



附光盘

高秀华 张小江 王欢 等编著

有限单元法原理 及应用简明教程



化学工业出版社

★★★★★★★★★★★★

高秀华 张小江 王 欢 等编著

有限单元法原理 及应用简明教程



化学工业出版社

北京

图书在版编目 (CIP) 数据

有限单元法原理及应用简明教程/高秀华, 张小江,
王欢等编著. —北京: 化学工业出版社, 2008. 6
ISBN 978-7-122-02808-2

I. 有… II. ①高…②张…③王… III. 有限元法-教材
IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 078914 号

责任编辑: 周 红
责任校对: 吴 静

装帧设计: 张 辉

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 化学工业出版社印刷厂

787mm×1092mm 1/16 印张 11 $\frac{3}{4}$ 字数 287 千字 2008 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 28.00 元

版权所有 违者必究

前言

有限单元法是随着电子计算机的发展而迅速发展起来的一种工程力学问题的数值求解方法。20 世纪 50 年代初,它首先应用于连续体力学领域——飞机结构静、动态特性分析中,用以求得结构的变形、应力、固有频率以及振型。在 20 世纪 70~80 年代,我国开始推广有限单元法的理论及其应用。

有限单元法是依赖于计算机软硬件技术的一种数字模拟技术。由于这种方法的有效性,其理论与应用发展非常迅速。有限单元法的应用已从固体力学发展到流体力学、热力学、电磁学、声学、光学、生物学等多项耦合场问题。

有限单元法在某种程度上可以取代实验,从而加快了设计或者研究的问题的进度,大大提高了其安全性、可靠性和经济性,为工业技术的进步起到了巨大的推动作用。

随着计算机软硬件技术的发展,有限单元法能够被少数人掌握的局面应该打破;其次,工程技术的创新发展、工程的复杂性又需要更多的工程技术人员、研究工作者掌握这种现代技术,这是历史发展的必然。

目前,大型商业化的有限元工程软件比较成熟,从应用技术角度来讲,一般结构分析可以采用通用软件。但是,从使用与发展的角度出发,为了能够很好地掌握和学习工程软件以及必要的程序二次开发,则必须对有限单元法的基本原理和方法有相当程度的理解,否则使用者在解决工程问题时将会无所适从。

笔者结合多年的教学、科研体会,将结构力学、弹性力学、动力学等必要的基础知识与有限单元法的基本原理及工程应用有机地结合起来。对有限单元法的原理、方法的描述由浅入深、简明实用、重点难点突出,并配以相应的计算算例及大型工程软件的使用示例,以加深读者的理解和消化;即使对结构力学、弹性力学等不熟悉的读者,也力求使他们理解和掌握这门技术。

全书共分 10 章,主要介绍固体力学有限单元方法的基本理论和应用。

第 1 章 概述了有限单元法的基本概念、解题步骤以及工程有限元分析实例。

第 2 章 介绍了结构几何构造分析的必要性、结构计算基本知识、几何不变结构的组成规律、静定结构和超静定结构的基本特性以及结构对称性利用的原则等,为结构设计、有限单元法力学分析的建模及约束处理等奠定必要的基础。

第 3 章 重点推论了杆系结构静力分析的有限单元法原理,本章是本书重点,为入门基础。为了便于理解,本章以有限元分析的矩阵运算法详细给出了一杆系结构的计算步骤。

第 4 章 举例说明了平面应力问题和平面应变问题的力学特点以及平面结构问题的有限单元法。

第 5 章 以平面四结点四边形、八结点等参元为例,介绍计算精度较高的适应性较强的单元的求解问题。

第 6 章 介绍了三维空间问题的应力状态;以简单四面体单元及 20 结点等参元为例,讲述空间问题的有限单元法。

第 7 章 分析了轴对称旋转体的力学特点以及计算简化的方法,并介绍了用有限元法求

解的过程。

第8章 介绍了板壳单元的力学特点及用有限元法求解的过程。

第9章 简述了结构动力分析的数学模型,自由振动及受迫振动的有限单元法求解的过程。

第10章 本章为提高部分。内容包括:非线性问题分类及求解、非线性问题求解方法;材料非线性特征、材料非线性模型、弹塑性问题有限元分析;几何非线性问题的两大类工程问题的特征、几何非线性有限元分析原理,并且推导了杆单元的切线刚度以加深对非线性问题刚度矩阵的理解;边界非线性(接触)问题求解、接触对的坐标系及接触状态、接触状态判断条件;非线性弹性结构两类稳定问题及有限元非线性分析;有限元法求解结构非线性特点等。

另外,每章后都配有ANSYS结构计算示例、思考与练习题。

全书由高秀华、张小江、王欢、陈淑清编写。参加编写工作的还有田阳阳、赵建国、邓策、刘玉娟、李秀梅等。全书由于国飞、王云超主审。

本书在编写过程中得到了各界同仁和朋友的大力支持、鼓励和帮助,并参阅了ANSYS及相关在线资料,在此作者一并表示衷心感谢!

由于作者水平有限,书中难免存在不当之处,敬请指教。

编者

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 有限单元法的概念	1
1.2 有限单元法的基本步骤	2
1.3 工程实例	3
思考与练习题	5
第 2 章 结构几何构造分析	6
2.1 结构几何构造分析的必要性	6
2.2 结构计算基本知识	6
2.2.1 结构计算简图	6
2.2.2 结构的分类与基本特征	9
2.2.3 结构对称性的利用	13
2.3 结构几何构造分析的自由度与约束	15
2.3.1 自由度	16
2.3.2 约束	16
2.4 自由度计算公式	17
2.4.1 桁架自由度计算公式	17
2.4.2 平面混合结构的自由度计算公式	18
2.5 几何不变结构组成规律	18
2.5.1 二元体规则	19
2.5.2 两刚片规则	20
2.5.3 三刚片规则	20
2.6 平面结构几何构造分析示例	21
2.7 空间结构几何构造分析	23
思考与练习题	23
第 3 章 杆系结构静力分析的有限单元法	24
3.1 结构离散与向量表示	24
3.1.1 结构离散化	24
3.1.2 坐标系	26
3.1.3 向量表示	27
3.2 位移函数及单元的刚度矩阵	27
3.2.1 轴向拉压杆单元的位移函数	28
3.2.2 梁单元平面弯曲的位移函数	29
3.2.3 单元的应力应变	29

3.2.4	平面刚架梁单元的刚度矩阵	30
3.2.5	单元的刚度矩阵的性质	31
3.3	坐标变换及单元刚度矩阵	32
3.3.1	坐标变换	32
3.3.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	33
3.4	整体刚度矩阵	34
3.4.1	整体刚度矩阵的建立	34
3.4.2	整体刚度矩阵的集成	36
3.4.3	整体刚度矩阵的性质	37
3.5	约束处理及求解	38
3.5.1	约束处理的必要性	38
3.5.2	约束处理方法	38
3.6	计算示例	41
3.7	ANSYS 桁架结构计算示例	47
3.7.1	问题描述	47
3.7.2	ANSYS 求解操作过程	48
3.7.3	结论	51
3.8	ANSYS 刚架结构计算示例	52
3.8.1	问题描述	52
3.8.2	结论	58
	思考与练习题	58
第4章	平面结构问题的有限单元法	61
4.1	平面应力问题	61
4.2	平面应变问题	62
4.3	平面问题的离散化	62
4.4	平面三结点三角形单元	63
4.4.1	位移函数	63
4.4.2	形函数矩阵	64
4.4.3	单元的应力与应变	65
4.4.4	三角形单元刚度矩阵	66
4.4.5	整体刚度矩阵	67
4.5	ANSYS 平面结构计算示例	68
4.5.1	问题描述	68
4.5.2	ANSYS 求解操作过程	69
4.5.3	结论	73
	思考与练习题	73
第5章	等参元	75
5.1	坐标变换与平面四结点等参元	75
5.2	平面八结点等参单元	76

5.3 单元刚度矩阵	77
5.4 ANSYS 等参元计算示例	79
5.4.1 问题描述	79
5.4.2 ANSYS 求解操作过程	79
5.4.3 结论	83
思考与练习题	84
第6章 空间问题的有限单元法	85
6.1 三维应力状态	85
6.2 空间结构的离散化	86
6.3 简单四面体单元	87
6.3.1 形状函数	87
6.3.2 单元刚度矩阵	88
6.3.3 整体结构载荷列向量	89
6.4 20 结点等参元	90
6.4.1 形状函数	90
6.4.2 单元刚度矩阵	91
6.5 ANSYS 空间问题计算示例	93
6.5.1 问题描述	93
6.5.2 ANSYS 求解操作过程	94
6.5.3 结论	98
思考与练习题	98
第7章 轴对称旋转单元	99
7.1 应力与应变关系	99
7.2 单元刚度矩阵	100
7.3 ANSYS 轴对称旋转单元计算示例	102
7.3.1 问题描述	102
7.3.2 ANSYS 求解操作过程	103
7.3.3 结论	107
思考与练习题	107
第8章 板壳单元	108
8.1 板壳结构	108
8.2 薄板基础理论知识	108
8.3 3 结点三角形薄板单元	111
8.3.1 坐标变换	111
8.3.2 位移向量	111
8.3.3 应变位移转换矩阵	112
8.3.4 单元刚度矩阵	114
8.4 厚板基础理论知识	114

8.5	4 结点四边形板单元	116
8.5.1	坐标变换	116
8.5.2	单元位移场与应变位移转换矩阵	116
8.5.3	单元刚度矩阵	117
8.6	壳单元	117
8.6.1	板壳结构物理特性	117
8.6.2	结点平面壳单元	119
8.7	ANSYS 板壳单元计算示例	120
8.7.1	问题描述	120
8.7.2	ANSYS 求解操作过程	120
8.7.3	结论	123
	思考与练习题	124
第 9 章	结构动力分析的有限单元法	125
9.1	运动方程	125
9.2	质量矩阵和阻尼矩阵	126
9.2.1	一致质量矩阵	126
9.2.2	集中质量矩阵	127
9.2.3	阻尼矩阵	128
9.3	结构的自振频率及振型	128
9.3.1	自振频率及振型	128
9.3.2	求解	129
9.4	ANSYS 结构动力分析计算示例	129
9.4.1	问题描述	129
9.4.2	ANSYS 求解操作过程	130
9.4.3	结论	136
	思考与练习题	136
第 10 章	结构非线性分析的有限单元法简介	138
10.1	非线性问题分类及求解	138
10.1.1	非线性问题分类	138
10.1.2	非线性问题求解	139
10.2	非线性问题求解方法	139
10.2.1	直接迭代法	140
10.2.2	牛顿-拉斐逊 (Newton-Raphson) 法	141
10.2.3	载荷增量法	142
10.3	材料非线性	142
10.3.1	材料非线性特征	143
10.3.2	材料非线性模型	145
10.3.3	弹塑性问题有限元分析	146
10.4	几何非线性	

10.4.1 几何非线性特征.....	146
10.4.2 几何非线性有限元分析.....	147
10.4.3 杆单元刚度.....	149
10.5 边界非线性.....	150
10.5.1 边界非线性(接触)问题概述.....	150
10.5.2 接触问题求解.....	151
10.5.3 接触对坐标系及接触条件.....	152
10.6 非线性弹性稳定性问题.....	153
10.6.1 稳定问题分类.....	153
10.6.2 有限单元法求解.....	155
10.7 非线性分析特点.....	156
10.8 ANSYS 非线性结构计算示例	156
10.8.1 问题描述.....	156
10.8.2 ANSYS 求解操作过程	157
10.9 ANSYS 稳定性计算示例	165
10.9.1 问题描述.....	165
10.9.2 问题分析.....	165
10.9.3 分析过程.....	166
思考与练习题.....	172
参考文献	175

第 1 章 概 述

有限单元法是力学与现代计算技术相结合的产物，是力学学科在计算技术上实现现代化的一个代表性的标志。自 20 世纪 70 年代以来随着计算机的出现，现代设计方法，如 CAD、优化设计、有限单元法以及三维动态设计等应运而生，解决了传统的设计方法无法解决的或难以解决的工程实际问题。求解工程问题可以用解析解和数值方法，但复杂的工程问题通常是得不到解析解的，只能依靠数值方法才能得出足以满足工程需要的解答。有限单元法借助于矩阵分析求解联立代数方程组，是解决工程和数学、物理问题的十分有效的数值分析与计算方法。

有限单元法首先应用于航空工程，由于其方法的有效性，迅速被推广应用于机械工程的 结构分析中。随着电子计算机的发展，有限单元法从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、生物工程学、声学等领域。本书以固体力学为例，从物理概念入手，侧重基本原理、解决问题的方式及方法的讲解，并且较为详细地介绍了大型工程软件的使用，使理论与实践得以有效地结合，为读者能够解决工程实际问题打下良好的基础。

1.1 有限单元法的概念

有限单元法的基本思想是借助于数学和力学知识，利用计算机技术解决工程技术问题的一种方法。

从数学角度看，有限单元法的基本思想是通过离散化的手段，将偏微分方程或者变分方程变成代数方程求解。从力学角度看，有限单元法的基本思想是通过离散化的手段，利用单元的力学特性，把一个复杂的连续体离散成有限个单元体的组合结构。继而经数学规划后，得到一个表征整个求解域问题的线性方程组，一般只有通过计算机与相应的软件技术才可能得到较为满意的数值解答的方法。

如图 1-1 所示，当需要分析齿轮上的一个齿内的应力分布状态时，可把一个连续的齿形截面分割成很多小三角形单元，单元之间以结点相连并传递求解信息。由有限个单元组合而构成的结构可以近似代替原来的连续齿轮结构，即将一个无限连续体离散成为有限个连续体的组合体求解。

有限单元法按照其推导方法可以分成以下三大类型。

(1) 直接刚度法

直接刚度法简称为直接法。它是根据单元的物理意义，建立有关场变量表示的单元性质方程。例如，利用虚功原理直接将 这些单元方程集合而形成整个求解域的控制方程。这种方法的优点是推导直观易于理解，广泛应用于固体力学求解运算中。但缺点是单元特征分析中要引入结点力的概念及结点平衡条件，不易直接推广到流场、温度场等非结构问题中。

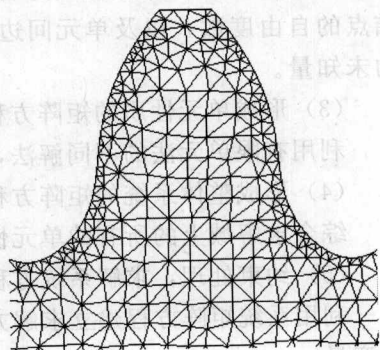


图 1-1 求解域单元的离散图

(2) 变分法

变分法直接从求解泛函的极值问题入手,把泛函的极值问题规划成线性代数方程组,然后求其近似解的一种计算方法。它是从里兹法(Ritz Method)的基础上发展变化而来的。有限单元变分法与里兹法实质上相同,两者主要不同点在于前者假设的坐标函数不需要满足整个求解域,只需要满足离散后的单元(子域)。所以,变分法对坐标函数的选取比里兹法容易。由于引入了离散化的概念,对复杂求解域可以用单元的简单形状集合而成,解决实际工程中提出的各类复杂的问题。

(3) 加权余量法

对于某些工程问题,相应的泛函难以得到,或者根本不存在相应的泛函时,则无法采用变分法。加权余量法则直接从控制方程中得到有限单元方程,是一种近似解法,如温度场求解。

加权余量法基本上包括两个解题步骤。首先设定一个近似函数,使它的性态近似满足给定的微分方程和边界条件。把该近似函数代入原始微分方程和边界条件中,这样产生一个误差。该误差称为余量。让这个余量在整个求解域的平均值为零,即选取一组线性独立的余量加权函数 W ,使之在整个求解域 Ω 满足

$$\int_{\Omega} RW_i dw = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

这样,在某种平均意义上,认为余量 $R \approx 0$ 。

1.2 有限单元法的基本步骤

有限单元法的解题步骤一般如下所述。

(1) 待求解域离散化

将求解域或连续体划分成以单元(子域)表示的组合物。单元和单元之间以结点相连。

(2) 选择插值函数

选择适当的插值函数以表达单元内的场变量的变化规律。场变量可以是标量、向量或者高阶张量。常数多项式为场变量的近似表达式,多项式的阶数取决于单元的结点数、结点的自由度,以及单元间边界的变量的协调性等。场变量及其导数都可以作为结点的未知量。

(3) 形成单元性质的矩阵方程

利用有限单元法的不同解法,求出表达单个单元性质的矩阵方程。

(4) 形成整体系统的矩阵方程

综合求解域上的所有的单元性质矩阵方程,形成整体系统的矩阵方程。

(5) 约束处理,求解系统方程

利用系统矩阵方程建立求解方程组,引入边界条件,即约束处理,求解出结点上的未知场变量。

(6) 其它参数计算

利用已求出的场变量,计算一些其它所希望的参数。例如,对于一个流场解出压力分布后,还要计算流体边界上所受到的合力等。

工程问题有限单元法分析流程见图 1-2。

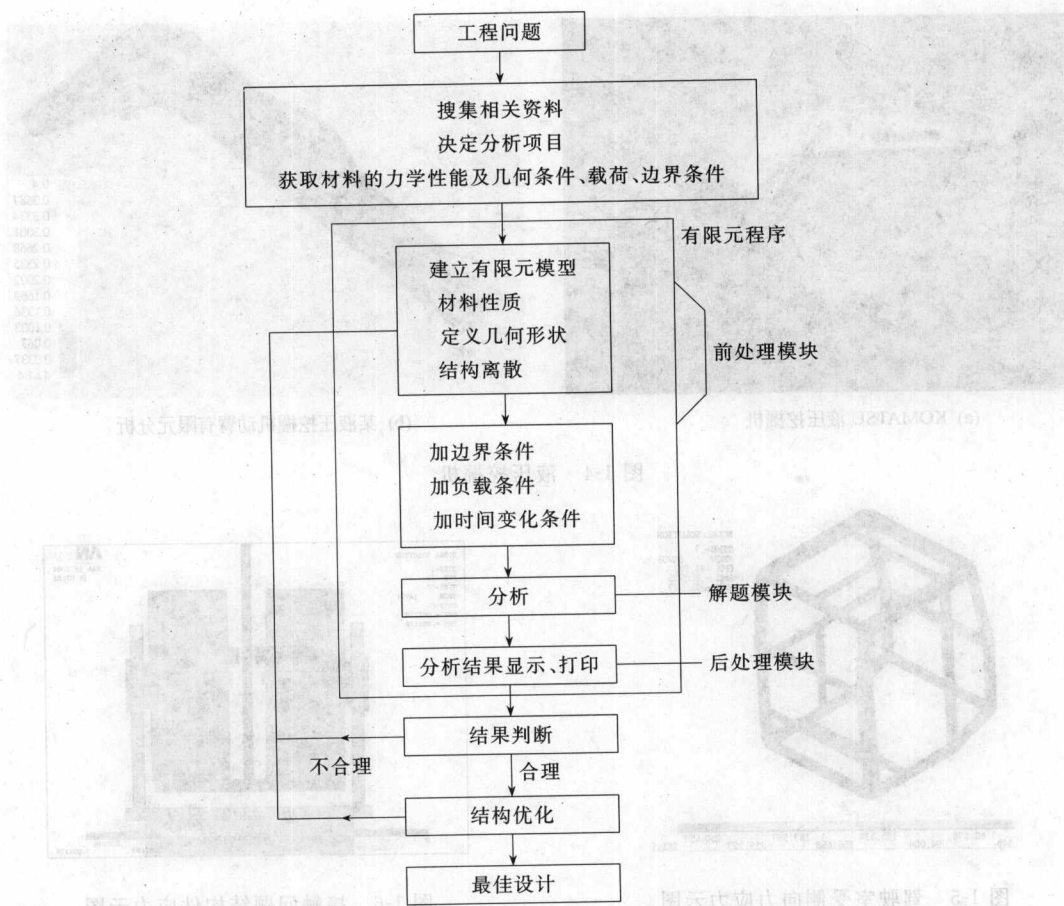


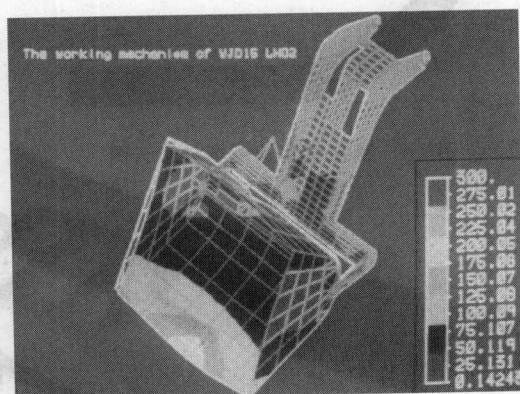
图 1-2 工程问题有限元法分析流程

1.3 工程实例

图 1-3~图 1-9 为工程上实际应用的有限元分析实例。



(a) 铲运机举升工况测试

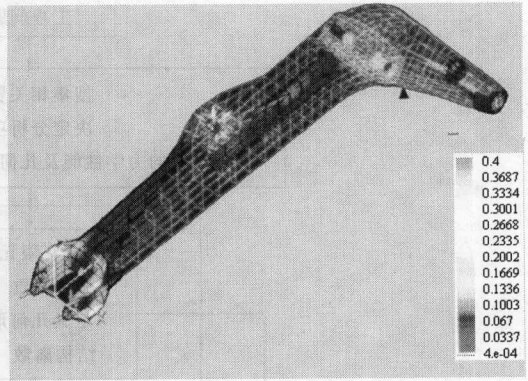


(b) 铲运机工作装置插入工况有限元分析

图 1-3 WJD-1.5 型电动铲运机



(a) KOMATSU 液压挖掘机



(b) 某液压挖掘机动臂有限元分析

图 1-4 液压挖掘机

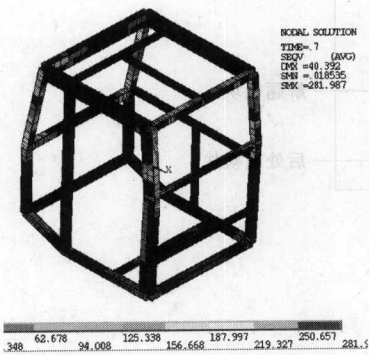


图 1-5 驾驶室受侧向力应力云图

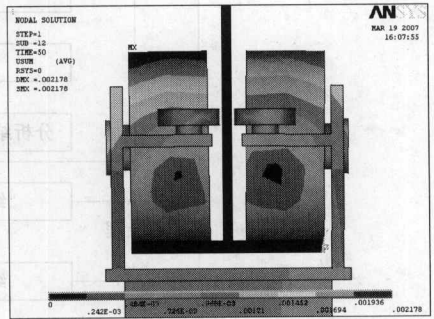


图 1-6 接触问题结构件应力云图



图 1-7 液压管路速度场分布云图

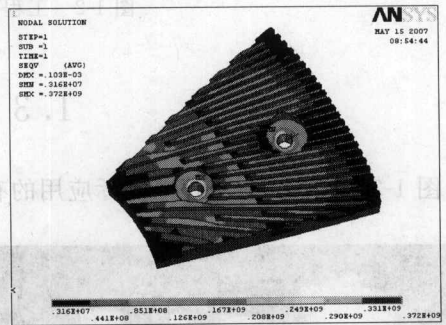


图 1-8 磨片热应力云图

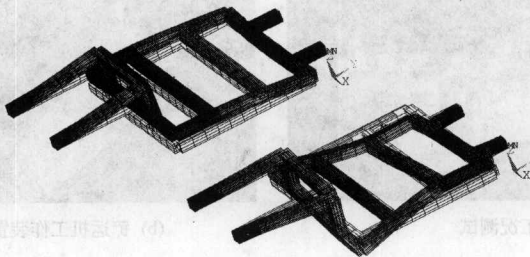


图 1-9 支架自由振动云图

思考题

1-2 简述有限单元法的解题步骤。

第2章 结构几何构造分析

2.1 结构几何构造分析的必要性

结构是用来承受和传递载荷的。如果不计材料的应变,在受到任意载荷作用时其形状和位置没有发生刚体位移时,称为几何不变结构或几何稳定结构,反之则称为几何可变结构或几何不稳定结构。因为几何可变结构在载荷作用下会发生位置和几何形状的改变,故不能承受和传递载荷。几何可变结构不能用作结构,对结构进行几何构造分析也是能够对工程结构作有限单元法分析的必要条件。

在图 2-1(a) 所示杆系结构中,由于 AC、CD、DB、BA 杆件铰接成一个四连杆机构,在微小的侧向力 P 的作用下就会发生很大的形状改变。像这种由于结构本身形状的可变性即结构本身具有可动性,作为结构是不可用的。对于图 2-1(b)、图 2-1(c) 所示的结构而言,虽然结构本身几何不变,但是它与基础连接或称约束条件满足不了结构稳定性的要求,也是不能作为承受和传递载荷的结构而使用。显而易见,图 2-1(b) 所示的结构缺少一个必要的支座连杆(约束)。图 2-1(c) 所示结构的所有支座连杆的延长线汇交于 A 点(瞬时转动中心)在图示微小外力 P 作用下结构就会发生位置的变化。

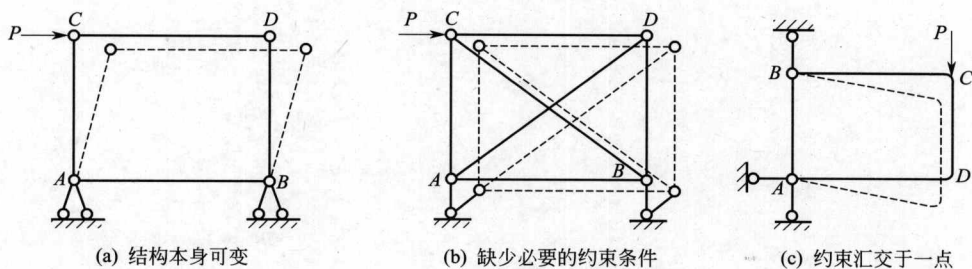


图 2-1 几何可变结构

当对结构进行力学性能分析时,首先要考虑和分析所设计的结构或者简化成为力学模型时是否为几何不变结构,如果为几何可变结构往往解不定,甚至无解输出造成计算机计算死循环。判断一个结构是否为几何不变结构应从结构的自由度及结构的组成规律来分析。但结构自由度的计算只是必要条件,而结构的组成规律分析则是充要条件。为了能够更好地对结构几何构造进行分析,需要简单了解结构计算的基本知识。

2.2 结构计算基本知识

2.2.1 结构计算简图

实际结构总是很复杂的,完全按照结构的实际情况进行力学分析是不可能的,也是没必

要的，因此在对实际结构进行力学计算之前，必须将其作合理的简化，使之成为既反映实际结构的受力状态与特点，又便于计算的几何图形。这种被抽象化了的简单的理想图形称为结构的计算简图，有时也称为结构的力学模型。

对于一个结构尤其是复杂结构的计算简图的确定，需要具有丰富的实践经验和对实际结构部件的全面了解，在此不作详细的讨论。以下仅介绍结构计算所常用的结点和支座的简化形式。

(1) 结点

在计算简图中，一般把结点分为铰结点、刚结点和混合结点三种。

① 铰结点 当汇交于同一结点的各杆端之间被认为可有相对转动时，该结点可视为铰结点。销钉连接就是较典型的铰结点。例如，在平面结构分析中，在金属结构中常见的焊接桁架结构的连接处，当结点板刚度较小，所连接处的抗弯刚度不大时，该结点即可按铰结点考虑，见图 2-2。

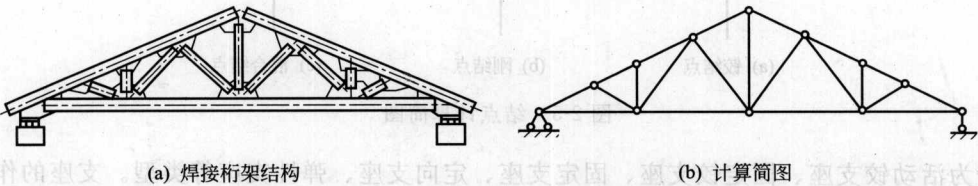


图 2-2 桁架结构与计算简图

铰结点的力学特性：在该处的弯矩永远为零。交于该结点处的各杆端可以自由转动，杆件之间的相互夹角大小和方向都可以不同。在此应强调指出，完全理想的铰结点在实际结构中是不存在的，这种简化处理是从安全角度出发、计算简便而带有一定的近似性。

② 刚结点 汇交于某结点的各杆端相互间牢固地连接在一起，杆件间既不能相对转动，又不能相对移动，这种结点称为刚结点。如图 2-3 所示钢筋混凝土结构中的结点就是刚结点。刚结点的特点是当结构变形时，汇交于刚结点的各杆端之间的夹角保持不变，即当该结点转动时，连接在此结点上的各杆端截面都随结点一起沿同一方向转动相同的角度。

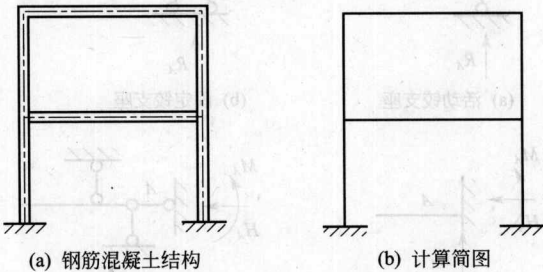


图 2-3 钢筋混凝土结构与计算简图

③ 混合结点 铰结点和刚结点组合在一起的结点称为混合结点。例如，在某一横梁下面用结点板连接另一杆件时，这种结点即可简化成混合结点，见图 2-4。其力学特性既有铰结点的力学特征，又有刚结点的力学特征。当结点转动时，刚性连接的杆件端面和刚结点具有相同转角，而铰接杆端弯矩为零且可具有不同的转角。

图 2-5 为这三种结点的计算简图。

(2) 支座

连接结构和基础的装置称为支座。根据支座对结构不同的约束作用，通常将平面结构的