的面积，x 表示移动的时间($x>0$).

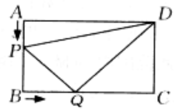


图 26-1

(1) 几秒后 $S_{\triangle PQB}=8\text{cm}^2$？

(2) 求 $S_{\triangle PQD}$ 与 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围.

分析 (1) 中，$\triangle PBQ$ 的面积由 PB、BQ 的长决定，故只需用含 x 的代数式表示 PB、BQ 的长，即可列出方程求解.(2) 中，$\triangle PDQ$ 的形状不特殊，难以直接求出面积，故可用矩形面积减去三个三角形的面积求得.

解 (1) 设 x 秒后，$\triangle PQB$ 的面积为 8cm^2，根据题意得：

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(6-x)=8$.

整理，得 $x^2-6x+8=0$.

$\therefore x_1=2, x_2=4$.

$\therefore$ 当点 P 出发 2 秒或 4 秒后，$\triangle PQB$ 的面积为 8cm^2.

$$\begin{aligned}(2) S_{\triangle PDQ} &= S_{\text{矩形}ABCD}-S_{\triangle APD}-S_{\triangle PBQ}-S_{\triangle DCQ} \\ &= 12\times 6-\frac{1}{2}x\cdot 12-\frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 2x-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(12-2x) \\ &= x^2-6x+36.\end{aligned}$$

自变量 x 的取值范围是 $0<x\leqslant 6$.

例 4 在同一直角坐标系中，画出下列函数的图象，并比较两个图象之间的关系.

(1)$y=4x^2$；(2)$y=-4x^2$.

分析 按照画图象的三个步骤进行画图，注意运用对称性.

解 ① 列表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
$y=4x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$y=-4x^2$	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

② 描点、连线（如图 26-2 所示）.

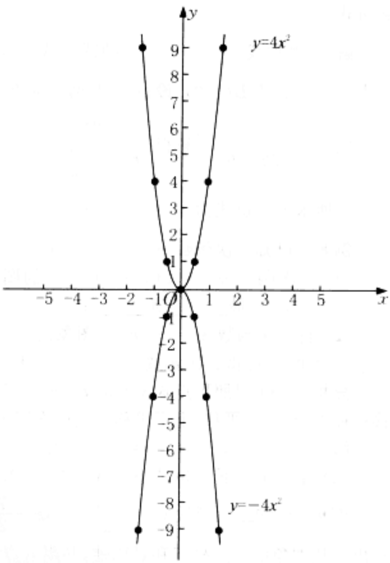


图 26-2

观察图象可以发现 $y=-4x^2$ 的图象可由 $y=4x^2$ 的图象以 x 轴为对称轴向下翻转 180° 得到.

例 5 不画图象，说出抛物线 $y=6x^2$ 和抛物线 $y=-\sqrt{3}x^2$ 的对称轴、顶点坐标和开口方向.

分析 在抛物线 $y=ax^2$ 中，由 a 的正负决定抛物线开口方向.

解 抛物线 $y=6x^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点坐标是(0,0)，开口方向向上；抛物线 $y=-\sqrt{3}x^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点坐标是(0,0)，开口方向向下.

例 6 (1) 请说出抛物线 $y=-2x^2-3$ 与 $y=-2x^2+2$ 是由抛物线 $y=-2x^2$ 经怎样的平移得到的；

(2) 分别通过怎样的平移，可以由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 得到抛物线 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ 和 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$.

分析 (1) 抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 沿着对称轴（y 轴）上下平移而得到，k 的符号确定移动的方向，$|k|$ 确定移动的距离；(2) 抛物线 $y=a(x-h)^2$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 经过左右平移得到. 当 $h>0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 是将抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 h 个单位得到的；当 $h<0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 是将抛物线 $y=ax^2$ 向左平移 $|h|$ 个单位得到的.

解 (1) 抛物线 $y=-2x^2-3$ 可由抛物线 $y=-2x^2$ 沿着 y 轴向下平移 3 个单位

得到，而抛物线 $y=-2x^2+2$ 可由抛物线 $y=-2x^2$ 沿 y 轴向上平移 2 个单位得到.

(2) 抛物线 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ 可以看成是由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 向左平移 3 个单位得到的，抛物线 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$ 可以看成是由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 向右平移 3 个单位得到的.

例 7 求经过抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3$ 的顶点 A 和抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的顶点 B 的直线的解析式.

分析 先写出两条抛物线的顶点 A 和 B 的坐标，再利用待定系数法求直线 AB 的解析式.

解 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3$ 的顶点 A 的坐标为 $A(0,3)$，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的顶点 B 的坐标为 $B(2,0)$. 设过 A、B 两点的直线解析式为 $y=kx+b$.

则 $\begin{cases}3=k\times 0+b,\\ 0=2k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\ k=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

故所求的解析式为 $y=-\frac{3}{2}x+3$.

例 8 已知二次函数 $y=-2(x+1)^2-3$.

(1) 二次函数 $y=-2(x+1)^2-3$ 的图象的顶点坐标是______，对称轴方程是__________，y 有最______值______；

(2) 将二次函数 $y=-2x^2$ 的图象向______平移______个单位，再向______平移______个单位，可得二次函数 $y=-2(x+1)^2-3$ 的图象.

分析 (1) 对照顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 解答各问题；(2) 在二次函数的图象的平移过程中，与左右平移、上下平移的先后次序无关，但与平移的方向、距离相关.

解 (1) $(-1,-3)$　$x=-1$　大　-3；

(2) 左　1　下　3(或下　3　左　1).

例 9 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}$，求出函数图象的顶点坐标和对称轴，并用五点法作出函数的大致图象. 根据图象回答，x 取何值时，y 随 x 的增大而增大? x 取何值时，y 随 x 的增大而减小? 函数 y 有最大值还是最小值? 最值是多少?

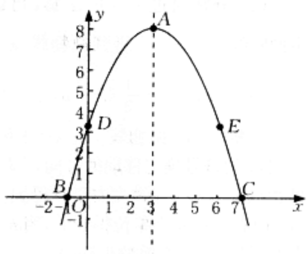


图 26-3

分析 通过配方或利用顶点公式求出顶点坐标和对称轴，再利用五点法作图.

解 $\because y=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}(x-$

$3)^2+8$.

$\therefore$ 抛物线的顶点为 $A(3,8)$，对称轴为直线 $x=3$.

令 $y=0$，求出抛物线与 x 轴的交点坐标 $B(-1,0)$、$C(7,0)$.

令 $x=0$，求出抛物线与 y 轴的交点 $D\left(0,\frac{7}{2}\right)$，再找出点 D 关于对称轴 $x=3$ 的对称点 $E\left(6,\frac{7}{2}\right)$.

将 B、D、A、E、C 五点连成光滑曲线，即得函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}$ 的图象，如图26-3所示.

从图象可以看出，在对称轴的左侧，即当 $x<3$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>3$ 时，y 随 x 的增大而减小. 因为抛物线开口向下，顶点 A 是抛物线的最高点，所以 y 有最大值，即当 $x=3$ 时，$y_{最大值}=8$.

例 10 求下列抛物线的对称轴方程和顶点坐标.

(1) $y=2x^2-4x+1$；(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$.

分析 求抛物线的顶点坐标有两种方法：一是利用配方法将一般式化为顶点式；二是利用公式分别求出顶点的横坐标和纵坐标，再写出顶点坐标.

解 方法一：(配方法)(1) $y=2x^2-4x+1=2(x^2-2x)+1$

$$=2(x^2-2x+1)-2\times1+1=2(x-1)^2-1.$$

$\therefore$ 抛物线 $y=2x^2-4x+1$ 的对称轴方程为 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-1)$.

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4=-\frac{1}{2}(x^2-2x)-4=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+\frac{1}{2}-4$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{7}{2}.$$

$\therefore$ 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$ 的对称轴方程为 $x=1$，顶点坐标为 $\left(1,-\frac{7}{2}\right)$.

方法二：(公式法)(1) $\because a=2, b=-4, c=1$.

$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times2}=1, \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times2\times1-(-4)^2}{4\times2}=-1$.

$\therefore$ 抛物线 $y=2x^2-4x+1$ 的对称轴方程为 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-1)$.

(2) $\because a=-\frac{1}{2}, b=1, c=-4$.

$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=1, \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-4)-1^2}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$ 的对称轴方程为 $x=1$，顶点坐标为 $\left(1,-\frac{7}{2}\right)$.

例 11 已知 $a<-1$，点 $(a-1,y_1)$、(a,y_2)、$(a+1,y_3)$ 都在函数 $y=x^2$ 的图象上，则(　　).

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

分析 本例探究同一函数中当 x 取不同的数值时，函数值 y 的大小关系，可以将 x 的值代入求出对应 y 的值再比较，也可取特殊的 a、x 的值，计算出相应的结果再比较，最简便的还是利用二次函数的性质.

解 方法一：对于函数 $y=x^2$，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

又知 $a<-1$ 时，$a-1<a<a+1<0$.

$\therefore y_1>y_2>y_3$. $\therefore$ 选 C.

方法二：当 $x=a-1$ 时，$y_1=(a-1)^2$；当 $x=a+1$ 时，$y_3=(a+1)^2$.

$\because a<-1$. $\therefore a-1<a<a+1<0$.

$\therefore (a-1)^2>a^2>(a+1)^2$.

即 $y_1>y_2>y_3$. $\therefore$ 选 C.

方法三：取 $a=-2$，则 $a-1=-3$，$a=-2$，$a+1=-1$.

$\therefore y_1=(-3)^2=9$，$y_2=(-2)^2=4$，$y_3=(-1)^2=1$.

$\therefore y_1>y_2>y_3$. $\therefore$ 选 C.

例 12 如图 26-4 所示，是二次函数 $y=ax^2-x+a^2-1$ 的图象，则 a 的值是______.

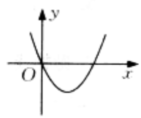


图 26-4

分析 由图象可知抛物线经过原点 $(0,0)$，代入解析式中即可得 $a^2-1=0$，即 $a=\pm1$，因为抛物线开口向上，所以 $a>0$，则 $a=1$.

解 1.

例 13 已知，抛物线 $y=a(x-t-1)^2+t^2$（a、t 是常数，$a\neq0$，$t\neq0$）的顶点是 A，抛物线 $y=x^2-2x+1$ 的顶点是 B.

(1) 判断点 A 是否在抛物线 $y=x^2-2x+1$ 上，为什么？

(2) 如果抛物线 $y=a(x-t-1)^2+t^2$ 经过点 B.

① 求 a 的值；② 这条抛物线与 x 轴的两个交点和它的顶点 A 能否构成直角三角形？若能，求出 t 的值；若不能，请说明理由.

分析 (1) 先求出抛物线 $y=a(x-t-1)^2+t^2$ 的顶点 A 的坐标，代入抛物线 $y=x^2-2x+1$ 的解析式中验证即可. (2) ① 求出抛物线 $y=x^2-2x+1$ 的顶点 B 的坐标，代入抛物线 $y=a(x-t-1)^2+t^2$ 中，即可求出 a. ② 利用抛物线的对称性及等腰三角形的性质求解.

解 (1) 点 A 在抛物线 $y=x^2-2x+1$ 上. 理由如下：

$\because$ 抛物线 $y=a(x-t-1)^2+t^2$ 的顶点为 $A(t+1,t^2)$.

而当 $x=t+1$ 时，$y=x^2-2x+1=(t+1-1)^2=t^2$.